

WOJCIECH POGÁNY

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH MECHANIKI GRUNTÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXIV

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Zagadnienie rozkładu naprężeń pod fundamentami	35
2. Zagadnienie parcia ziemi i murów oporowych	40

Tematyka niniejszego artykułu obejmuje krótki przegląd historyczny rozwoju pewnych zagadnień mechaniki gruntów na przestrzeni dwóch ostatnich wieków. Pierwszym zagadnieniem, o które tutaj chodzi, jest rozkład naprężeń pod fundamentami oraz związane z tym zagadnienie osiadania fundamentów. Drugim jest zagadnienie parcia ziemi względnie murów oporowych. Ten może szkicowy opis wymienionych zagadnień jest zarazem szkicowym przedstawieniem historii rozwoju mechaniki stosowanej gruntów¹⁾.

1. Zagadnienie rozkładu naprężeń pod fundamentami

1.1. Pierwsza faza historii tego zagadnienia zbiega się z epoką mechaniki klasycznej (Newton, Leibnitz, Lagrange, Clapeyron). W tej fazie obciążenie powierzchniowe przyjmuje się w postaci siły skupionej P lub siły równomiernie rozłożonej na powierzchni (o długości b i szerokości 1), rys. 1:

$$P = pb,$$

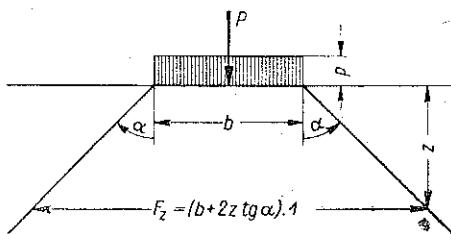
$$\sigma = \frac{pb}{b + 2z \operatorname{tg} \alpha},$$

gdzie P jest wielkością siły skupionej, p ciśnieniem, b długością fundamentu (jego powierzchnia zatem jest $b \cdot 1$), σ wartością naprężenia na dowolnej głębokości z , zaś α kątem rozkładu (w obliczeniach praktycznych przyjmowano zwykle 45°).

Naprężenie σ ma dwie wartości graniczne. W głębokości $z = 0$, a więc bezpośrednio pod powierzchnią fundamentu, $\sigma = p$, w głębokości zaś $z = \infty$ jest $\sigma = 0$. Podstawowym twierdzeniem teorii klasycznej jest twierdzenie, że zerowe naprężenie występuje tylko w nieskończonej głębokości.

1.2. Boussinesq w r. 1885, [1], na podstawie już wtedy znanych doświadczeń sformułował teorię matematyczną, w której dowodzi, iż

¹⁾ Praca przedstawiona na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Karpaczu w sierpniu 1953 r.



Rys. 1.

miejsca o zerowym naprężeniu możliwe są w płaskim obszarze w obrębie granic skończonych; konstruuje on zamknięte obszary, wewnątrz których naprężenie posiada wartości różne od zera. Jego teoria prowadzi do pojęcia tzw. «cebule naprężeń» B o u s s i n e s q a. Teoria ta łączy zagadnienie rozkładu naprężeń w sposób ścisły, a otrzymane rozwiązania można było w ówczesnym stanie badań doświadczalnych uważać za bardzo bliskie rzeczywistości.

Teoria B o u s s i n e s q a jest ważna przy przyjęciu założeń:

(a) izotropii, (b) jednorodności, (c) ciągłości oraz (d) proporcjonalności między naprężeniem i odkształceniem (ważność prawa H o o k e' a).

Jeżeli odwrotność liczby P o i s s o n a $m = 2$, to

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^3 \delta, \quad \sigma_h = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos \delta \sin^2 \delta, \quad \tau = \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^2 \delta \sin \delta;$$

tutaj r jest odległością dowolnego punktu od punktu zaczepienia siły, δ kątem pomiędzy kierunkiem r i kierunkiem pionowym, zaś σ_z , σ_h i τ są odpowiednio naprężeniami pionowymi, poziomymi i ścinającymi w dowolnym punkcie (r, δ) .

Jeżeli $m \neq 2$, to wartości σ_z i τ będą takie same, dla σ_h zaś otrzymujemy wyrażenie

$$\sigma_h = \frac{P}{2\pi r^2} \left(3 \cos \delta \sin^2 \delta - \frac{m-2}{m} \frac{1}{1+\cos \delta} \right).$$

Na podstawie teorii B o u s s i n e s q a powstały dwie metody w praktyce inżynierskiej najczęściej stosowane i znane dla obliczenia rozkładu naprężeń i osiadania fundamentów, mianowicie metoda S t e i n b r e n n e r a i H a e f e l i e g o.

13. Bezpośrednio po zakończeniu pierwszej wojny światowej przeprowadzono szereg doświadczeń, które wykazały, iż naprężenia obliczone zgodnie z teorią B o u s s i n e s q a w znacznym stopniu różnią się od rzeczywistych. Przypominamy tutaj doświadczenia rentgenologiczne H u g i e g o (1927) i G e r b e r a (1929), dotyczące gruntów piaszczystych i sypkich, przeprowadzone w ten sposób, że z ziarnami gruntu (piasku lub żwiru) zmieszano ziarna ołowiane i za pomocą zdjęć rentgenowskich ustalono wielkość przemieszczeń oraz powierzchnie graniczne mas gruntu bez naprężeń względnie bez ruchu. W doświadczeniach autora niniejszej pracy, przeprowadzonych w 1934 r. (por. *Czasopismo Techniczne* oraz *Bauingenieur* z tego okresu), dla uniknięcia dużej różnicy ciężarów właściwych zamiast ziaren ołowianych stosowano ziarna piasku lub żwiru galwanicznie powleczone ołowiem. Podobne doświadczenia przeprowadził piszący te słowa nad gruntami zwięzłymi. Na podstawie tych i podobnych doświadczeń F r ö h l i c h w r. 1934, [2], biorąc pod uwagę

anizotropię gruntu i częściowo odkształcenie plastyczne podaje dla wartości naprężeń następujące wyrażenia:

$$\sigma_z = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu} \delta, \quad \sigma_h = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2} \delta \sin^2 \delta, \quad \tau = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-1} \delta \sin \delta;$$

tutaj ν jest wskaźnikiem koncentracji charakterystycznym dla danego gruntu. Jeżeli $\nu = 3$, to otrzymujemy wzory B o u s s i n e s q a. W teorii F r ö h l i c h a rozkład naprężeń nie jest liniowy, jeżeli $\nu = 4, 5, 6$.

