

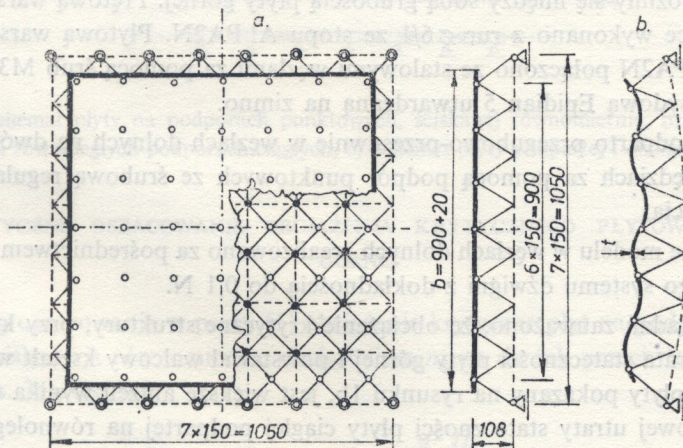
## BADANIA DOŚWIADCZALNE UTRATY STATECZNOŚCI PŁYTOWEJ WARSTWY ZEWNĘTRZNEJ W REGULARNEJ STRUKTURZE PRĘTOWEJ

ANTONI BIEGUS i ZBIGNIEW KOWAL (WROCLAW)

W pracy przeprowadzono badania teoretyczne i doświadczalne utraty stateczności płyt podpartych punktowo, stanowiących górną, ściskaną warstwę struktury prętowej. Badania doświadczalne przeprowadzono na 20 modelach płyt o  $6 \times 6 = 36$  oczkach. Zbadano serie płyt o smukłości nominalnej  $\lambda = 100, 150, 187, 300$ . Na podstawie pomiarów wyznaczono średnie współczynniki  $\bar{k}$  obciążenia krytycznego płyty do wzoru  $P_{kr} = \bar{k} N_c$ , oraz podano wzór do wyznaczania obciążenia krytycznego mierzonego poprzecznym obciążeniem struktury. Wyniki badań doświadczalnych porównano z oszacowaniami innych autorów i oszacowaniami własnymi.

### 1. WPROWADZENIE

W pracy zamieszczono wyniki badań stateczności 20 modeli regularnych struktur przestrzennych ze ściskaną płytową warstwą zewnętrzną o grubości nominalnej 0,5; 0,8; 1,0 i 1,5 mm, punktowo połączoną z krzyżulcami.



Rys. 1. a) Schemat modelu struktury płytowo-prętowej, b) Postać wybożenia płyty

Badania przeprowadzono na modelach podpartych w węzłach dolnych na dwóch równoległych krawędziach, o schemacie statycznym pokazanym na rysunku 1. Na rys. 1 grubą linią oznaczono obrys płytowej warstwy górnej, cienką linią ozna-

czono krzyżulce, linią przerywaną—pasy dolne. Kółkami oznaczono punkty kontaktowe płyty z krzyżulcami. Węzły podporowe oznaczono podwójnymi kółkami.

Przyczyną podjęcia teoretycznych i doświadczalnych badań stateczności płyt w takich strukturach przestrzennych było sprawdzenie możliwości włączenia do współpracy płytowego pokrycia dachowego, ze strukturą prętową podpartą w węzłach dolnych, na dwóch równoległych krawędziach, stosowaną na przekrycia hal przemysłowych na przykład w systemie «Zachód» [4].

W pracy [2] zamieszczono wyniki badań losowych sił wewnętrznych w prętach rozpatrywanych struktur. Przeanalizowano możliwość zastępowania płyty układem prętów, umożliwiającym wyznaczenie sił wewnętrznych w prętowych elementach struktury metodami konwencjonalnymi. Zamieszczono oszacowanie granicznej smukłości liniowego zachowania się sił wewnętrznych w prętach struktur, powyżej której postuluje się w pracy [2] uwzględnianie wpływu przemieszczeń na siły wewnętrzne.

