

ZBIGNIEW REIPERT

DRGANIA SWOBODNE I WYBOCZENIE PŁYTY TRÓJKĄTNEJ
WZMOCNIONEJ ŻEBRAMI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XCVIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Stateczność płyty trójkątnej wzmocnionej żebrem równoległym do jednej z przyprostokątnych	233
2. Pierwszy przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej	237
3. Drugi przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej	245
4. Trzeci przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej	248

Tematem pracy jest obliczenie stateczności płyty wzmocnionej żebrami o kształcie równoramiennej trójkąta prostokątnego. W części pierwszej rozpatrzono płytę trójkątną wzmocnioną żebrami równoległymi do jednej z przyprostokątnych, w drugiej natomiast płyty trójkątne wzmocnione żebrami przy ich szczególnym rozmieszczeniu.

Pracę oparto na sposobie obliczenia płyty trójkątnej podanej w książce S. Timoszenki, [1], na rozwiązaniach dotyczących drgań swobodnych i wybożenia płyty trójkątnej, uzyskanych przez Z. Kączkowskiego, [2], oraz na rozwiązaniach W. Nowackiego i A. Kacnera odnoszących się do płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami, [3] i [4].

1. Stateczność płyty trójkątnej wzmocnionej żebrami równoległymi do jednej z przyprostokątnych

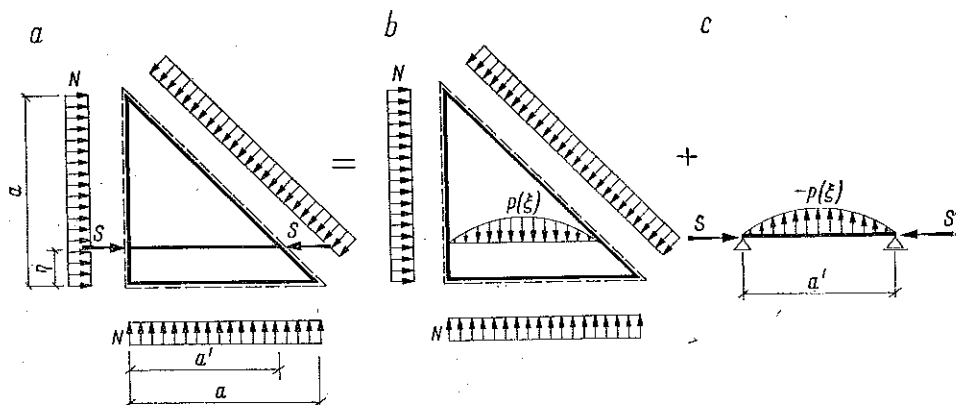
Dana jest płyta trójkątna izotropowa na brzegach swobodnie podparta, spoczywająca na sprężystym podłożu, wzmocniona żebrami równoległymi do jednego z przyprostokątnych boków, obciążona siłami normalnymi do brzegów równomiernie rozłożonymi wzdłuż boków płyty o natężeniu N mniejszymi od krytycznego N_{kr} . Żebro wzmacniające płytę umieszczone symetrycznie względem płaszczyzny środkowej płyty obciążone jest siłą S również mniejszą od krytycznej S_{kr} . Płyta znajdująca się w takim stanie obciążenia wykonuje drgania swobodne.

Celem niniejszej pracy jest obliczenie częstotliwości drgań własnych ustroju (płyty wzmocnionej żebrami), siły krytycznej ściskającej żebro oraz obciążenia krytycznego siłami normalnymi do brzegów (rys. 1a).

Płyta i żebro wzmacniające drgają z jednakową częstotliwością, również wychylenia ich są jednakowe. Chwilowy impuls nadaje płycie drgania, a równocześnie powoduje drgania żebra wskutek wzajemnego oddziaływania na siebie obu elementów rozważanego ustroju.

Oddziaływanie to można przedstawić jako siły pionowe będące funkcją zmiennej x i oznaczyć przez $p(x)$. Zakłada się przy tym, że między prętem i płytą nie powstają siły styczne. Płyta znajduje się zatem pod obciążeniem sił $p(x)$ na prostej $y = \eta$, a pręt jest zginany obciążeniem $-p(x)$ (rys. 1b i 1c).

Powierzchnię amplitud drgań płyty trójkątnej swobodnie podpartej na wszystkich trzech bokach określimy jako połowę powierzchni amplitud drgań płyty kwadratowej drgającej antysymetrycznie względem przekątnej.