1.4. Teorię plastyczności wprowadził do zagadnień fundamentowania właściwie P r a n d t l (1923) i jego szkoła: C a q u o t (1934), R é s a l (1933-35) i inni.

Według P r a n d t l a naprężenie graniczne jest równe w przypadku niespoistych (sypkich) gruntów

$$q = \gamma t \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi},$$

w przypadku zaś gruntów spoistych względnie zwięzłych

$$q' = q + p_h \left[\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - 1 \right],$$

gdzie p_h jest naprężeniem wewnętrznym stanowiącym o spójności; $p_h = c \operatorname{ctg} \varphi$.

Metoda tej szkoły została później skontrolowana przez wiele doświadczeń. Między innymi piszący te słowa przeprowadził doświadczenia dla przypadku obciążenia pali, [3].

1.5. Metody doświadczalne (T e r z a g h i, B e n d e l). W 1946 r. na podstawie metod badawczych opracowanych przez T e r z a g h i e g o podaje on następujący przybliżony i oparty na doświadczeniach laboratoryjnych wzór:

$$\sigma_z = \frac{1}{f} \left(\frac{p_0 b}{b + a z^n} + \frac{p_0}{a b z^n} \right);$$

tutaj f jest współczynnikiem charakteryzującym geometryczny kształt fundamentu, n sztywnością, zaś a stałą charakteryzującą grunt.

We wzorze tym B e n d e l usiłuje skorzystać z wyników mechaniki gruntu z ostatnich 20 lat dla ustalenia rzeczywistego rozkładu naprężeń. Jest bowiem rzeczą zrozumiałą, iż poprzednie metody, uwzględniające tylko niektóre stałe fizyczne, podawały rozkład naprężeń w znacznym stopniu wyidealizowany.

Widzimy tutaj wspólną cechę rozwoju każdej technicznej dyscypliny powstałej w oparciu o nauki przyrodnicze. W pierwszym etapie rozwoju spotykamy się ze schematyzacją: obszerne i różne grupy przedmiotów, czasami w znacznym stopniu różniących się od siebie, zespala się w jedną całość (teoria klasyczna, która traktuje w ten sam sposób wszyst-

kie rodzaje gruntów). Nawet w późniejszej teorii B o u s s i n e s q a naprężenie pionowe i ścinające nie zależy od fizycznych właściwości gruntu, a tylko we wzorze dla naprężenia poziomego występuje liczba P o i s s o n a. Teoria F r ö h l i c h a pod wpływem wtedy właśnie rozpoczętych doświadczeń wprowadza już wskaźnik koncentracji ν pragnąc w ten sposób skompensować odchylenia, pochodzące od anizotropii, odkształcenia plastycznego i nieliniowego rozkładu naprężeń. Ta kompensacja nie dokonuje się jednak na ścisłej fizyko-matematycznej podstawie, ponieważ za pomocą jednego czynnika usiłuje uwzględnić i skompensować wszystkie odchylenia. Szkoła P r a n d t l a stara się uwzględnić każde odchylenie z osobna, ale teoria P r a n d t l a oparta na teorii plastyczności uwzględnić może tylko odchylenia pochodzące od odkształcenia plastycznego. Szkoła P r a n d t l a bierze pod uwagę zaledwie kilka stałych fizycznych: ciężar objętościowy, spójność i kąt tarcia wewnętrznego. Nie zna ona jeszcze niezależnie od niej rozwijającej się szkoły mechaniki gruntów T e r z a g h i e g o i jej wyników.

1.6. Z zagadnieniem rozkładu naprężeń wiąże się ściśle zagadnienie osiadania fundamentów. Całkowite osiadanie, φ , wyraża się matematycznie jako

$$\varphi = \int_0^t \frac{\sigma_z}{M_E} dz,$$

gdzie σ_z jest naprężeniem pionowym, M_E współczynnikiem ściśliwości (odpowiadającym w przypadku ciała sprężystego współczynnikowi Y o u n g a $E = \text{const}$ z tym, że M_E jest na ogół zmienne), zaś t przyjętą granicą głębokości.

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma + \sigma_z,$$

przy czym σ_0 oznacza wartość naprężenia w gruncie przed obciążeniem fundamentów; wartość ta zależy od warunków geologicznych i strukturalnych; σ jest naprężeniem dodatkowym, które nie pochodzi również od obciążenia użytkowego, lecz jest wynikiem wpływów fizyczno-chemicznych (sił włośkowatych, zmian termicznych itd.); σ_2 jest naprężeniem dodatkowym wywołanym w gruncie przez obciążenie użytkowe, np. fundamentem.

Na podstawie empirycznej funkcji T e r z a g h i e g o można napisać wartość elementarnych osiadań w następujący sposób:

$$ds_1 = (K' + K \log \sigma_1) dz,$$

$$ds_2 = (K' + K \log \sigma_2) dz,$$

$$ds = ds_2 - ds_1 = \left[K \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right] dz.$$

Stąd całkowite osiadanie

$$\varphi = \int_0^l ds = K \int_0^l \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) dz = K \int_0^l \log \frac{\sigma_0 + \sigma + \sigma_2}{\sigma_0 + \sigma} dz.$$

Ponieważ przy całkowaniu spotykamy się częstokroć z dużymi trudnościami, więc przy praktycznych rozwiązaniach zwykle korzystamy z prostego sumowania:

$$\varphi = K \sum \log \frac{\sigma_0 + \sigma + \sigma_2}{\sigma_0 + \sigma} \Delta z.$$

W praktyce inżynierskiej przeważnie są w użyciu dwie metody: metoda Steinbrennera (1936) i Haefeliego (1938). Metoda Steinbrennera uwzględnia wpływ kształtu fundamentu, ale z badań laboratoryjnych korzysta tylko w ograniczonym stopniu. Metoda Haefeliego jest bardziej związana z badaniami laboratoryjnymi przynajmniej w obliczeniu osiadań; o ile jednak chodzi o ustalenie rozkładu naprężeń, to tak samo jak i metoda Steinbrennera oparta jest na konserwatywnej teorii Bousinesq'a; oprócz tego przez uwzględnienie ciężaru własnego gruntu niepotrzebnie komplikuje rozwiązanie: wartość osiadania otrzymuje z obliczenia pola powierzchni i wymaga pięciu konstrukcji wykreślnych dla każdego punktu wiercenia. Autorowi niniejszego udało się opracować metodę uproszczoną, która redukuje potrzebne obliczenia numeryczne do dwóch prostych rysunków, a mimo to bardziej zbliża się do rzeczywistości.