W niniejszej pracy podano wyniki badań doświadczalnych utraty stateczności płyty, stanowiącej górną warstwę prętowej struktury przestrzennej podpartej w węzłach na dwóch równoległych krawędziach.

Badania te zostały poprzedzone próbą teoretycznego wyznaczenia obciążenia krytycznego. Ponieważ otrzymane wyniki wydawały się zbyt optymistyczne, dlatego zdecydowano się przeprowadzić badania doświadczalne.

Badania modelowe przeprowadzono na stanowisku badawczym opisanym w pracy [2].

Modele struktury o oczkach  $a \times a = 150 \times 150$  mm i wysokości konstrukcyjnej  $h = 108$  mm różniły się między sobą grubością płyty górnej. Prętową warstwę dolną oraz krzyżulce wykonano z rur  $\varnothing 6/1$  ze stopu Al PA2N. Płytową warstwę górną ze stopu Al PA2N połączono ze stalowymi węzłami za pomocą śrub M3 i klejenia żywicą epoksydową Epidian 5 utwardzaną na zimno.

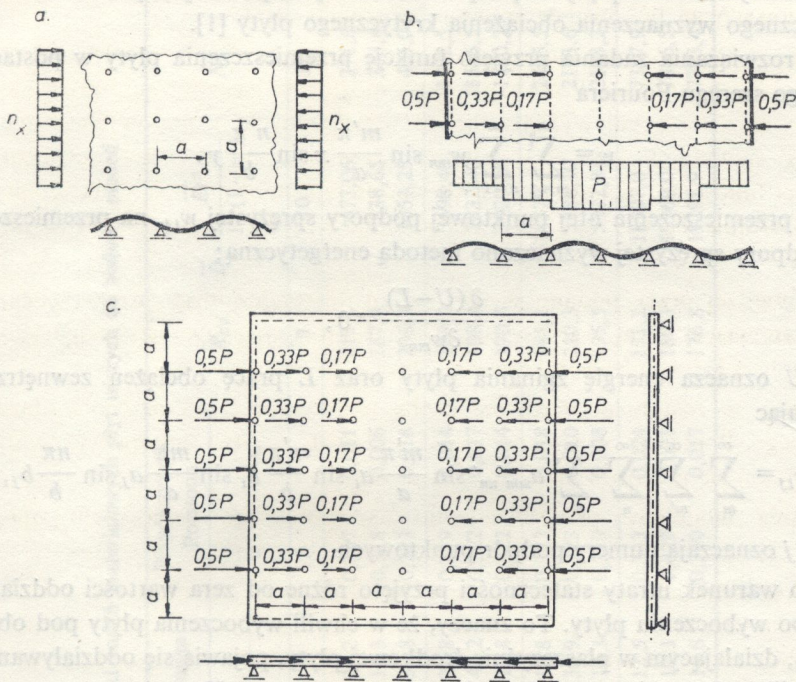
Modele podparto przegubowo-przesuwnie w węzłach dolnych na dwóch równoległych krawędziach za pomocą podpór punktowych ze śrubową regulacją wysokości podparcia.

Obciążenie modelu w węzłach dolnych zrealizowano za pośrednictwem statycznie wyznaczalnego systemu dźwigni z dokładnością do 0,1 N.

W toku badań zauważono, że obciążenie krytyczne struktury, przy którym występowała utrata stateczności płyty górnej i powstawał walcowy kształt wyobczonej powierzchni płyty pokazany na rysunku 1b, jest większe aniżeli wynika to z teoretycznej walcowej utraty stateczności płyty ciągłej podpartej na równoległych podporach ciągłych w sposób pokazany na rysunku 2b. W celu wyjaśnienia tego zjawiska przeanalizowano wpływ sztywności przegubowego połączenia krzyżulców z płytą, wpływ losowych rozrzutów grubości płyty oraz wpływ sztywności węzłów na nośność struktury. Wpływ ten oszacowano w przybliżeniu na 2–3%.

