

ASYMPTOTYCZNE METODY OBLICZANIA WSPÓLCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW TRÓJKĄTNYCH W PŁASKICH ZAGADNIENIACH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ANDRZEJ SEWERYN (BIAŁYSTOK)

Praca przedstawia dwa sposoby obliczania współczynników intensywności naprężeń K_I i K_{II} dla korbów trójkątnych w płaskich zagadnieniach teorii sprężystości. Wykorzystują one rozkład przemieszczeń otrzymany za pomocą metody elementów skończonych. Pierwsza metoda polega na obliczeniu wartości przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu. Wartość współczynników intensywności naprężeń w punkcie osobliwym otrzymujemy wówczas za pomocą ekstrapolacji. Druga metoda wykorzystuje zmianę kształtu ostrza karbu. Wyniki otrzymane podczas obliczeń metodą elementów skończonych porównywane są z rozkładami przemieszczeń wyprowadzonymi analitycznie. Na zakończenie porównano wartości współczynników intensywności naprężeń dla wybranych korbów trójkątnych otrzymanych obiema metodami. W tym celu wyznaczone zostały zależności otrzymanych wartości współczynników K_I i K_{II} od wielkości elementów osobliwych modelujących rozkłady przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- | | |
|-------------------|--|
| A | pole powierzchni elementu skończonego, |
| α | kąt przyległy do połowy kąta rozwarcia karbu - β , |
| b | szerokość tarczy, |
| β | połowa kąta rozwarcia karbu, |
| δ | odległość węzłów środkowych od węzła osobliwego w elemencie AST, |
| G | moduł odkształcenia postaciowego, |
| K_I, K_{II} | współczynniki intensywności naprężeń dla korbów trójkątnych, |
| K_{Ic}, K_{IIc} | graniczne współczynniki intensywności naprężeń, |
| λ | współczynnik asymptotyczności naprężeń, |

λ_0	uniwersalny współczynnik asymptotyczności naprężeń [7],
λ_I, λ_{II}	współczynniki asymptotyczności naprężeń dla I i II przypadku obciążenia karbu,
ν	liczba Poissona,
L	długość boku elementu skończonego na kierunku ekstrapolacji,
l	połowa długości karbu wewnętrznego,
r, ϑ	współrzędne biegunowe,
q_i	tensor przemieszczenia,
u_i, v_i	przemieszczenia i -tego węzła elementu skończonego,
u_r, u_ϑ	przemieszczenia w układzie biegunowym,
σ_{ij}	tensor naprężenia,
σ_1, σ_2	naprężenia główne,
$\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$	naprężenia w układzie biegunowym,
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	naprężenia w układzie kartezjańskim,
ξ, η	współrzędne lokalne związane z elementem AST.

1. WPROWADZENIE

W niniejszej pracy przedstawione zostały dwa sposoby obliczania współczynników intensywności naprężeń dla karbów o danym kącie rozwarcia. Bazują one na rozkładzie przemieszczeń otrzymanym za pomocą metody elementów skończonych, przy użyciu elementów osobliwych AST [8]. Wykorzystane zostały wzory analityczne na przemieszczenia i naprężenia w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego [7]. Porównanie charakteru obu rozkładów umożliwia wyliczenie współczynników intensywności naprężeń. Znajomość w/w współczynników wielokrotnie pozwala na określenie trwałości konstrukcji. Są one wartościami określającymi rozkład naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu.

Porównanie wartości współczynników intensywności naprężeń z wartościami granicznymi daje możliwość przewidzenia rozpoczęcia procesu kruchego pęknięcia. W przypadku szczelin płaskich graniczne współczynniki intensywności K_{Ic} oraz K_{IIc} są stałymi materiałowymi w płaskim stanie odkształcenia, natomiast w płaskim stanie naprężenia zależą także od wymiarów geometrycznych szczeliny. Należy zwrócić uwagę, że dla półpłaszczyzny (nieobciążonej na brzegu) wartością graniczną jest naprężenie niszczące σ_c . Można je traktować jako graniczny współczynnik intensywności naprężeń K_{Ic} dla karbu o kącie rozwarcia $2\beta = \pi$. Należy

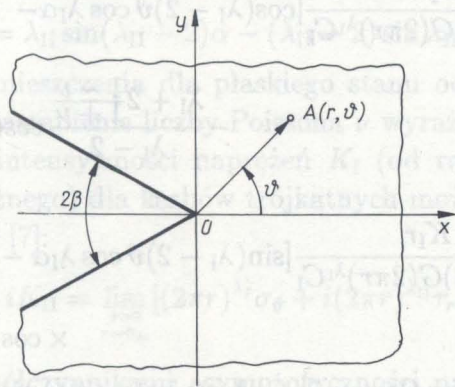
więc wywnioskować, iż dla każdego kąta rozwarcia karbu istnieją graniczne wartości K_{Ic} i K_{IIc} , przekroczenie których powoduje rozpoczęcie (lub kontynuację) kruchego pęknięcia.

Jednostką miary współczynników intensywności naprężeń w układzie SI jest $[\text{Pa} \cdot \text{m}^\lambda]$, gdzie λ jest odpowiednim współczynnikiem asymptotyczności naprężeń [7]. W przypadku szczeliny płaskiej otrzymujemy miano $[\text{Pa} \cdot \text{m}^{0.5}]$ (gdyż $\lambda_{I,II} = 0,5$), natomiast dla półpłaszczyzny - $[\text{Pa}]$ (dla rozrywania $\lambda_I = 0$).

2. ELEMENTY LINIOWEJ MECHANIKI PĘKANIA

2.1. Rozkład naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego

Rozważmy nieskończoną, liniowo-sprężystą tarczę z karbem trójkątnym o kącie rozwarcia 2β i prostoliniowych krawędziach. Analiza zostanie przeprowadzona w układzie biegunowym (r, ϑ) , którego początek znajduje się w wierzchołku karbu (rys.1).