1.7. Rozwiązanie Terzaghiego, oparte na tzw. analogii termodynamicznej, przedstawia zmianę nadciśnienia w wodzie w porach gruntu jako funkcję czasu w postaci cząstkowego równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

tutaj w jest naprężeniem hydrodynamicznym, t czasem, z głębokością, k współczynnikiem filtracji Darcy'ego, zaś a współczynnikiem ściśliwości gruntu.

Jest to właściwie równanie reologiczne, ponieważ nadciśnienie występuje w nim jako funkcja nie tylko obciążenia, lecz i czasu. Powyższe równanie różniczkowe rozwiązali później Terzaghi z Fröhlichem przy użyciu szeregu Fouriera. Giersiewanow podał bardziej praktyczne rozwiązanie, które zostało opracowane i uproszczone przez R. Piętkowskiego. Zaznaczamy tutaj, iż praktyczne dane pomiarowe osiadań różnych budynków w wielu przypadkach gładzą się z rozwiązaniem teoretycznym.

2. Zagadnienie parcia ziemi i murów oporowych

2.1. C o u l o m b w pracy swej, [4], z r. 1773 podaje pierwszą i w praktyce inżynierskiej do dziś dnia używaną metodę. Rozwiązanie C o u l o m b a jest ważne dla

- (a) murów pionowych,
- (b) poziomej powierzchni ziemi,
- (c) pełnej sztywności materiału gruntu (podczas obciążenia nie uwzględniamy odkształceń).

Na pryzmat ziemi, znajdującej się między płaszczyzną muru i tzw. powierzchnią poślizgu, działają trzy siły: G — ciężar pryzmatu (jego punktem zaczepienia jest środek ciężkości), E — parcie ziemi, R — siła reakcji działająca na powierzchni poślizgu (tworząca z normalną do tej powierzchni co najwyżej kąt równy kątowi tarcia wewnętrzznego).

Jak wiadomo, trzy siły są w równowadze, jeżeli przechodzą przez wspólny punkt i wektory ich tworzą trójkąt zamknięty. Wspólny punkt trzech sił w specjalnym przypadku zagadnienia C o u l o m b a zawsze istnieje; gdy jednak mur nie jest pionowy, a powierzchnia ziemi nie jest pozioma i kierunek siły E nie zgadza się z normalną muru, to te trzy siły na ogół nie przechodzą przez jeden punkt. Nie jest zatem spełniony potrzebny warunek stanu równowagi. Trzeba jeszcze zaznaczyć, że rozkład tak parcia ziemi, E , jak i siły reakcji, R , odpowiada ciśnieniu hydrostatycznemu. Według C o u l o m b a w warunkach pionowej ściany muru i poziomej górnej powierzchni ziemi wartość E można obliczyć z maksimum następującej funkcji:

$$E = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(a - \varphi) \operatorname{ctg} a}{\cos(a - 2\varphi)},$$

gdzie h jest wysokością muru, γ ciężarem objętościowym, a kątem nachylenia dowolnej powierzchni poślizgu, mierzonym od kierunku poziomego, zaś φ kątem tarcia.

Zgodnie z teorią Coulomba wartość a oblicza się z warunku

$$\frac{dE}{da} = 0,$$

skąd

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{1 + \sqrt{2} \sin \varphi}.$$

Wobec tego pozioma składowa parcia ziemi jest

$$E_h = E \cos \varphi.$$

Punkt zaczepienia wypadkowej E leży w trzeciej części wysokości muru od dołu. Doświadczenia Müller - Breslau wykazały, iż w przypadku drobnego piasku ($\varphi = 30^\circ$) jest $E_h = E_R \cdot 0,79$, gdzie E_R jest wartością parcia ziemi Rankine'a, [5].

Teoria Coulomba ze względu na swoją prostotę jest bardzo rozpowszechniona w praktyce inżynierskiej i stała się podstawą wielu metod graficznych (Cullmann, Poncelet, Rebhann, Winkler, Szily). Charakterystyczną cechą rozwiązania Coulomba oraz wymienionych praktycznych rozwiązań jest to, że powierzchnię poślizgu uważa się za płaską.

2.2. Sprzeczność występująca przy uogólnieniu teorii Coulomba — że trzy siły nie przechodzą przez jeden punkt — różni autorzy usiłowali eliminować przez przyjęcie krzywej powierzchni poślizgu. W ten sposób chcieli ratować teorię Coulomba, tak bardzo użyteczną w praktyce inżynierskiej. Typowe rozwiązania podali autorzy: Felenius (1927), Krej (1928), Terzaghi (1929), Pogány (1946).

W celu zapewnienia jednego punktu przecięcia trzech sił trzej pierwsi autorzy wyszli z założenia, iż powierzchnia poślizgu jest odpowiednio walcem kołowym, parabolicznym oraz logarytmiczno-spiralnym. Matematyczne traktowanie zagadnienia odpowiada metodzie Coulomba. Masa ziemi przesuwa się po powierzchni poślizgu, a w stanie równowagi powstałej po przesunięciu opór tarcia wyczerpuje się i rzeczywista wartość parcia ziemi powstaje tam, gdzie wartość E w różnych możliwych stanach równowagi będzie największa. Zagadnienie prowadzi więc właściwie do warunku

$$\frac{\delta E}{\delta s} = 0,$$

co w przypadku płaskiej powierzchni poślizgu odpowiada poprzedniemu zagadnieniu.