Zwrócono z kolei uwagę na zjawisko zwiększania się obciążenia krytycznego płyty wywołane losowymi ugięciami wstępnymi płyty oraz tymi zmianami ugięcia

struktury pod obciążeniem zewnętrznym, których krzywizna jest prostopadła do obciążenia. Przeprowadzono dodatkowe badania na osobnym modelu z wymuszaniem wstępnych ugięć o krzywiznie prostopadłej do obciążenia płyty. Z tych badań wynika możliwość znacznego zwiększenia obciążenia krytycznego płyty w przypadku losowego rozłożenia się wstępnych ugięć podpartej punktowo.



Rys. 2. a) Schemat płyty na podporach punktowych, ściskanej równomiernie, b) Schemat płyty podpartej na równoległych podporach ciągłych, c) Schemat płyty podpartej i obciążonej punktowo

2. TEORETYCZNE OSZACOWANIE OBCIĄŻENIA KRYTYCZNEGO PŁYTOWEJ WARSTWY GÓRNEJ

Według oszacowania w pracy [5] obciążenie krytyczne płyt na podporach punktowych, ściskanych równomiernie obciążeniem  $n_x$  na dwóch przeciwległych krawędziach (rys. 2a), wynosi

$$(2.1) \quad P_{kr} = n_x a = 1,00 \frac{\pi^2 D}{a},$$

gdzie  $D$  oznacza sztywność giętną płyty oraz  $a$  odległość podpór punktowych.

Należy nadmienić, że oszacowanie obciążenia krytycznego (2.1) wynosi tyle samo, ile obciążenie krytyczne płyty równomiernie obciążonej na przeciwległych krawędziach, podpartej na podporach liniowych.

Oszacowanie wg [6] obciążenia krytycznego płyty na 7 podporach liniowych, obciążonej jak w badanych modelach (rys. 2b) wyniosło

$$(2.2) \quad P_{kr} = 1,196 \frac{\pi^2 D}{a}.$$

Ponieważ oczekiwano, że obciążenie krytyczne płyt na podporach punktowych będzie mniejsze aniżeli płyty na podporach liniowych, przeto przeprowadzono próbę teoretycznego wyznaczenia obciążenia krytycznego płyty [1].

Do rozwiązania zadania przyjęto funkcję przemieszczenia płyty w postaci podwójnego szeregu Fouriera

$$(2.3) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m'\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{b} y.$$

Wpływ przemieszczenia  $i$ -tej punktowej podpory sprężystej  $w_{ij}$ , na przemieszczenie  $j$ -tej podpory sprężystej wyznaczono metodą energetyczną:

$$(2.4) \quad \frac{\partial (U-L)}{\partial w_{mn}} = 0,$$

gdzie  $U$  oznacza energię zginania płyty oraz  $L$  pracę obciążeń zewnętrznych, otrzymując

$$(2.5) \quad w_{ij} = \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} a_{mm'nn'} \sin \frac{m'\pi}{a} a_i \sin \frac{n'\pi}{b} b_j \sin \frac{m\pi}{a} a_j \sin \frac{n\pi}{b} b_j,$$

gdzie  $i, j$  oznaczają numery podpór punktowych.

Jako warunek utraty stateczności przyjęto różne od zera wartości oddziaływań  $R_i \neq 0$  po wyboczeniu płyty. To znaczy, że w chwili wyboczenia płyty pod obciążeniem  $P_i$ , działającym w płaszczyźnie środkowej płyty, pojawią się oddziaływania  $R_i$ . Do chwili wyboczenia oddziaływania te są równe zero. Kryterium utraty stateczności wtedy ma postać

$$(2.6) \quad |R_i w_{ij}|_j = 0.$$

Krytyczne obciążenie płyty, obciążonej jak w badanych modelach (rys. 2c), wyznaczone numerycznie za pomocą komputera Odra 1204, wyniosło

$$(2.7) \quad P_{kr} = 1,065 \frac{\pi^2 D}{a} < 1,196 \frac{\pi^2 D}{a}.$$

Ponieważ oszacowanie (2.7) uznano również za wygórowane, przeto przeprowadzono serię badań doświadczalnych opisanych w punkcie 4.