Rys. 1

Wprowadzamy funkcje naprężeń Airy'ego postaci:

$$(2.1) \quad F_I(r, \vartheta) = r^{-(\lambda_I-2)} [A_I \cos(\lambda_I - 2)\vartheta + B_I \sin(\lambda_I - 1)\vartheta \sin \vartheta]$$

dla przypadku I typu obciążenia karbu (rozrywanie) oraz

$$(2.2) \quad F_{II}(r, \vartheta) = r^{-(\lambda_{II}-2)} [A_{II} \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta + B_{II} \sin(\lambda_{II} - 1)\vartheta \cos \vartheta]$$

dla przypadku II typu obciążenia karbu (ściananie wzdłużne) [7]. Funkcje te spełniają równanie biharmoniczne:

$$(2.3) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \vartheta^2} \right] \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial F}{r \partial r} + \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \vartheta^2} \right] = 0.$$

Stałe A_I , B_I , A_{II} , B_{II} wyznaczane są z warunków brzegowych na krawędziach karbu: $\sigma_\vartheta = \tau_{r\vartheta} = 0$.

Wykorzystując związki fizyczne i geometryczne otrzymujemy równania wyrażające naprężenia σ_r , σ_ϑ i $\tau_{r\vartheta}$ oraz przemieszczenia u_r , u_ϑ w otoczeniu wierzchołka karbu w płaskim stanie naprężenia:

a) dla I przypadku obciążenia (rozrywanie):

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{C_I(2\pi r)^{\lambda_I}} [\cos(\lambda_I - 2)\vartheta \cos \lambda_I \alpha - \frac{\lambda_I + 2}{\lambda_I - 2} \cos(\lambda_I - 2)\alpha \cos \lambda_I \vartheta], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{K_I}{C_I(2\pi r)^{\lambda_I}} [-\cos(\lambda_I - 2)\vartheta \cos \lambda_I \alpha + \cos(\lambda_I - 2)\alpha \cos \lambda_I \vartheta], \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{K_I}{C_I(2\pi r)^{\lambda_I}} [\sin(\lambda_I - 2)\vartheta \cos \lambda_I \alpha - \frac{\lambda_I}{\lambda_I - 2} \cos(\lambda_I - 2)\alpha \sin \lambda_I \vartheta], \\ u_r &= \frac{K_I r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I} C_I} [\cos(\lambda_I - 2)\vartheta \cos \lambda_I \alpha - \\ &\quad - \frac{\lambda_I + 2\frac{1-\nu}{1+\nu}}{\lambda_I - 2} \cos(\lambda_I - 2)\alpha \cos \lambda_I \vartheta], \\ u_\vartheta &= \frac{K_I r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I} C_I} [\sin(\lambda_I - 2)\vartheta \cos \lambda_I \alpha - \frac{\lambda_I - \frac{4}{1+\nu}}{\lambda_I - 2} \times \\ &\quad \times \cos(\lambda_I - 2)\alpha \sin \lambda_I \vartheta]. \end{aligned}$$

gdzie $\alpha = \pi - \beta$, a współczynnik C_I dany jest następującym wyrażeniem:

$$(2.5) \quad C_I = \cos(\lambda_I - 2)\alpha - \cos \lambda_I \alpha;$$

b) dla II przypadku obciążenia (ściananie wzdłużne):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_{II}}{C_{II}(2\pi r)^{\lambda_{II}}} [(\lambda_{II} - 2) \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta \sin \lambda_{II} \alpha - \\ &\quad - (\lambda_{II} + 2) \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \sin \lambda_{II} \vartheta], \end{aligned}$$

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{K_{II}}{C_{II}(2\pi r)^{\lambda_{II}}}(\lambda_{II} - 2)[- \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta \sin \lambda_{II}\alpha + \\ + \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \sin \lambda_{II}\vartheta],$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{K_{II}}{C_{II}(2\pi r)^{\lambda_{II}}}[-(\lambda_{II} - 2) \cos(\lambda_{II} - 2)\vartheta \sin \lambda_{II}\alpha - \\ - \lambda_{II} \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \cos \lambda_{II}\vartheta],$$

$$(2.6) \quad u_r = \frac{K_{II}r}{2(1 - \lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}C_{II}}[(\lambda_{II} - 2) \sin(\lambda_{II} - 2)\vartheta \sin \lambda_{II}\alpha - \\ - (\lambda_{II} + 2\frac{1 - \nu}{1 + \nu}) \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \sin \lambda_{II}\vartheta],$$

$$u_{\vartheta} = \frac{K_{II}r}{2(1 - \lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}C_{II}}[-(\lambda_{II} - 2) \cos(\lambda_{II} - 2)\vartheta \sin \lambda_{II}\alpha + \\ + (\lambda_{II} - \frac{4}{1 + \nu}) \cos \lambda_{II}\vartheta \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha].$$

gdzie

$$(2.7) \quad C_{II} = \lambda_{II} \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha - (\lambda_{II} - 2) \sin \lambda_{II}\alpha.$$

Wzory na przemieszczenia dla płaskiego stanu odkształceń można otrzymać poprzez zastąpienie liczby Poissona ν wyrażeniem $\nu/(1 - \nu)$.

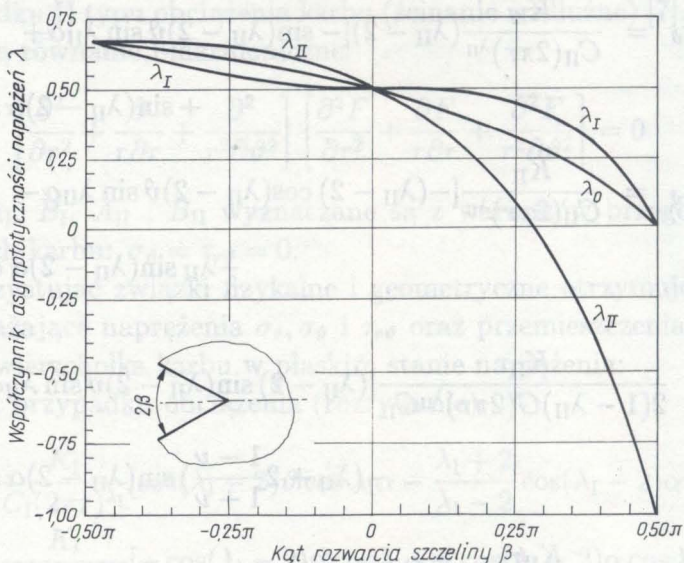
Współczynniki intensywności naprężeń K_I (od rozdzierania) i K_{II} (od ścinania wzdłużnego) dla karbów trójkątnych można zdefiniować w następujący sposób [7]:

$$(2.8) \quad K_I + iK_{II} = \lim_{\substack{\vartheta=0 \\ r \rightarrow 0+}} [(2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_{\vartheta} + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\vartheta}],$$

gdzie λ_I, λ_{II} są współczynnikami asymptotyczności naprężeń dla I i II przypadku obciążenia zależnymi od kąta rozwarcia karbu. Można je wyznaczyć z następujących równań:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sin 2(\lambda_I - 1)\alpha + (\lambda_I - 1) \sin 2\alpha &= 0, \\ \sin 2(\lambda_{II} - 1)\alpha - (\lambda_{II} - 1) \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Wykresy zależności $\lambda_I(\beta)$ i $\lambda_{II}(\beta)$ dla kątów rozwarcia karbu $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ przedstawia rys.2.



Rys. 2

2.2. Element skończony AST modelujący rozkład przemieszczeń i naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego

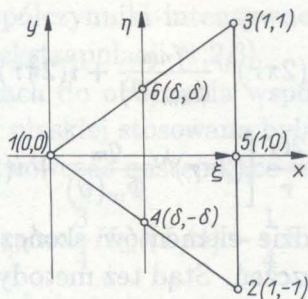
Element skończony AST (rys.3) jest przeznaczony do modelowania płaskich zagadnień teorii sprężystości z uwzględnieniem asymptotycznych rozkładów naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu trójkątnego. Środek układu współrzędnych Oxy jest zaczepiony w węźle osobliwym 1, natomiast węzły 2 i 3 są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oś η układu lokalnego $0\xi\eta$ związanego z elementem AST jest przesunięta o odległość

$$(2.10) \quad \delta = 0,5^{1-\lambda},$$

gdzie λ jest współczynnikiem asymptotyczności naprężeń wyznaczonym ze wzorów (2.6). Węzły 4 i 6 leżą na osi η , a węzeł 5 znajduje się w środku podstawy trójkąta.

Funkcje kształtu elementu AST są takie same jak dla ośmiowęzłowego izoparametrycznego elementu czworokątnego [5]. Rozkład przemieszczeń w elemencie we współrzędnych biegunowych ma postać

$$(2.11) \quad q_i = r^{1-\lambda} A_i(u_k, v_k, \eta) + r^{2(1-\lambda)} B_i(u_k, v_k, \eta) + C_i(u_k, v_k, \eta).$$



Rys. 3

Charakter naprężeń założonych w elemencie AST równa się

$$(2.12) \quad \sigma_{ij} = r^{-\lambda} c_{ij}(u_k, v_k, \eta) + r^{1-2\lambda} d_{ij}(u_k, v_k, \eta).$$

Otrzymane zależności świadczą o dużych możliwościach elementu w zakresie modelowania dowolnych płaskich zagadnień teorii sprężystości. Zostały one opisane w pracy [8].

3. WYZNACZENIE WSPÓLCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW TRÓJKĄTNYCH

3.1. Metoda ekstrapolacji

Współczynniki intensywności naprężeń opisują charakter rozkładu naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka karbu:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= (2\pi r)^{-\lambda_I} K_I \phi_{ij}(\vartheta) + (2\pi r)^{\lambda_{II}} K_{II} \psi_{ij}(\vartheta), \\ q_i &= \frac{r}{2G} [(2\pi r)^{-\lambda_I} K_I \Phi_i(\vartheta) + (2\pi r)^{\lambda_{II}} K_{II} \Psi_i(\vartheta)], \end{aligned}$$

$\phi_{ij}, \psi_{ij}, \Phi_i, \Psi_i$ - kombinacje funkcji trygonometrycznych.

W metodach asymptotycznych do znalezienia współczynników intensywności naprężeń można wykorzystać wyrażenia określające rozkład naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu (3.1). Jeżeli w rezultacie obliczeń otrzymamy wartości odpowiednich naprężeń i przemieszczeń punktu o współrzędnych (r, ϑ) położonego blisko wierzchołka karbu, to współczynniki intensywności w tym punkcie można wyliczyć w następujący sposób:

$$(3.2) \quad K_I + iK_{II} = (2\pi r)^{\lambda_I} \frac{\sigma_{nm}}{\phi_{nm}(\vartheta)} + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \frac{\sigma_{kl}}{\psi_{kl}(\vartheta)},$$

$$K_I + iK_{II} = \frac{2G}{r} \left[(2\pi r)^{\lambda_I} \frac{q_m}{\Phi_m(\vartheta)} + i(2\pi r)^{\lambda_{II}} \frac{q_k}{\Psi_k(\vartheta)} \right].$$

Naprężenia w metodzie elementów skończonych oblicza się przez różniczkowanie przemieszczeń. Stąd też metody asymptotyczne obliczania współczynników intensywności naprężeń w celu zminimalizowania błędu dotyczą właśnie przemieszczeń. Podwyższenie dokładności uzyskuje się, wykorzystując różne procedury ekstrapolacji. Jeżeli założymy $\vartheta = \text{const}$ i obliczymy współczynniki intensywności naprężeń w punktach o różnych współrzędnych biegunowych r , to możemy je również wyznaczyć w punkcie osobliwym. Najczęściej do tego celu wykorzystywana jest liniowa lub kwadratowa ekstrapolacja [3]. Element AST wymaga ekstrapolacji po współrzędnej r^λ (zgodnie z rozkładem naprężeń) - rys.4. Otrzymamy wówczas następujące wzory:

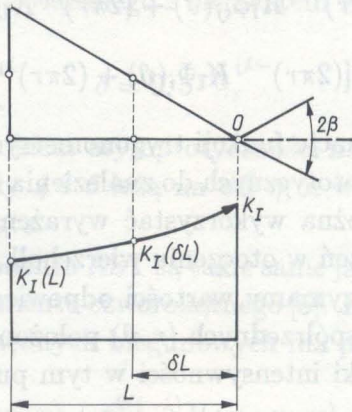
$$(3.3) \quad K_I = \frac{1}{1 - \delta^{\lambda_I}} K_I(\delta L) - \frac{\delta^{\lambda_I}}{1 - \delta^{\lambda_I}} K_I(L),$$

$$K_{II} = \frac{1}{1 - \delta^{\lambda_{II}}} K_{II}(\delta L) - \frac{\delta^{\lambda_{II}}}{1 - \delta^{\lambda_{II}}} K_{II}(L),$$

gdzie L oznacza długość boku elementu na kierunku ekstrapolacji, δ jest dana wzorem (2.10).