Zanim przejdziemy do rozwiązania podanego przez piszącego te słowa, należy pokrótce zwrócić uwagę na różnicę między wynikami doświadczalnymi i rozwiązaniem teoretycznym. Doświadczenia Müller - Breslau, tak samo jak i inne doświadczenia, świadczą o tym, iż obliczona wartość parcia ziemi dosyć dobrze zgadza się z rzeczywistością (jest o około 15% mniejsza), ale o wiele znacznie większa różnica zachodzi w punkcie zaczepienia. W rozwiązaniu Coulomba i w każdym podobnym rozwiązaniu teoretycznym, które zakłada hydrostatyczny rozkład obciążeń, odległość punktu zaczepienia od spodu muru jest równa trzeciej części wysokości muru. Rzeczywisty punkt zaczepienia zaś, według świadectwa wszystkich wykonanych pomiarów, znajduje się w po-

blizu połowy wysokości muru, czasami nawet powyżej tego punktu. W rozwiązaniu Felleniusa - Kreyana - Terzaghiego otrzymujemy dla E zgodnie z rzeczywistością większą wartość od wartości Coulomba, ale miejsce punktu zaczepienia wypada jeszcze poniżej miejsca wynikającego z teorii Coulomba.

Teoria Pogányego opiera się na pewnym rozważaniu fizycznym. Poddajemy różne materiały gruntowe (chodzi tutaj przeważnie o piasek i materiały sypkie) następującemu elementarnemu doświadczeniu: sypiemy materiał przez lejek na powierzchnię płaską i przy sypaniu poruszamy lejek wzdłuż prostej poziomej. Wtedy wysypany piasek przybiera kształt walca parabolicznego, którego przekroje pionowe są elementarnymi parabolami drugiego stopnia

$$y^2 = 2px,$$

gdzie parametr p jest stałą charakteryzującą własności mechaniczne materiału gruntowego (zależną od porowatości, wilgotności, wielkości ziaren, kąta tarcia wewnętrznego itd.). Tę stałą można określić doświadczalnie dla każdego rodzaju gruntu.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, iż taki walec piasku znajduje się w równowadze i wypełnimy przestrzeń pomiędzy walcem i murem oporowym materiałem piaskowym, to tylko materiał użyty do wypełnienia będzie wywierał parcie na mur oporowy, masa zaś opisanego walca parabolicznego nie będzie nań wywierała żadnego ciśnienia. Nie ma więc ona wpływu na wartość E . Zatem, jeżeli chodzi o parcie ziemi, należy uwzględnić tylko tę masę piasku, której przekrój pionowy posiada granice składające się z trzech na ogół krzywych linii: łuku paraboli masy piasku znajdującej się w równowadze, przekroju powierzchni ziemi i konturu muru (ten ostatni w zwykłych przypadkach jest prosty). Na wycinek działają trzy siły: G , E i R . Siły te powinny przechodzić przez jeden punkt. Z trójkąta wektorów można obliczyć E i R , ponieważ G jest znane. Dla pewności można (ale nie trzeba) przyjąć, że kierunek E jest poziomy. Przy kierunku R uwzględniamy kąt tarcia wewnętrznego. Zaznaczamy, że przy tej metodzie wartość parcia ziemi jest bliska rzeczywistości, a punkt zaczepienia przypada w pobliżu połowy wysokości muru. Metoda ta — mimo że z punktu widzenia praktycznego daje użyteczniejsze wartości od trzech poprzednich — z punktu widzenia naukowego nie jest zadowalającą, ponieważ traktuje masę ziemi jako ciało sztywne i nie uwzględnia ani sprężystego, ani plastycznego odkształcenia, [6].

2.3. Teoria sprężystości i jej zastosowanie do zagadnienia muru oporowego. Rankine w 1857 r. w pracy [7] stosuje równanie Cauchy

ch y' e g o zakładając płaski stan napięcia w nieskończonej półpłaszczyźnie:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma,$$

gdzie γ jest ciężarem objętościowym ziemi. Poza tym Rankine bierze pod uwagę, że w granicznym stanie równowagi zachodzi związek

$$\tau = n \operatorname{tg} \varphi,$$

gdzie n jest naprężeniem normalnym (dzisiaj używa się na ogół oznaczenia σ). Zaznaczamy, iż Rankine tutaj uwzględnia na razie tylko grunt niespoisty.

Rankine otrzymuje następujące rozwiązanie układu równań różniczkowych.

$$\sigma_x = \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha), \quad \sigma_y = \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\alpha), \quad \tau = \sigma \sin \varphi \sin 2\alpha,$$

przy czym

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},$$

zaś α jest kątem określającym kierunek naprężenia głównego.

Jeżeli $\alpha = 0$, tzn. gdy kierunek naprężenia głównego jest poziomy, to

$$\sigma_x = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \gamma y, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau = 0$$

i

$$\sigma = \frac{\gamma y}{1 - \sin \varphi}.$$

Jeżeli $\alpha = \pi/2$, to

$$\sigma_x = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \gamma y, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau = 0$$

i

$$\sigma = \frac{\gamma y}{1 + \sin \varphi}.$$

W przypadku gdy α przybiera wartość dowolną (różną od 0 i 90°), to dla σ otrzymujemy następującą wartość:

$$\sigma = \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} [y(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) - x \sin \varphi \sin 2\alpha].$$

Wprowadzamy kąt δ dla dowolnego punktu (x, y) jako

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 + \sin \varphi \cos 2\alpha}$$

Wtedy w ogólnym przypadku otrzymujemy kierunek naprężeń głównych, a zatem kierunek parcia ziemi E , z następującego równania:

$$\cos 2\alpha = \frac{-\sin^2 \delta + \cos \delta \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}}{\sin \varphi}$$

To równanie wtedy tylko będzie miało rzeczywiste rozwiązanie, gdy

$$\sin^2 \varphi \geq \sin^2 \delta,$$

to jest

$$\varphi \geq \delta.$$

Jeżeli więc $\varphi = \delta$, to

$$\cos 2\alpha = -\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

czyli

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

W przypadku gruntów piaszczystych powyższy warunek, $\varphi \geq \delta$, sprawdza się w rzeczywistości, w przypadku zaś gruntów spoistych φ może być mniejsze od δ , a równowaga może zachodzić pomimo tego, że rozwiązanie równania jest wielkością zespoloną.