### 3. BADANIA MATERIAŁOWE PŁYT

Przeprowadzono pomiary grubości płyty  $t$ , modułu sprężystości  $E$  materiału płyty oraz współczynnika Poissona  $\nu$ . W tablicy 1 podano nominalną grubość płyty  $t_n$ , grubość średnią  $\bar{t}$  na podstawie pomiarów w różnych miejscach płyty, odchylenie standardowe grubości  $s_t$ , średni moduł Younga  $\bar{E}$ , odchylenie standar-

Tablica 1. Wyniki badań materiałowych płyt użytych do budowy modeli

Lp.	Grubość płyty		Moduł Younga			Współczynnik Poissona			$\bar{R}_{0,2}$	$\bar{D} = \frac{\bar{E}t^3}{12(1-\nu^2)}$	$\bar{N}_e$	Numer modelu
	$t_n$	$t$	$s$	$\bar{E}$	$\bar{\nu}$	$\nu$	$s_p$					
	mm	mm	mm	MPa								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	0,5	0,45	0,005	80280	29,2	0,307	0,011	219,5	673,06	271,6	1.1; 1.2	
		0,49	0,005	76890	18,3	0,318	0,006	187,0	838,65	338,4	1.3; 1.4	
		0,52	0,005	80510	38,8	0,323	0,018	206,3	1053,25	425,0	1.5	
2	0,8	0,79	0,005	79880	21,8	0,319	0,014	188,2	3698,49	1492,5	2.1; 2.2	
		0,80	0,005	80510	43,2	0,322	0,017	188,4	3832,40	1546,5	2.3; 2.4	
		0,81	0,005	79340	19,8	0,322	0,014	190,6	3920,20	1580,2	2.5	
3	1,0	0,95	0,005	77520	13,8	0,323	0,018	185,1	618379	2495,5	3.1; 3.2	
		0,89	0,005	82120	30,9	0,323	0,010	210,3	5386,10	2173,6	3.3; 3.4	
		0,89	0,005	82150	10,3	0,319	0,008	195,5	5372,84	2168,2	3.5	
4	1,5	1,34	0,005	81180	12,5	0,333	0,024	171,2	18307,0	7387,9	4.1; 4.2	
		1,35	0,005	82400	18,3	0,329	0,021	180,3	19369,0	7816,5	4.3; 4.4	
		1,36	0,005	82010	16,6	0,330	0,017	176,8	19291,9	7785,4	4.5	

dowe  $s_E$ , modułu Younga, średni współczynnik Poissona  $\bar{\nu}$ , odchylenie standardowe  $s_\nu$ , współczynnika Poissona. Ponadto zamieszczono umowną, średnią granicę plastyczności  $\bar{R}_{0,2}$ , średnią sztywność płyty wyznaczoną ze wzoru

$$(3.1) \quad \bar{D} = \frac{\bar{E}t^3}{12(1-\bar{\nu}^2)}$$

oraz krytyczne obciążenie eulerowskie płyty wyznaczone ze wzoru

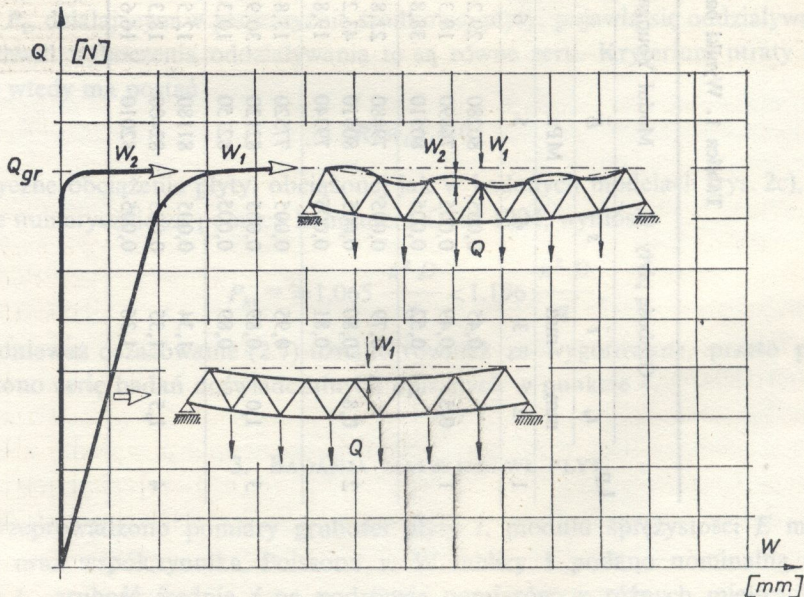
$$(3.2) \quad \bar{N}_e = \frac{\pi^2 \bar{D}b}{a^2}.$$