W przypadku szczeliny płaskiej wyrażenia (3.3) przyjmą postać

$$K_{I,II} = 2K_{I,II}(L/4) - K_{I,II}(L),$$



Rys. 4

czyli otrzymujemy współczynniki intensywności naprężeń obliczane za pomocą kwadratowej ekstrapolacji [1,2,3].

W wielu przypadkach do obliczania współczynników intensywności naprężeń dla szczeliny płaskiej stosowana była także liniowa ekstrapolacja [3]. Otrzymujemy wówczas następujące wzory:

$$K_{I,II} = \frac{3}{4}K_{I,II}(L/4) - \frac{1}{4}K_{I,II}(L).$$

Stosowanie tej metody jest niezgodne z wyrażeniem (2.8) definiującym współczynniki K_I i K_{II} i obarczone jest dużym błędem, spowodowanym niezgodnością stopnia ekstrapolacji z charakterem rozkładu przemieszczeń i naprężeń w okolicy wierzchołka karbu.

Założmy kierunek ekstrapolacji $\vartheta = 0$. Korzystając z zależności (2.4) i (2.6), otrzymujemy wzory na przemieszczenia na tym kierunku:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{K_{Ir}}{2(1-\lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}C_I} \left[\cos \lambda_I \alpha - \frac{\lambda_I + 2\frac{1-\nu}{1+\nu}}{\lambda_I - 2} \cos(\lambda_I - 2)\alpha \right], \\ u_\vartheta &= \frac{K_{II}r}{2(1-\lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}C_{II}} \left[-(\lambda_{II} - 2) \sin \lambda_{II} \alpha + \left(\lambda_{II} - \frac{4}{1+\nu} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \right], \end{aligned}$$

gdzie C_I i C_{II} dane uprzednio wzorami (2.5) i (2.7).

Z powyższych wzorów w prosty sposób można obliczyć współczynniki intensywności naprężeń w punktach o współrzędnych biegunowych $\vartheta = 0$ oraz $r = \delta L$ i $r = L$. Korzystając ze wzorów ekstrapolacyjnych (3.3) wyznaczamy współczynniki K_I i K_{II} w punkcie osobliwym. Należy zwrócić uwagę, że liniowy rozkład przemieszczeń nie wpływa na wartość współczynników intensywności naprężeń.

Zasadniczą wadą tej metody jest znaczny spadek dokładności obliczeń dla małych współczynników asymptotyczności naprężeń λ (w przypadku gdy $\lambda = 0$ zeruje się mianownik w wyrażeniach (3.3)). Obliczenia takie mają jednakże niewielkie znaczenie techniczne.

3.2. Metoda zmiany kształtu karbu

Druga z asymptotycznych metod wyznaczania współczynników intensywności naprężeń polega na wykorzystaniu zmiany kształtu krawędzi

karbu trójkątnego w pobliżu jego wierzchołka. Dotychczas metoda ta była wykorzystywana do znalezienia współczynników K_I i K_{II} dla szczelin płaskich [2, 6].

Zmianę kształtu krawędzi karbu możemy wyznaczyć podstawiając do wyrażen (2.4) i (2.6) wartość $\vartheta = \alpha$. Otrzymujemy wówczas wzory:

a) dla I przypadku obciążenia (rozrywanie):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{K_I r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}} \frac{4}{(1 + \nu)(\lambda_I - 2)} \frac{\cos \lambda_I \alpha \cos(\lambda_I - 2)\alpha}{\cos \lambda_I \alpha - \cos(\lambda_I - 2)\alpha}, \\ u_\vartheta &= \frac{-K_I r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}} \frac{2}{1 + \nu} \frac{\cos \alpha}{\sin(\lambda_I - 1)\alpha}, \end{aligned}$$

b) dla II przypadku obciążenia (ściananie wzdłużne):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{K_{II} r}{2(1 - \lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \frac{4}{1 + \nu} \frac{\sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \sin \lambda_{II} \alpha}{\lambda_{II} \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha - (\lambda_{II} - 2) \sin \lambda_{II} \alpha}, \\ u_\vartheta &= \frac{K_{II} r}{2(1 - \lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \frac{1}{\lambda \sin(\lambda_{II} - 2)\alpha - (\lambda_{II} - 2) \sin \lambda_{II} \alpha} \times \\ &\quad \times \left[\sin(\lambda_{II} - 2)\alpha \cos \lambda_{II} \alpha \left(\lambda_{II} - \frac{4}{1 + \nu} \right) - \frac{(\lambda_{II} - 2)\lambda_{II}}{2} \sin 2\alpha \right]. \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenia można zapisać w następujący sposób:

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} u_r \\ u_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix},$$

gdzie wartości elementów macierzy c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} bezpośrednio wynikają ze wzorów (3.5) i (3.6).

Należy zwrócić uwagę, iż powyższe wyrażenia mogą przyjmować dla pewnych szczególnych przypadków (np. $\alpha = \pi$, $\lambda = 0,5$) wartość nieokreśloną. Można wówczas wykorzystać twierdzenie de l'Hospitala i zastąpić licznik oraz mianownik wyrażenia ich pochodnymi po zmiennej α . Otrzymamy następujące wzory:

$$(3.8) \quad c_{11} = \frac{r}{2(1 - \lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}} \frac{-4}{(1 + \nu)(\lambda_I - 2)} \times \\ \times \frac{\sin 2\alpha + [(\lambda_I - 1) + \Lambda_I] \sin 2(\lambda_I - 1)\alpha}{[(\lambda_I - 2) + \Lambda_I] \sin(\lambda_I - 2)\alpha - [\lambda_I + \Lambda_I] \sin \lambda_I \alpha},$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad c_{21} &= \frac{r}{2(1-\lambda_I)G(2\pi r)^{\lambda_I}} \frac{2}{1+\nu} \frac{-\sin \alpha}{[(\lambda_I-1) + \Lambda_I] \cos(\Lambda_I-1)\alpha}, \\
 [cd.] \quad c_{12} &= \frac{-r}{2(1-\lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \frac{4}{(1+\nu)C_o} [(\lambda_{II}-1 + \Lambda_{II}) \sin 2(\lambda_{II}-1)\alpha - \sin 2\alpha], \\
 c_{22} &= \frac{r}{2(1-\lambda_{II})G(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \frac{1}{C_o} \left[\left(\lambda_{II} - \frac{4}{1+\nu} \right) [\cos 2(\lambda_{II}-1)\alpha \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\lambda_{II}-1 + \Lambda_{II}) - \cos 2\alpha] - \lambda_{II}(\lambda_{II}-2) \cos 2\alpha \right],
 \end{aligned}$$

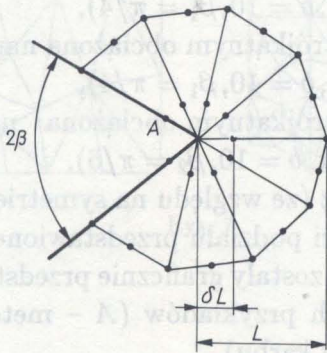
gdzie

$$\Lambda_I = \frac{d\lambda_I}{d\alpha} \alpha, \quad \Lambda_{II} = \frac{d\lambda_{II}}{d\alpha} \alpha,$$

$$\begin{aligned}
 C_o = \frac{d\lambda_{II}}{d\alpha} [\sin(\lambda_{II}-2)\alpha + \sin \lambda_{II}\alpha] + \lambda_{II}(\lambda_{II}-2 + \Lambda_{II}) \cos(\lambda_{II}-2)\alpha - \\
 - (\lambda_{II}-2)(\lambda_{II} + \Lambda_{II}) \cos \lambda_{II}\alpha.
 \end{aligned}$$

Pochodne współczynników asymptotyczności naprężeń po kącie α otrzymujemy różniczkując wyrażenia (2.9):

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \frac{d\lambda_I}{d\alpha} &= \frac{2(\lambda_I-1)[\cos 2\alpha + \cos 2(\lambda_I-1)\alpha]}{-2\alpha \cos 2(\lambda_I-1)\alpha + \sin 2\alpha}, \\
 \frac{d\lambda_{II}}{d\alpha} &= \frac{2(\lambda_{II}-1)[\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda_{II}-1)\alpha]}{2\alpha \cos 2(\lambda_{II}-1)\alpha - \sin 2\alpha}.
 \end{aligned}$$



Rys. 5.

Wartości u_r i u_θ są przemieszczeniami węzła leżącego na krawędzi karbu w odległości r od wierzchołka (rys. 5, węzeł A).

Rozwiązanie układu równań (3.7) umożliwi nam znalezienie wartości współczynników intensywności naprężeń K_I i K_{II} dla danego zagadnienia.

4. ZALEŻNOŚĆ WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ OD GĘSTOŚCI PODZIAŁU OKOLIC WIERZCHOŁKA KARBU NA ELEMENTY SKOŃCZONE

Ważnym problemem jest gęstość podziału obszaru w pobliżu punktu osobliwego. Ma ona znaczny wpływ na dokładność otrzymanych wyników, gdyż do obliczeń wykorzystywane jest jedynie pole przemieszczeń powstałe wskutek zaburzeń wywołanych geometrią karbu trójkątnego. W niniejszej pracy wyznaczone zostały wartości współczynników intensywności naprężeń przy różnej długości L boku elementu osobliwego AST modelującego rozkład przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu. Porównano wyniki otrzymane przy wykorzystaniu obu wcześniej opisanych metod.

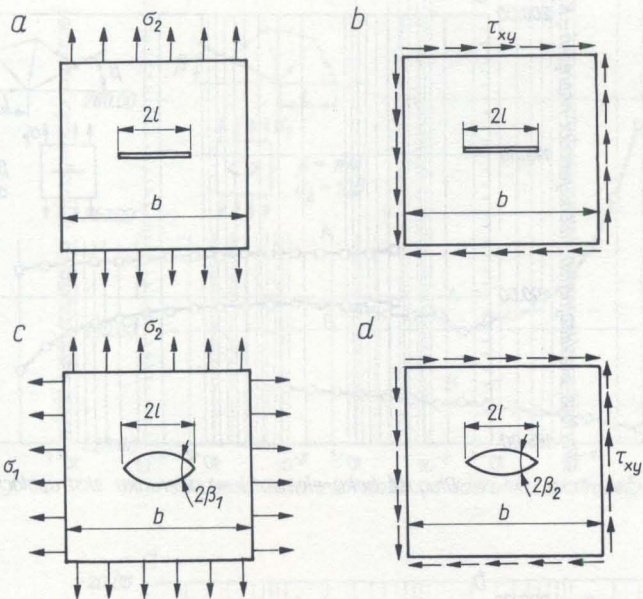
Zostały wykonane obliczenia dla następujących przypadków:

- tarcza ze szczeliną płaską obciążona naprężeniami normalnymi $\sigma_2 = 100$ (rys. 6a, $l = 1, b = 10$),
- tarcza ze szczeliną płaską obciążona naprężeniami tnącymi $\tau_{xy} = 100$ (rys. 6b, $l = 1, b = 10$),
- tarcza z karbem trójkątnym obciążona naprężeniami normalnymi $\sigma_2 = 100$ (rys. 6c, $l = 1, b = 10, \beta_1 = \pi/4$),
- tarcza z karbem trójkątnym obciążona naprężeniami normalnymi $\sigma_1 = 100$ (rys. 6c, $l = 1, b = 10, \beta_1 = \pi/4$),
- tarcza z karbem trójkątnym obciążona naprężeniami tnącymi $\tau_{xy} = 100$ (rys. 6d, $l = 1, b = 10, \beta_2 = \pi/6$).