Kierunek naprężenia wypadkowego otrzymujemy z następującego równania:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\tau}{\sigma_x} = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 + \sin \varphi \cos 2\alpha},$$

czyli

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \delta$$

i

$$\varepsilon = \delta.$$

Oznacza to, że z teorii Rankine'a wynika, iż parcie ziemi, E , jest równoległe do górnej powierzchni gruntu. Natomiast doświadczenia Müller-Breslaua i wiele innych wykazały zupełną bezpodstawność tego twierdzenia.

Warto zwrócić uwagę na to, że aczkolwiek metoda Rankine'a pod względem matematyczno-fizycznym zasadniczo przewyższa metodę Coulomba, jednak wyniki jej w mniejszym stopniu odpowiadają rzeczywistości, niż wyniki, jakie się otrzymuje przez zastosowanie metody Coulomba.

Publikacje Köttera z r. 1903 pogłębiają teorię Rankine'a. Daje on następujące rozwiązanie równań Cauchy'ego:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Tutaj σ_1 i σ_2 oznaczają, oczywiście, naprężenia główne.

W jednej ze swoich późniejszych prac Kötter w następujący sposób przekształca równania różniczkowe Cauchy'ego:

$$\cos \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2 \sigma \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \gamma \sin (\beta + \varphi),$$

$$\cos \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2 \sigma \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = -\gamma \cos \beta,$$

gdzie współrzędne s_1 i s_2 określają miejsce dwóch sprzężonych linii poślizgu, zaś β jest kątem nachylenia pierwszej powierzchni poślizgu. W tych równaniach różniczkowych σ i β są dwiema funkcjami niewiadomymi, które spełniają równania Cauchy'ego. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, iż

$$p = \sigma \cos \varphi,$$

gdzie p oznacza naprężenia wypadkowe, to równania Köttera można napisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} + 2 p \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \gamma \sin (\beta + \varphi),$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} - 2 p \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = -\gamma \cos \beta.$$

W tym układzie równań niewiadomą jest powierzchnia poślizgu określona przez funkcje p i β . Jeżeli jednak uznamy powierzchnię poślizgu za znaną, to powyższy układ równań umożliwia obliczenie wartości σ

lub p w każdym punkcie powierzchni poślizgu. K ö t t e r napisał równania również w następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} (p e^{2\beta \operatorname{tg} \varphi}) = \gamma e^{2\beta \operatorname{tg} \varphi} \sin(\beta + \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} (p e^{-2\beta \operatorname{tg} \varphi}) = \gamma e^{-2\beta \operatorname{tg} \varphi} \cos \beta.$$

R e i s s n e r w r. 1924 wykazał zasadniczą sprzeczność pomiędzy teorią R a n k i n e' a a rozszerzeniem tej teorii przez K ö t t e r a. Mianowicie, tarcie powoduje zakrzywienie powierzchni poślizgu w pobliżu murów. Tym zagadnieniem zajmowali się później M o h r, M ü l l e r - B r e s l a u, K r e y i F r e u n d. Pierwsze w praktyce stosowalne rozwiązanie pochodzi od R e i s s n e r a. Oblicza on z powyższego układu równań różniczkowych wartość σ za pomocą równania różniczkowego drugiego rzędu typu hiperbolicznego. R e i s s n e r dochodzi do wniosku, że równania powierzchni poślizgu są charakterystycznymi równaniami tego równania różniczkowego drugiego rzędu. P r a n d t l wykazał, że wzdłuż linii poślizgu do krzywych całkowych, stanowiących rozwiązanie równania różniczkowego, można dołączyć inne krzywe całkowe, stanowiące też rozwiązanie tego samego równania różniczkowego (tak żeby dwie krzywe w punkcie złączenia miały wspólną styczną), przy czym w obszarze pierwszej krzywej nie powstaje zakłócenie (występuje to tylko przy równaniach różniczkowych typu hiperbolicznego, nie występuje zaś przy typie eliptycznym). Zgodnie z tym w sieci powierzchni poślizgu R a n k i n e' a krzywe segmentu ABC dosztukowuje się do sieci prostych R a n k i n e' a ACD . R e i s n e r rozwiązał to zagadnienie graniczne metodą kolejnych przybliżeń. To samo zagadnienie dla przypadku szorstkiego muru pionowego i poziomej powierzchni ziemi rozwiązał K á r m á n, [8], metodą rozwijania w szeregi.

Według rozwiązania K á r m á n a

$$E_h = 0,81 E_R,$$

gdzie E_R jest parciem ziemi R a n k i n e' a :

$$E_R = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Aczkolwiek przy tym rozwiązaniu wartość siły jest bliska rzeczywistości, to punkt zaczepienia siły znajduje się tutaj też na trzeciej części wysokości muru od dołu, ponieważ rozkład sił i tutaj jest hydrostatyczny.

2.4. Wpływ czasu na wielkość parcia ziemi (pogląd reologiczny). Na podstawie doświadczeń T r e s c i publikuje w r. 1871 swoją pracę S a i n t - V e n a n t o plastycznych odkształceniach i uwzględnia po raz pierwszy czas jako parametr. Twierdzi on, iż miejsca największego ścinania zbiegają się z tymi miejscami, gdzie przy odkształceniu zachodzi największa prędkość poślizgu. Jeżeli miejsca maksymalnego poślizgu określają wzory

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}},$$

to $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\beta$, czyli $\alpha = \beta$.

To rozwiązanie S a i n t - V e n a n t a dotyczy tylko płaskiego stanu napięcia; według niego w przypadku przestrzennego rozkładu naprężeń zagadnienie nie jest rozwiązalne. Po upływie roku M. L é v y rozwiązał przypadek przestrzenny. Potem, blisko do r. 1900, nie spotykamy się z badaniami w rozpatrywanym kierunku, tj. z badaniami zjawisk plastycznych z uwzględnieniem czasu, a więc z badaniami reologicznymi. Samo zagadnienie plastyczności tak z punktu widzenia fizykalnego i doświadczalnego, jak z matematyczno-teoretycznego, zostało rozwiązane w pracach H a a r a i K á r m á n a, [9], [10], oraz szkoły getyngenskiej: P r a n d t l a, H e n c k y' e g o i N á d a i a. N á d a i w swojej pracy, [11], oprócz tensora naprężeń i odkształceń wprowadza tzw. tensor prędkości odkształceń.