Rys. 1

Powierzchnia amplitud drgań swobodnych płyty kwadratowej o boku a , swobodnie podpartej na obwodzie, spoczywającej na podłożu sprężystym jest obciążona na powierzchni obciążeniem

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin a_m x \sin a_n y$$

oraz ściskana równomiernie na obwodzie siłami N , może być przedstawiona w postaci

$$(1.1) \quad w(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin a_m x \sin a_n y,$$

gdzie

$$\Delta_{mn} = D(a_m^2 + a_n^2)^2 - N(a_m^2 + a_n^2) + K - \mu\omega^2$$

oraz gdzie $a_m = m\pi/a$.

We wzorach tych D oznacza sztywność walcową płyty, K współczynnik sprężystości podłoża, μ masę płyty na jednostkę powierzchni oraz ω częstotliwość drgań własnych.

Przy obciążeniu dwiema siłami $P = \pm 1$ działającymi antysymetrycznie względem przekątnej (rys. 2), tj. siłą $+1$ w punkcie (ξ_1, η_1) , zaś siłą -1 w punkcie $(a - \eta, a - \xi)$, amplitudę drgań (1.1) określa funkcja

$$w_0(x, y) = \frac{4}{a^2} \sum_m \sum_n [\sin a_m \xi \sin a_n \eta - (-1)^{m+n} \sin a_n \xi \sin a_m \eta] \times \frac{\sin a_m x \sin a_n y}{\Delta_{mn}}$$

która równocześnie jest powierzchnią amplitud drgań swobodnych płyty w kształcie równoramienneego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej a swobodnie podpartej na obwodzie.

Jeśli siły wzajemnego oddziaływania płyty trójkątnej i pręta wzdłuż prostej $y = \eta$ rozłożyć w szereg trygonometryczny

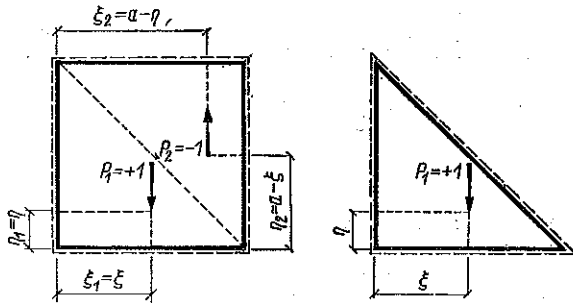
$$(1.2) \quad p(\xi) = \sum_k p_k \sin a'_k \xi,$$

gdzie

$$a'_k = \frac{k\pi}{a'}$$

oraz $a' = \pi a$

$$(k = 1, 2, 3, \dots),$$



Rys. 2

to amplituda drgań płyty trójkątnej obciążonej zgodnie z (1.2) może być określona następująco:

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) &= \int_0^{a'} p(\xi) w_0(x, y) d\xi = \\ &= \frac{4}{a^2} \sum_k \sum_m \sum_n p_k [A_{mk} \sin \alpha_n \eta - (-1)^{m+n} A_{nk} \sin \alpha_m \eta] \frac{\sin \alpha_m x \sin \alpha_n y}{\Delta_{mn}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A_{mk} = \int_0^{a'} \sin \alpha_m \xi \sin a'_k \xi d\xi = \frac{(-1)^k a'_k \sin \pi m \pi}{a_m^2 - a_k'^2}.$$

Funkcję tę możemy przedstawić w postaci

$$(1.3) \quad \bar{w}(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y,$$

gdzie

$$p_{mn} = \frac{4}{a^2} \left[\sin \alpha_n \eta \sum_k A_{mk} p_k - (-1)^{m+n} \sin \alpha_m \eta \sum_k A_{nk} p_k \right].$$

Z drugiej strony krzywa amplitud drgań swobodnych pręta o sztywności EI i masie μ na jednostkę długości, obciążonego prostopadle do osi

siłami — $p(\xi)$ i ściskanej siłą osiową S , może być określona za pomocą pojedynczego szeregu trygonometrycznego

$$(1.4) \quad v(x) = - \sum_r^{\infty} \frac{p_r}{\Delta_r} \sin a'_r x,$$

gdzie

$$\Delta_r = EI a'_r{}^4 - S a'_r{}^2 - \mu_1 \omega^2, \quad a'_r = \frac{r\pi}{a}, \quad a' = \kappa a \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Wzdłuż prostej $y = \eta$ powinno być

$$\bar{w}(x, \eta) = v(x),$$

a więc na podstawie (1.3) i (1.4)

$$(1.5) \quad \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{p_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \alpha_n \eta \sin \alpha_m x = - \sum_r^{\infty} \frac{p_r}{\Delta_r} \sin a'_r x.$$