W kolumnie 12 podano numer modelu, do którego odnoszą się wielkości podane w odpowiednich wierszach tablicy 1.

Grubość blach zmierzono śrubą mikrometryczną z dokładnością do 0,002 mm na próbkach szerokości 20 mm po 5 próbek z każdego arkusza. Badania na rozciąganie przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej 1126 INSTRON. Wydłużenia i przewężenia (współczynnik Poissona) rejestrowano na rejestratorach F-3E RECORDER.

#### 4. WYNIKI BADAŃ MODELOWYCH

Modele obciążono jednakowymi siłami w węzłach dolnych. Węzły obciążono za pośrednictwem statycznie wyznaczalnego systemu dźwigni i cięgien, zaprojektowanych w ten sposób, aby w każdym węźle dolnym wywołać taką samą siłę pio-

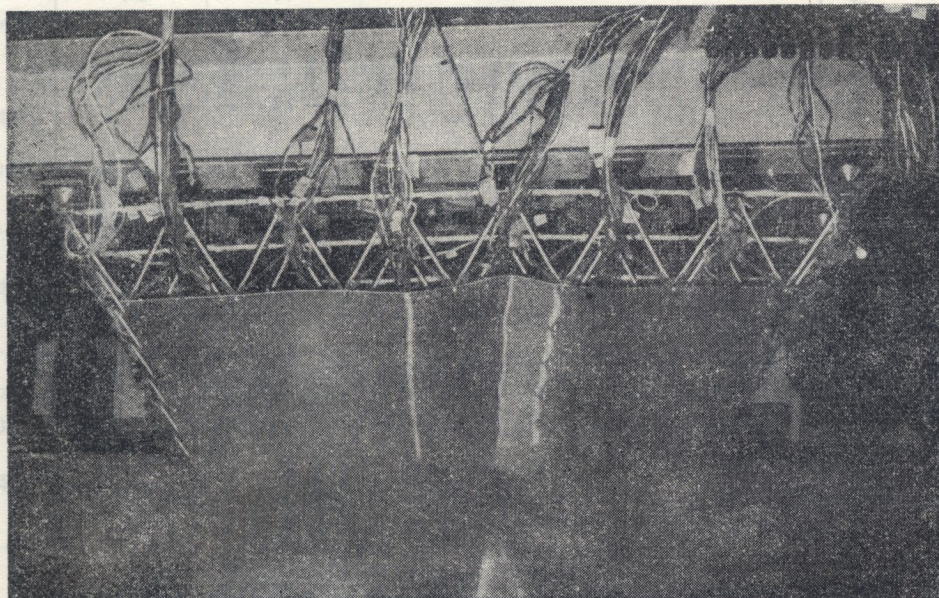


Rys. 3. Wykres zależności przemieszczeń  $W$  od obciążeń  $P$  modeli struktur z płytową warstwą górną

nową. System obciążano odważnikami stopniowo najpierw co 80 N, a następnie co 10 N. W końcowej fazie system obciążano co 5 N, co daje 5/36 N na węzeł.

W kolejnych etapach obciążania mierzono ugięcia płyty  $w_1$ , węzłów  $w_2$  oraz wydłużenia pasów dolnych.