W ten sposób teoretycznie zostało przygotowane badanie odkształceń plastycznych jako funkcji czasu. Pomimo tego, że badania nad materiałami plastycznymi przeprowadzone przez P r a n d t l a, H e n c k y' e g o, M i s e s a, [12], i N á d a i a odnoszą się do tych doświadczeń, które przeprowadzono w Getyndze nad metalami, doświadczenia P r a n d t l a, a przede wszystkim N á d a i a, wskazują na to, że idealny stan plastyczny silniej przejawia się w materiałach gruntowych, niż w metalach. Do scharakteryzowania stanu plastycznego na ogół korzystamy z modelu M o h r a (koło M o h r a). W modelu M o h r a charakteryzujemy stan napięcia za pomocą koła największego i najmniejszego; koła średniego nie uwzględniamy, bo nie ma ono wpływu na stan napięcia. L o d e w r. 1926, R o š i E i c h i n g e r (1927) oraz N á d a i (1927) wykazali, że w przypadku metali nie można pominąć wpływu naprężenia średniego, a model M o h r a właściwie tylko przy gruntach gliniastych zgadza się z rzeczywistością. Jest rzeczą charakterystyczną, że dla materiałów piaszczystych — które nie są ciągle i do których właściwie nie można stosować równania różniczkowego C a u-

c h y' e g o i w ogóle matematycznej teorii sprężystości — wyniki doświadczeń lepiej zgadzają się z teorią idealnego stanu plastycznego niż dla metali.

2.5. Wpływ systematycznych badań reologicznych na wyjaśnienie zagadnienia parcia ziemi. Z takimi systematycznymi badaniami spotykamy się głównie w okresie po drugiej wojnie światowej. Chemia i fizyka sztucznych materiałów plastycznych, które przemysł wojenny podczas drugiej wojny rozwinął w niesłychany sposób w każdym państwie biorącym w niej udział, zmuszały fizyków i chemików do badania szeregu zagadnień technologicznych związanych z tymi materiałami. Wśród tych prac trzeba wspomnieć o dziele H. U m s t ä t t e r a, [13]. Niestety, nie zajmuje się on badaniami gruntu ani spoiстого, ani sypkiego. Jego badania wyróżniają się głębokim przygotowaniem tak fizyczno-chemicznym, jak i matematycznym. Aczkolwiek w badaniach tych występuje niekiedy pojęcie kąta tarcia wewnętrznego, to jednak o wiele więcej miejsca zajmuje pojęcie lepkości, jako parametru charakteryzującego materiał; ten parametr odegrał już dużą rolę w mechanice N e w t o n a. Lepkość nie jest wielkością stałą, lecz funkcją temperatury i ciśnienia, podczas gdy kąt tarcia wewnętrznego dotychczas był uważany za niezależny od temperatury i od ciśnienia.

Wiemy, jak wielkie trudności powoduje w badaniach mechaniki gruntów rozrzut kąta tarcia wewnętrznego, ile razy usiłował mistrz klasycznej teorii parcia ziemi, T e r z a g h i, w zagadnieniach związanych z kątem tarcia wewnętrznego zredukować rozrzut przez zmianę metody doświadczalnej i teoretycznej, aby w ten sposób wprowadzić porządek potrzebny do ściślejszego, funkcjonalnego, rozwiązania. Skoro to mu się nie udało, powinniśmy i my wybrać inną drogę. Powinniśmy zatem unikać — o ile możliwości — używania kąta tarcia wewnętrznego, jako stałego parametru, a zamiast niego wprowadzić inne parametry, które łatwiej i pewniej można mierzyć.

W celu lepszego wyjaśnienia naszych uwag naświetlimy tutaj różnicę pomiędzy odkształceniem plastycznym i sprężystym. Podczas gdy w obszarze sprężystym aż do granicy plastyczności zachodzi jednoznaczny związek między odkształceniami i naprężeniami, tzn. do każdego odkształcenia przynależy tylko jedno naprężenie i do każdego naprężenia tylko jedno odkształcenie, to poza granicą plastyczności do jednego stanu napięcia przynależy więcej — właściwie nieskończona ilość — wartości odkształceń i do jednego odkształcenia nieskończona ilość wartości naprężeń. Tutaj więc związek nie jest jednoznaczny i oprócz naprężenia i odkształcenia należy wprowadzić współzrzedną czasu. Bez tej współzrzednej nie można zrozumieć zjawiska tzw. pełzania. Zagadnienie pełzania w ostatnich czasach odegrało wielką rolę w konstrukcjach betonowych. W zagad-

nieniach dotyczących betonu otwierały się trzy możliwości, by przybliżyć do rzeczywistości teoretyczny stan napięcia i odkształcenia, który powstał z powodu pełzania. Pierwsza polegała na wprowadzeniu tzw. funkcji pełzania jako funkcji korygującej, za pomocą której usiłowano skompensować odchylenia pomiędzy wynikami doświadczalnymi i obliczeniowymi. Inną, ogólniejszą i teoretycznie bardziej wartościową metodą, jest metoda *M i c h e l s o n a* (1917), który kompensuje odchylenia pomiędzy wynikami teoretycznymi i doświadczalnymi za pomocą równania dostosowanego do ołowiu, cyny, cynku, żelaza, miedzi, marmuru, gumy, żelatyny itd., przez podstawienie odpowiednich stałych. Metoda *M i c h e l s o n a* nie ma charakteru prawa przyrodniczego.