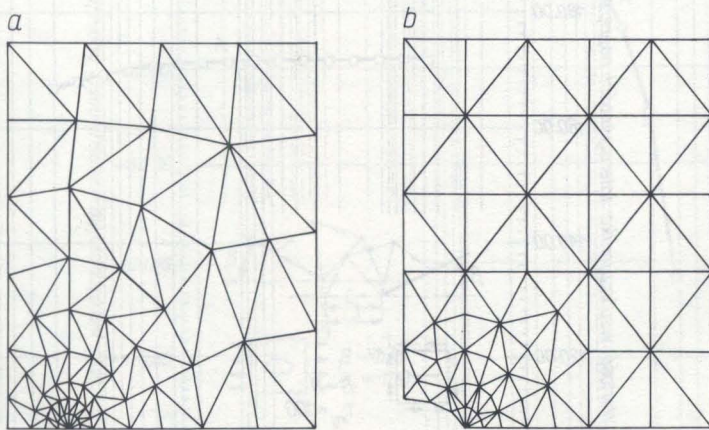
Siatki podziału tarcz (ze względu na symetrię rozpatrzono ćwiartkę) dla najmniejszej gęstości podziału przedstawione zostały na rys. 7a,b.

Na rys. 8a, b, c, d, e zostały graficznie przedstawione wyniki obliczeń dla wyżej wymienionych przykładów (A – metodą ekstrapolacji, B – metodą zmiany kształtu karbu).

W przypadku tarczy z wewnętrzną szczeliną płaską (rys. 8a) można je porównać z wartością współczynnika K_I , wyliczonego wg wzoru uwzglę-

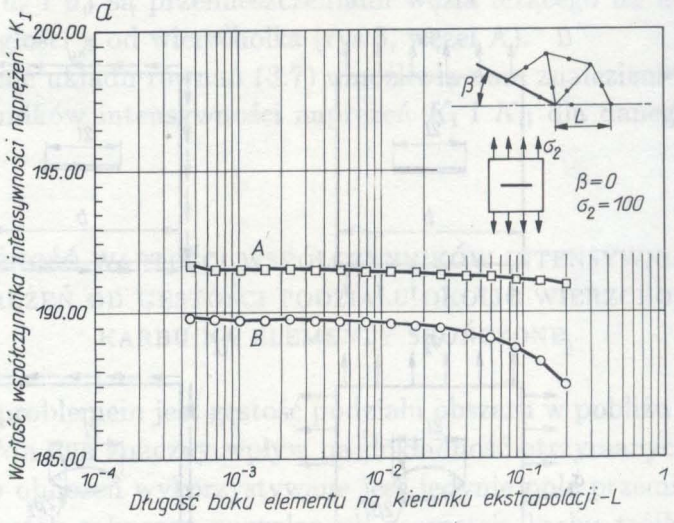


Rys. 6

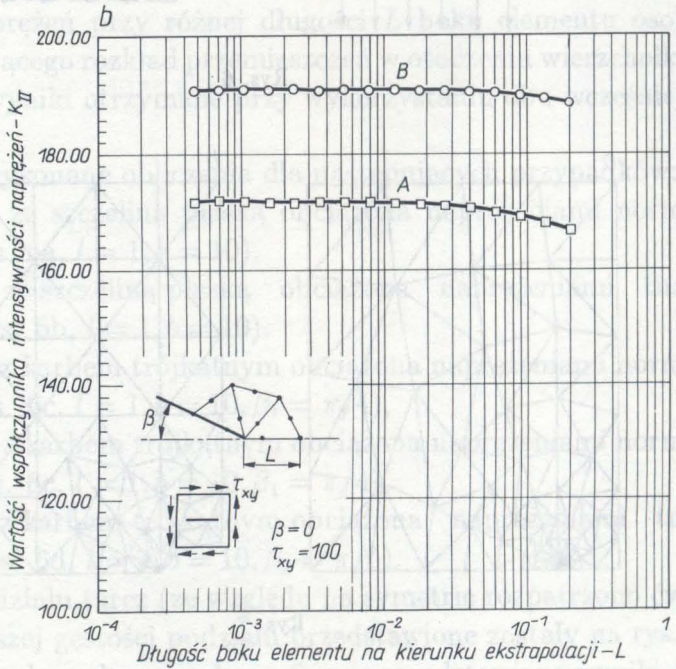


Rys. 7

a)

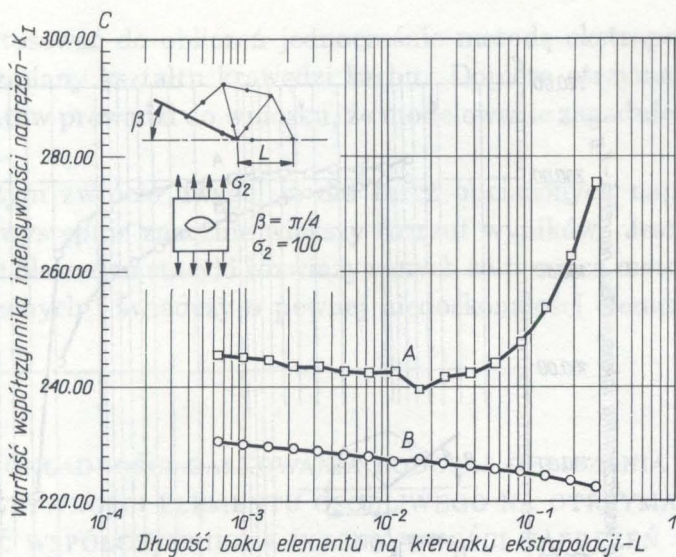


b)