W początkowej fazie badania modeli obserwowano powstawanie sprężystych ugięć całego modelu, znikających po odciążeniu (rys. 3). W tej fazie obciążania modeli nie zanotowano ugięć  $w_2$  płyty między węzłami, charakterystycznych dla utraty stateczności.



Rys. 4. Postać wybożenia płytowej warstwy górnej struktury

Mechanizm zniszczenia modeli polegał na nagłym sfalowaniu płyty w sposób pokazany na rys. 4, według sinusoidalnej powierzchni walcowej. Wzdłuż kierunku obciążenia płyty występowała sinusoida, w poprzek—linia prosta. We wszystkich 20 modelach zjawisko powtórzyło się w jakościowo jednakowy sposób. Po wybożeniu płyty górnej następowała równowaga sił w ustroju, jednak próbie dalszego zwiększania obciążenia towarzyszył gwałtowny przyrost przemieszczeń płyty i całego ustroju. Po odciążeniu ustroju sinusoidalna powierzchnia walcowa nie zanikała całkowicie: pozostawała część trwała. Przyczyną powstawania ugięcia trwałego, również w sprężystym obszarze wybożenia, były trudności w płynnym regulowaniu obciążenia. Obciążenia pionowe realizowano skokowo (o skoku 5/36 N na węzeł), co przy nagłym wybożeniu prowadziło do bardzo dużych przemieszczeń płyty.

Należy nadmienić, że w modelach z płytą o nominalnej grubości 0,5 mm przy połowie obciążenia granicznego pojawiły się lokalne sfalowania w środkowej części płyty, którym nie towarzyszyła utrata stateczności całego ustroju.

Tablica 2. Wyniki pomiarów i obliczenie współczynnika obciążenia krytycznego  $k$

NUMER MO- DELU	t mm	$\bar{N}_e = \frac{\pi^2 D b}{a^2}$		$Q_{kr}$		$P_{kr1}$		$P_{kr2}$		$P_{kr3}$		$P_{kr4}$		$\sum_{i=1}^n P_{kri}$	k	$\bar{k}$	$s_k$	$k_0$
		N	3	N	4	N	5	N	6	N	7	N	8					
1	2															11	12	13
1.1	0,45	271,6		603,6		157,24	155,07			123,18		61,89		837,52	3,084			
1.2	0,45	271,6		608,6		158,55	156,35			124,20		62,41		844,47	3,109			
1.3	0,49	338,4		753,8		196,37	193,66			153,83		77,30		1045,97	3,090	3,089	0,1790	2,559
1.4	0,49	338,4		690,1		179,78	177,29			140,83		70,76		957,54	2,829			
1.5	0,52	425,0		1021,3		266,06	262,38			208,42		104,73		1417,12	3,334			
2.1	0,79	1492,5		2162,6		459,21	450,35			414,35		328,46		2845,53	1,908			
2.2	0,79	1492,5		2156,0		447,81	448,75			413,02		327,46		2826,27	1,894			
2.3	0,80	1546,5		2441,3		518,40	508,14			467,75		370,79		3211,76	2,077	1,976	0,0883	1,741
2.4	0,80	1546,5		2277,5		483,61	474,04			436,36		345,50		2995,41	1,937			
2.5	0,81	1580,2		2481,4		526,91	516,48			475,42		376,88		3264,47	2,066			
3.1	0,95	2495,5		3690,4		805,26	780,89			720,44		567,05		4942,02	1,980			
3.2	0,95	2495,5		3633,4		792,83	768,83			709,31		558,29		4865,69	1,950			
3.3	0,89	2173,6		3341,1		729,04	706,98			652,25		513,37		4474,29	2,058	2,000	0,0978	1,707
3.4	0,89	2173,6		3490,4		761,62	738,57			681,39		536,32		4674,18	2,150			
3.5	0,89	2168,2		3014,9		657,84	637,95			588,57		463,20		4037,28	1,862			
4.1	1,34	7387,9		9548,1		1951,00	1958,70			1902,80		1538,20		12750,4	1,726			
4.2	1,34	7387,9		9507,4		1942,70	1950,40			1900,60		1531,70		12708,1	1,720			
4.3	1,35	7816,5		9869,3		2016,70	2024,60			1973,00		1590,00		13191,9	1,688	1,710	0,0145	1,667
4.4	1,35	7816,5		10046,6		2054,90	2060,90			2008,40		1618,40		13430,3	1,718			
4.5	1,36	7785,4		9891,1		2021,10	2029,20			1977,30		1593,50		13221,1	1,698			