Trzecia metoda, która z punktu widzenia teoretycznego i fizycznego stoi zasadniczo ponad poprzednimi metodami i w której wprowadzony matematyczny związek ma charakter prawa przyrodniczego, pochodzi w pierwszym swoim sformułowaniu od *M a x w e l l a* (1868). *M a x w e l l* dla stanu sprężystego podał następujące dwa równania:

$$\sigma = E^* \varepsilon,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt},$$

gdzie σ oznacza jednakowe naprężenia cisnące, ciągnące i ścinające, ε jednostkowe odkształcenie w tych stanach napięcia, t parametr czasu, E^* zaś w przeciwieństwie do współczynnika *Y o u n g a* nie jest wartością stałą. Jeżeli $E^* = E = \text{const}$, to otrzymujemy prawo *H o o k e' a*. Dla stanu plastycznego *M a x w e l l* podaje następujące wyrażenie:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T},$$

tutaj T jest stałą wielkością czasu zależną od struktury materiału, której rolę za chwilę oświetlimy. To ostatnie równanie *M a x w e l l* zapisuje również w następującej postaci:

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T}.$$

Jeżeli $\sigma = \text{const}$, to

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{T}.$$

Jeżeli tutaj $T = \infty$, to mamy do czynienia z materiałem idealnie sprężystym:

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Jeżeli ε nie jest funkcją czasu, to $d\varepsilon/dt=0$ i otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = 0,$$

czyli

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{T},$$

skąd

$$\sigma = \varepsilon e^{-\frac{t}{T}} = E^* \varepsilon e^{-\frac{t}{T}}.$$

Jeżeli tutaj $t=T$, to

$$\sigma = E^* \varepsilon \frac{1}{e}.$$

Zatem T jest czasem, podczas którego wartość naprężenia spadnie od wartości $E^* \varepsilon$ do jej e -tej części (czas odprężenia). Równanie poprzednie można również napisać w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}}.$$

Jeżeli $T \neq 0$ i $t=0$, to $\varepsilon = \sigma/E^*$; jest to wartość jednostkowego wydłużenia w chwili początkowej

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*}.$$

Ogólne prawo można ująć jako kombinację dwóch praw przyrodniczych, mianowicie prawa ścinania, $\tau = G\gamma$, i prawa lepkości Newtona,

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}.$$

Tutaj u oznacza prędkość, y głębokość, η lepkość, τ naprężenie ścinające w kG/cm^2 , G moduł ścinania w kG/cm^2 oraz γ zmianę kąta.

Jeżeli znane już równanie

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}},$$

w którym σ i ε oznaczają naprężenie oraz odpowiadające mu odkształcenie, stosujemy do naprężenia ścinającego, to przybierze ono następującą postać:

$$\gamma = \frac{\tau}{G^*} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

W przypadku ścinania te dwa równania mogą stać się identyczne tylko pod warunkiem, że

$$\frac{G^*}{\eta} = \frac{1}{T},$$

czyli $\eta = G^* T$ lub $G^* = \eta/T$.

Wartość γ można napisać w postaci

$$\gamma = \frac{T}{\eta} \tau e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że według modelu M o h r a w każdym punkcie krzywej granicznej (obwiedni kół M o h r a)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1(1-k)}{2},$$

gdzie k jest współczynnikiem parcia w stanie spoczynku (T e r z a g h i używa terminu *Ruhedruckziffer*), $k = \sigma_1/\sigma_2$,

to

$$\gamma_{max} = \frac{T}{\eta} \frac{\sigma_1(1-k)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli mnożymy obie strony przez G^* , to otrzymujemy rzędne obwiedni kół M o h r a:

$$\tau = \frac{T}{\eta} G^* \frac{\sigma_1(1-k)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Wartości kątów tarcia wewnętrznego wzdłuż obwiedni kół M o h r a otrzymujemy z równania $\operatorname{tg} \varphi = \tau/\sigma$; jeżeli zamiast σ napiszemy σ_1 , to

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau}{\sigma_1} = \left[\frac{G^* T}{2} (1-k) \right] \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} = K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}}.$$

Jeżeli podstawimy tę wartość do wzoru czynnego lub biernego parcia ziemi, to wskutek tego prostego matematycznego zabiegu uzyskamy dwa ważne wyniki o znaczeniu fizycznym:

(a) eliminujemy kąt tarcia wewnętrznego i otrzymamy funkcję, w której występuje wartość lepkości (η), a więc parametr zmienny; wartości K i G^* w normalnych okolicznościach, w przypadku praktycznych, inżynierskich zagadnień, można uważać za stałe;

(b) na miejsce funkcji parcia ziemi w stanie sprężystym lub plastycznym — które były niezależne od czasu — wprowadzimy funkcję reologiczną, uwzględniającą zjawisko pełzania.

Wzory $K \acute{a} r m \acute{a} n a - N \acute{a} d \acute{a} i a$ dla czynnego lub biernego parcia ziemi po rozwinięciu funkcji tg^2 w szereg $T a y l o r a$ i wstawieniu wyżej obliczonej wartości φ przybiorą następującą postać:

$$E_a = \frac{\gamma h^2}{2} \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\gamma h^2}{8} \pi \left(\frac{\pi}{4} - \text{arc tg } K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} \right),$$

$$E_p = \frac{\gamma h^2}{2} \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\gamma h^2}{8} \pi \left(\frac{\pi}{4} + \text{arc tg } K \frac{1}{\eta} e^{t \frac{G^*}{\eta}} \right).$$

2.6. Na zakończenie pragniemy zwrócić uwagę na pewien szczególny przypadek zagadnienia murów oporowych, o którym, w oparciu o powyższe równanie reologiczne, można powiedzieć, że jest rozwiązany. Zdaje się, że opisana metoda jest pierwszą próbą rozwiązania tego zagadnienia; jej wartości praktycznej na razie nie można ocenić. Przy budowie murów oporowych zauważono, iż w pierwszych latach swego istnienia ich stateczność jest nienaganna, natomiast później — zwykle po 6-8 latach i głównie w przypadku gruntów gliniastych — pokazują się pęknięcia i zerwania. W tym okresie stateczność jest bardzo zagrożona. Metoda reologiczna wydaje się umożliwiać wzięcie w rachubę przy wymiarowaniu murów oporowych zmian stanu napięcia, powstałych wskutek pełzania, i w ten sposób zapewnić pożądaną stateczność.

Literatura cytowana w tekście

[1] J. B o u s s i n e s q, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre*, Paryż 1855.

[2] O. K. F r ö h l i c h, *Druckverteilung im Baugrunde*, Wiedeń 1934.

[3] W. P o g á n y, Kongr., Paryż 1952.

[4] C. C o u l o m b, *Essai sur une application de règle de maximum et minimum à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mém. Acad. Paryż 1766.