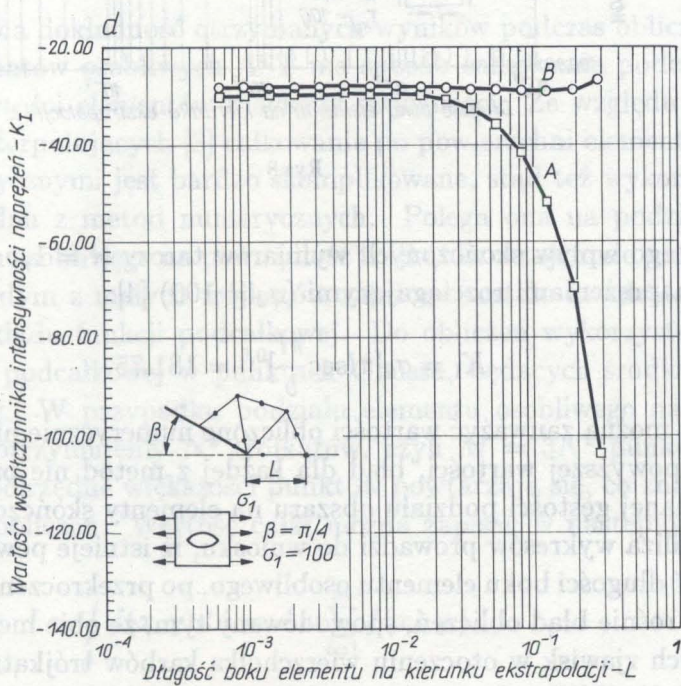


[Rys.8]

c)

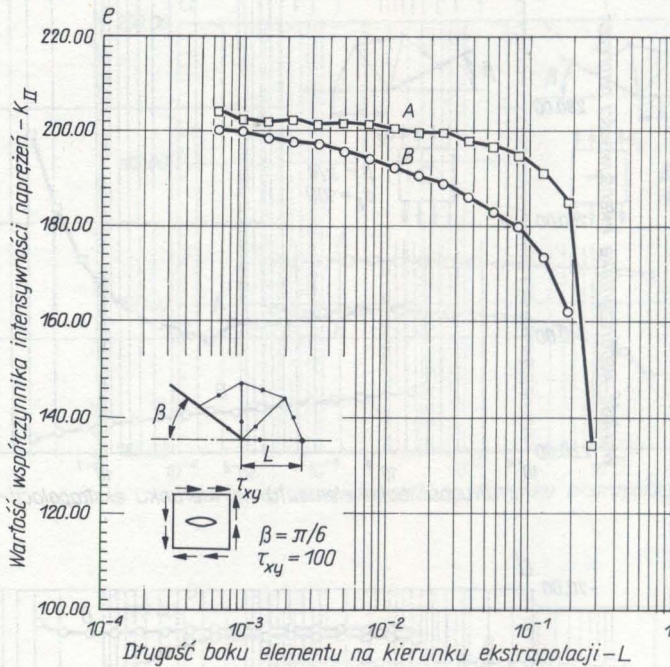


d)



[Rys.8]

e)



Rys.8

dniającego wpływ skończonych wymiarów tarczy ($l = 1, b = 10$), obciążonej naprężeniami rozciągającymi ($\sigma_2 = 100$) [4]:

$$K_I = \sigma_2 \left[\pi l \sec \frac{\pi l}{b} \right]^{0,5} = 181,75.$$

Jak można zauważyć wartości obliczone numerycznie niewiele różnią się od powyższej wartości, błąd dla każdej z metod nie przekracza 5% dla zadanej gęstości podziału obszaru na elementy skończone.

Analiza wykresów prowadzi do wniosku, iż istnieje pewna graniczna wartość długości boku elementu osobliwego, po przekroczeniu której raptownie rośnie błąd obliczeń, spowodowany tym, że obie metody dotyczą lokalnych zjawisk w otoczeniu wierzchołka karbów trójkątnych. Można przyjąć, iż wymiar elementów specjalnych, modelujących rozkład naprężeń i przemieszczeń w okolicy wierzchołka karbu trójkątnego, nie może być większy od 0,1 długości karbu zewnętrznego lub 0,05 długości karbu wewnętrznego. Jest to warunek konieczny, aczkolwiek nie zawsze dostateczny. Aby wyeliminować błędy, wynikające ze zbyt rzadkiej siatki

podziału należy stosować do obliczeń jednocześnie metodę ekstrapolacji jak i metodę zmiany kształtu krawędzi karbu. Dopiero otrzymanie zbliżonych rezultatów prowadzi do wniosku, że modelowanie zagadnienia było poprawne.

Należy poza tym zwrócić uwagę, iż dla tarcz obciążonych naprężeniami tnącymi występuje znacznie większy rozrzut wyników. Jest to charakterystyczne dla zadań statyki rozwiązywanych za pomocą metody elementów skończonych i świadczy o pewnej niedoskonałości elementu AST.

5. WPŁYW DOKŁADNOŚCI CAŁKOWANIA PODCZAS OBLICZANIA MACIERZY SZTYWNOŚCI ELEMENTU OSOBLIWEGO NA OTRZYMANĄ WARTOŚĆ WSPÓLCZYNNIKÓW INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ

Duży wpływ na dokładność otrzymanych wyników podczas obliczeń za pomocą elementów osobliwych AST ma sposób całkowania podczas wyznaczania wartości elementów macierzy sztywności. Ze względu na postać funkcji interpolujących [8] całkowanie po powierzchni elementów metodami analitycznymi jest bardzo skomplikowane, stąd też wykorzystana została jedna z metod numerycznych. Polega ona na podziale obszaru elementu osobliwego na pewną ilość trójkątów wzajemnie przystających. W każdym z małych trójkątów założone zostało kwadratowe przybliżenie rozkładu funkcji podcałkowej. Do obliczeń wykorzystano wartości funkcji podcałkowej w punktach Gaussa, będących środkami boków trójkątów. W przypadku podziału elementu osobliwego na N pasów (rys. 9) otrzymujemy N^2 trójkątów, czyli $M = 3N^2$ punktów całkowania. Współrzędne większości punktów powtarzają się, co znacznie skraca czas obliczeń. Wartość całki można zapisać w następujący sposób:

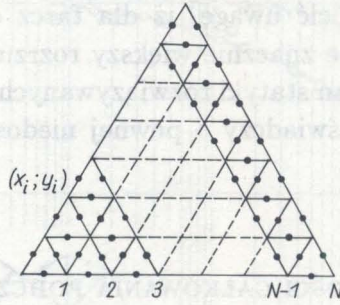
$$(5.1) \quad I = \int_A f(x, y) dA = Aw \sum_{i=1}^M f(x_i, y_i),$$

gdzie A – pole powierzchni elementu, w – waga ($w = 1/M$), x_i, y_i – współrzędne i -tego punktu całkowania.