Jako kryterium utraty stateczności przyjęto dążący do nieskończoności stosunek przyrostu przemieszczeń do przyrostu obciążenia. W tym przypadku nośność graniczna była liczbowo równa obciążeniu krytycznemu ustroju.

W tabelicy 2 zamieszczono średnie grubości płyty w modelu  $\bar{t}$  (kolumna 2), krytyczne obciążenie eulerowskie płyty  $\bar{N}_e$  (3.2) (kolumna 3), krytyczne, ogólne obciążenia struktury  $\bar{Q}_{kr}$ , przyłożone do węzłów dolnych, przy którym występowało wyboczenie płyty (kolumna 4). Krytyczne siły kontaktowe  $P_{kri}$ , działające w punktach połączenia płyty z krzyżulcami, zamieszczono w kolumnach 5, 6, 7 i 8. (Wyznaczono je na podstawie warunków równowagi obciążeń i sił wewnętrznych oraz pomiaru sił w prętach pasów dolnych).

Współczynniki  $k$  (kolumna 10) występujące we wzorze na obciążenie krytyczne

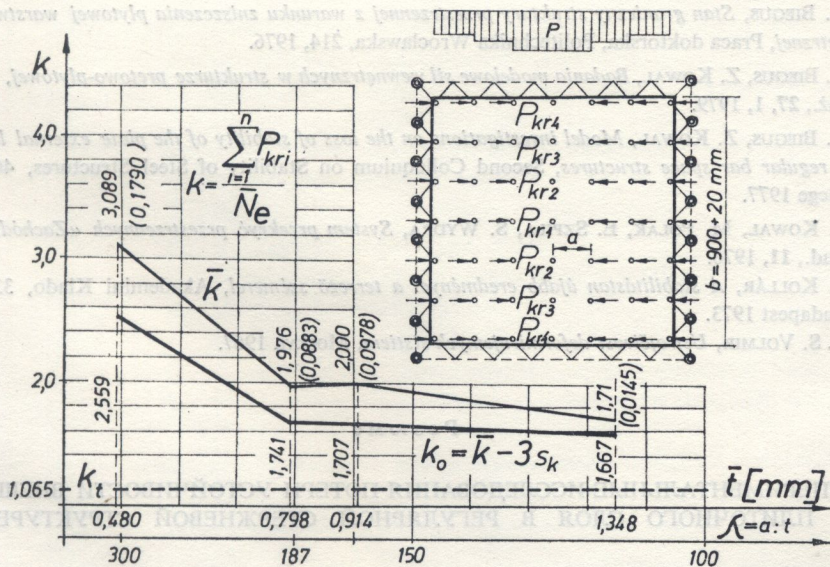
$$(4.1) \quad P_{kr} = k N_e$$

wyznaczono ze wzoru

$$(4.2) \quad \bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{kri}}{\bar{N}_e}$$

Dla każdej grubości płyty wyznaczono współczynniki  $k$ , obliczono średnie współczynniki  $\bar{k}$  w grupach (kolumna 10) oraz odchylenia standardowe  $s_k$  (kolumna 11). Obliczeniowe współczynniki  $k_0$  (kolumna 13) wyznaczono ze wzoru

$$(4.3) \quad k_0 = \bar{k} - 3s_k$$



Rys. 5. Wykresy współczynników  $K$  obciążenia krytycznego płyty

Na rysunku 5 oznaczono linią ciągłą wykres średnich współczynników  $\bar{k}$  wybożenia punktowo podpartej i punktowo obciążonej płyty jako funkcji jej grubości  $t$  i smukłości  $\lambda = a/t$ . Linią przerywaną oznaczono wykres współczynnika wybożenia  $k_t(\lambda)$  (2.7) obliczonego jak dla płyty podpartej na podporach punktowych (rys. 2c).