- [5] H. Müller-Breslau, *Erddruck auf Stützmauer*, Stuttgart 1906.
- [6] W. Pogány, *New Method of Determining Earth Pressure*, Civile Eng., Londyn 1951.
- [7] W. Rankine, *On the Stability of Loose Earth*, Londyn 1857.
- [8] T. Kármán, II Międz. Kongr., Zurych 1926.
- [9] A. Haar i T. Kármán, *Nachr. Wiss. Ges.*, Getynga 1909.
- [10] T. Kármán, *Über elastische Grenzzustände*, Zurych 1927.
- [11] A. Nádai, *Plastizität und Erddruck*, Handb. Physik., VI, Berlin 1928.
- [12] R. Mises, *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, Getynga 1913.
- [13] H. Umstätter, *Strukturmechanik*, Drezno 1948.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

Автор рассматривает две проблемы механики грунтов: (1), распределение напряжений под фундаментом и связанное с этим оседание фундаментов, а также (2), вопрос давления грунтов или подпорных стен. Кроме того, приводит краткую историю развития этих проблем.

(1) В классической физике (Ньютон, Лейбниц, Лагранж, Клапейрон) для значения напряжения получали выражение, по которому нулевое напряжение случается только на бесконечной глубине. Только лишь в 1885 году Буссинеск разработал первую математическую теорию, результаты которой более соответствуют действительности. На основании этой теории были созданы применимые в инженерной практике методы Штейнбреннера и Гефели. От Буссинеска происходит понятие «луковицы напряжений». Фрелих в 1934 г. вводит в формулы Буссинеска коэффициент концентрации.

Прандтль и его школа (Како, Резаль, Маар) рассматривают этот вопрос на основании теории пластичности и приводят формулы для единичной нагрузки в случаях сыпучих и связных грунтов; Терцаги же, Бендель и другие создают приближенные формулы на основании лабораторных исследований; эти формулы учитывают вещество грунта. Для оседания они получают дифференциальное уравнение, в котором выступает время. Таким образом, данное уравнение является уже реологическим уравнением. Герсеванов привел метод практического решения этого уравнения; метод Герсеванова был упрощен впоследствии Пентковским.

(2). Впервые вопросом давления грунтов занимался Кулон (1773), создавая формулу, являющуюся основой целого ряда графических методов (Кульман, Понселе, Ребханн, Винклер, Шили). В особенном случае Кулона — три силы, возникающие при под-

порной стене (вес призмы земли, находящейся между плоскостью стены и поверхностью скольжения, давление грунта и сила реакции), всегда имеют общую точку, но в общем — это не имеет места. Поэтому, Феллениус, Крей и Терцаги пытались устранить это противоречие, принимая кривую поверхность скольжения.

Автор приводит собственный экспериментальный метод (1951), который, с практической точки зрения, приводит к правильным значениям, хотя, с теоретической точки зрения, он не безупречен.

Ранкин, в 1857 году, для решения этой проблемы применяет теорию упругости. Его метод, с теоретической точки зрения, превосходит метод Кулона, но результаты в меньшей степени соответствуют действительности. Кеттер (1903), Райснер (1924) и Карман пытались поправить и углубить теорию Ранкина.

Реологический аспект этой проблемы, т. е. учет влияния времени, выступает уже в трудах Сен-Венана (1871 г.), однако систематические исследования в этой области производились только в последнее время (Г. Умштетер, 1948 г.). Основой этих исследований являются уравнения Максвелла (1868), учитывающие упругое и пластическое состояния. Таким образом, при функциональной трактовке давления грунтов, можно устранить угол внутреннего трения и получить функцию, в которой выступает вязкость, т. е. переменный параметр. Автор, в этом смысле, преобразовывает уравнения Кармана - Надаи для активного и пассивного давления грунта.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF SOIL MECHANICS

Two problems of soil mechanics are discussed: (1) the stress distribution under a foundation together with the resulting problem of foundation setting, and (2) the problem of soil pressure against a wall. A short historical account is given.

(1) Stress Distribution under a Foundation. In classical physics (Newton, Leibnitz, Lagrange, Clapeyron) an expression for stresses is obtained, according to which the stresses vanish only at infinite depth. The first mathematical theory was created by Boussinesq in 1885. It yielded results which were closer to reality and constituted a basis for the practical methods of Steinbrenner and Haeffeli. The notion of «stress bulb» also came from Boussinesq. In 1934 the concentration coefficient was introduced in Boussinesq's equations by Fröhlich.

P r a n d t l and his school (C a q u o t, R é s a l, M a a r) applied the theory of plasticity to the considered problem, and obtained equations for unit load in the cases of loose and cohesive soils. On the other hand, T e r z a g h i, B e n d e l and others introduced approximate formulae based on laboratory tests and taking into consideration the composition of the soil. They obtained a differential equation for foundation setting, in which time is represented. This is therefore a rheologic equation. A practical method of solution of this equation has been given by G h e r s e v a n o v and was simplified by P i e t k o w s k i.

(2) Soil Pressure. This problem was first treated by C o u l o m b (1773), who gave a formula constituting a basis for a series of graphical methods. (C u l m a n n, P o n c e l e t, R e b h a n n, W i n k l e r, S z i l y). In the special case considered by C o u l o m b the three forces appearing in the problem (weight of the prism of soil between the wall and the slip plane, soil pressure and reaction force) have always a common point of intersection, which is not true in general. An effort has been therefore made (F e l l e n i u s, K r e y, T e r z a g h i) to avoid this error by assuming a curved surface of slip. The author gives his own experimental method (1951), which in practice has proved to be useful although theoretically is not without reproach.

The theory of elasticity has been used in 1857 by R a n k i n e to solve the problem in question. This method, from the theoretical point of view, is better than that of C o u l o m b, the results, however, are rather inferior. K ö t t e r (1903), R e i s s n e r (1924) and K á r m á n tried to improve and to generalize the theory of R a n k i n e.

The rheological aspect of this problems was treated in S a i n t - V e n a n t's papers (1871), but systematic investigations have been undertaken only in recent times (H. U m s t ä t t e r, 1948). These investigations are based on M a x w e l l's equations (1868), which take into account the elastic and plastic state. In this manner the angle of internal friction of the soil can be eliminated and a function obtained in which viscosity is represented, this being a variable paramater. In this manner the author transforms the K á r m á n - N á d a i equations for active and passive soil pressure.