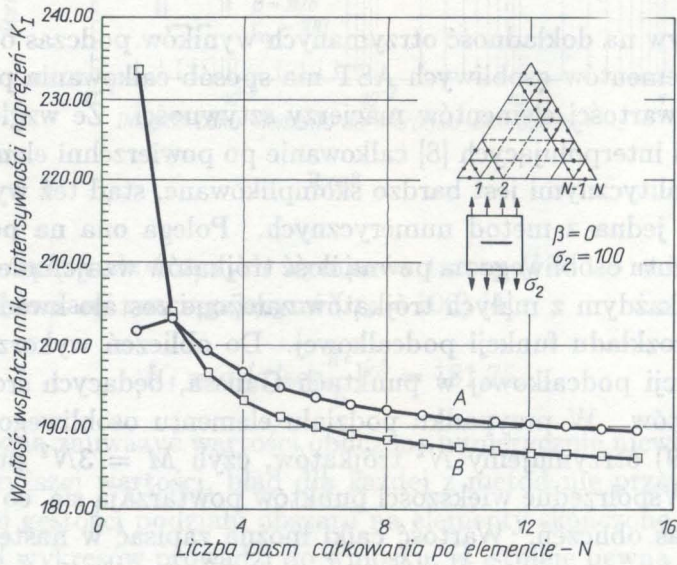
Wykonane zostały obliczenia zależności wartości wynikowej (współczynnika intensywności naprężeń) od ilości punktów całkowania w elementach osobliwych modelujących rozkłady przemieszczeń w otoczeniu

podziału należy stosować do obliczeń jednocześnie metodę elementarną i metodę asymptotyczną. Wynik obliczeń należy porównać z wynikiem otrzymanym metodą elementarną. W przypadku gdy różnica między wynikami jest niewielka, to można przyjąć, że obliczenia wykonane metodą asymptotyczną są poprawne.

Należy pamiętać, że w przypadku gdy różnica między wynikami jest niewielka, to można przyjąć, że obliczenia wykonane metodą asymptotyczną są poprawne. W przypadku gdy różnica jest większa, należy zwiększyć liczbę pasm całkowania i powtórzyć obliczenia.



Rys. 9



Rys. 10

wierzchołka karbu trójkątnego. Graficznie przedstawia ją rys.10. Na osi odciętych zaznaczona została wartość N - ilość pasm podziału elementu. Wykorzystany został przykład a) z poprzedniego rozdziału (tarcza ze szczeliną płaską obciążona naprężeniami rozrywającymi). Otrzymane wyniki porównano także z wyliczoną wcześniej wartością ścisłą współczynnika K_I . Można przyjąć, iż minimalna ilość pasm podziału powinna wynosić

$$N \geq \frac{2}{\delta},$$

gdzie δ jest dana wzorem (2.10). Dzięki temu pomiędzy węzłem osobliwym a węzłami bocznymi elementu znajdują się co najmniej cztery trójkąty całkowania.

Podsumowując powyższe obliczenia należy stwierdzić, iż na dokładność wyznaczenia współczynników intensywności naprężeń K_I i K_{II} ma wpływ wiele czynników, z których należy przede wszystkim wymienić:

a) gęstość siatki podziału otoczenia wierzchołka karbu na elementy skończone,

b) zgodność modelowania zagadnienia przez elementy osobliwe,

c) dokładność podczas budowy i odwracania macierzy sztywności.

Oczywiście podczas wykonywania obliczeń niezbędna jest rzetelna analiza każdego z nich.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D.M.TRACEY, *Discussion of "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics" by R.S. Barsoum*, Int.J.Numer.Meth.Eng., 11, 2, 401-403, 1977.
2. Е.М.Морозов, Г.П.Никишков, *Метод конечных элементов в механике разрушения*, Наука, Москва 1980.
3. В.З.Партоп, Е.М.Морозов, *Механика упругопластического разрушения*, Наука, Москва 1985.
4. Г.П.Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*, Наука, Москва 1974, 640с.
5. O.C.ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, Mc Graw-Hill Book Company, London 1977.
6. C.L.CHOW, K.J.LAN, *On crack surface displacement approaches of finite element analysis in evaluating stress intensity factors*, Int.J.Fract., 12, 3, 488-490, 1976.
7. A.SEWERYN, *Modelowanie rozkładów naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego w płaskich zagadnieniach teorii sprężystości. Część I*, Rozpr. Inżyn., 38, 3-4, 1990.

8. A.SEWERYN, *Modelowanie rozkładów naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego w płaskich zagadnieniach teorii sprężystości. Część II, Rozpr. Inżyn., 38, 3-4, 1990.*

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ УГЛОВЫХ ВЫРЕЗОВ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Работа представляет два способа расчета коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} для угловых вырезов в плоских задачах теории упругости. Они используют распределение перемещений, полученных при помощи метода конечных элементов. Первый метод заключается в расчете значений напряжений в окрестности вершины выреза. Значение коэффициентов интенсивности напряжений в особой точке получаем тогда при помощи экстраполяции. Второй метод использует изменение формы выреза. Результаты получены во время расчетов методом конечных элементов, сравниваются с распределениями перемещений, выведенными аналитически. В заключении сравнены значения коэффициентов интенсивности напряжений для избранных угловых вырезов, получены обоими методами. С этой целью определены зависимости полученных значений коэффициентов K_I и K_{II} от величины особых элементов, моделирующих распределения перемещений в окрестности вершины выреза.

SUMMARY

ASYMPTOTIC METHODS OF EVALUATION OF STRESS INTENSITY FACTORS FOR V - NOTCHES IN PLANE ELASTICITY THEORY

Two methods of evaluation of the S.I.F. (stress intensity factors) K_I , K_{II} for V - notches in plane elasticity are presented. The methods are based on the displacement fields obtained by the F.E.M. The first one consists in evaluating the stresses in the neighbourhood of the notch vertex; value of the S.I.F. at the singular point is then obtained by extrapolation. In the second method, use is made of deformation of the notch-edge. The results obtained by the F.E.M. are compared with those following from the analytical investigations. Values of the S.I.F. derived for various V - notches by means of the both methods are then compared; their dependence on the size of finite elements modelling the displacement distribution in the V - notch vicinity is demonstrated.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 grudnia 1989 r.