### 5. UWAGI I WNIOSKI

Doświadczalnie wyznaczone współczynniki krytycznego obciążenia płyt podpartych i obciążonych punktowo, stanowiących górną warstwę przestrzennej struktury regularnej podpartej w węzłach dolnych na dwóch równoległych krawędziach, są większe aniżeli współczynniki krytycznego obciążenia płyt oszacowane teoretycznie (2.1), (2.2) i (2.7). Różnice te zmniejszają się w miarę zwiększania grubości  $t$  i zmniejszania się smukłości płyty  $\lambda$ .

Należy przypuszczać, że największy wpływ na zwiększenie współczynników krytycznego obciążenia badanych płyt mają losowe, wstępne wygięcia o krzywiźnie prostopadłej do obciążenia.

Na podstawie obserwacji zachowania się badanych modeli struktur można postawić hipotezę, że obciążenie krytycznie ściskanej płyty stanowiącej warstwę górną struktury, podpartej na podporach wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, zmierza od góry do teoretycznego obciążenia krytycznego płyty wieloprześłowej podpartej punktowo, gdy wpływy losowe zmierzają do zera.

### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. BIEGUS, *Stan graniczny struktury przestrzennej z warunku zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej*, Praca doktorska, Politechnika Wroclawska, 214, 1976.
2. A. BIEGUS, Z. KOWAL, *Badania modelowe sił wewnętrznych w strukturze prętowo-płytowej*, Rozpr. Inż., 27, 1, 1979.
3. A. BIEGUS, Z. KOWAL, *Model investigations on the loss of stability of the plate external layer in a regular bar space structures*, Second Colloquium on Stability of Steel Structures, 463-468, Liege 1977.
4. Z. KOWAL, M. POLAK, E. SZPIŁA, S. WYDRA, *System przekryć przestrzennych «Zachód»*, Inż. Bud., 11, 1976.
5. L. KOLLÁR, *A stabilitás tan újabb eredményei a terrező szémerel*, Akademi Kiado, 333-337, Budapest 1973.
6. A. S. VOLMIR, *Ustrojčivost deformirujemych sistiem*, Moskva 1967.

### Резюме

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВНЕШНЕГО ПЛИТОЧНОГО СЛОЯ В РЕГУЛЯРНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СТРУКТУРЕ

В работе проведены теоретические и экспериментальные исследования потери устойчивости плит, подпертых точечным образом, составляющих верхний, сжимаемый слой стержневой структуры. Экспериментальные исследования проведены на 20 моделях плит с  $6 \times 6 = 36$

ячейками. Исследованы серии плит с номинальной толщиной  $\lambda=100, 150, 187, 300$ . На основе измерений определены средние коэффициенты  $\bar{k}$  критической нагрузки плиты для формулы  $P_{kr}=\bar{k}N_e$ , а также приведена формула для определения критической нагрузки, измеряемой поперечной нагрузкой структуры. Результаты экспериментальных исследований сравнены с оценками других авторов и с собственными оценками.

## SUMMARY

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF BUCKLING OF THE OUTER PLATE LAYER IN A REGULAR ROD STRUCTURE

Theoretical and experimental investigations on buckling of point-supported plates are presented in the paper; the plate constitutes the upper, compressed layer of a rod structure. Experiments are performed on 20 models of plates of dimensions  $6 \times 6$  elements. The plate series of nominal slenderness  $\lambda=100, 150, 187, 300$  are analysed. The data obtained are used to determine the mean critical load coefficients  $k$  from the formula  $P_{cr}=kN_e$ ; the formula is also derived for the evaluation of critical load measured by the transversal loading of the structure. The results of experiments are compared with the estimates given by other authors and ourselves.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1979 r.