Mnożąc (1.5) obustronnie przez $\sin a'_k x$ i całkując w granicach od $x=0$ do $x=a'$ otrzymamy

$$\sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} A_{mr} \frac{p_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \alpha_n \eta = - \frac{a'}{2} \frac{p_r}{\Delta_r}$$

lub

$$(1.6) \quad \frac{p_r}{\Delta_r} + \frac{8}{\kappa a^3} \sum_k^{\infty} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} p_k A_{mr} \frac{\sin \alpha_n \eta}{\Delta_{mn}} [A_{mk} \sin \alpha_n \eta - (-1)^{m+n} A_{nk} \sin \alpha_m \eta] = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$F_{rk} = \frac{8}{\kappa a^3} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} A_{mr} \frac{\sin \alpha_n \eta}{\Delta_{mn}} [A_{mk} \sin \alpha_n \eta - (-1)^{m+n} A_{nk} \sin \alpha_m \eta]$$

i zapiszemy warunek (1.6) krócej:

$$(1.7) \quad \frac{p_r}{\Delta_r} + \sum_k^{\infty} p_k F_{rk} = 0.$$

Układ równań jednorodnych (1.7) posiada rozwiązania niezerowe, jeśli jego wyznacznik równa się zero. Przyrównanie do zera wyznacznika układu (1.7) daje warunek, z którego może być wyznaczona poszukiwana częstość drgań własnych układu, tj. płyty trójkątnej wzmocnionej żebrami.

Przy pewnej krytycznej wartości siły S ściskającej żebro lub przy pewnej wartości krytycznej obciążenia N płyta wyprowadzona z położenia równowagi nie będzie wykonywać drgań, lecz wyboczy się. Siłę kry-

tyczną S_{kr} lub obciążenie krytyczne N_{kr} obliczyć można z przyrównania do zera wyznacznika układu (1.7), w którym wobec $\omega = 0$ należy przyjąć

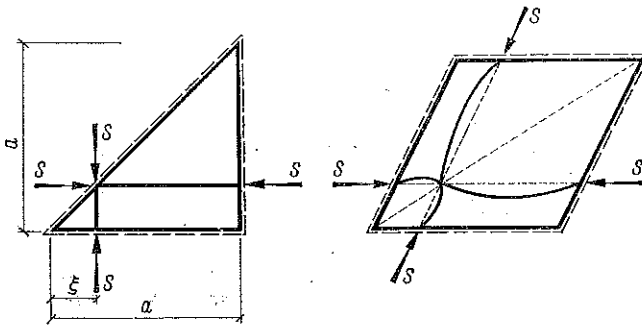
$$\bar{\Delta}_r = EI a'_r{}^4 - S a'_r{}^2,$$

$$\bar{\Delta}_{mn} = D(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - N(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) + K.$$

Warunek $p_k = 0$ we wzorze (1.7) oznacza brak oddziaływania żebra na płytę. Żebro wykonuje drgania niezależnie od płyty. Jeśli przyjąć we wzorze (1.7), że $p_r = 0$, to otrzymamy przypadek drgań płyty trójkątnej znajdującej się pod obciążeniem zewnętrznym, rozpatrzony w pracy Z. Kączkowskiego, [2].

2. Pierwszy przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej

Dana jest płyta w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego swobodnie podparta na trzech bokach, wzmocniona dwoma żebrami prostopadłymi do siebie a równoległymi do boków przyprostokątnych i zbiegającymi się na przeciwprostokątnej. Żebra wzmocniające są obciążone siłami S . Należy wyznaczyć siłę krytyczną (rys. 3).



Rys. 3

W celu rozwiązania naszego zadania rozpatrzmy płytę kwadratową wzmocnioną dwoma żebrami przecinającymi się na przekątnej, której nadano taki impuls, że odpowiadające sobie punkty płyty i żeber położone symetrycznie względem przekątnej wychylają się w przeciwnych kierunkach o jednakowe wielkości. Ugięcie płyty i żeber na przekątnej jest równe zero. Ugięcia żeber I-I i II-II są jednakowe co do bezwzględnej wartości, lecz o znakach przeciwnych. Po oddzieleniu płyty od żeber ich wzajemne oddziaływanie przedstawia się jako obciążenie ciągłe, a wzajemne oddziaływanie żeber w punkcie przecięcia się na przekątnej zastąpiono siłą P (rys. 4). Funkcje określające powyższe obciążenia wyrażono następującymi szeregami trygonometrycznymi:

oddziaływanie żebra II-II

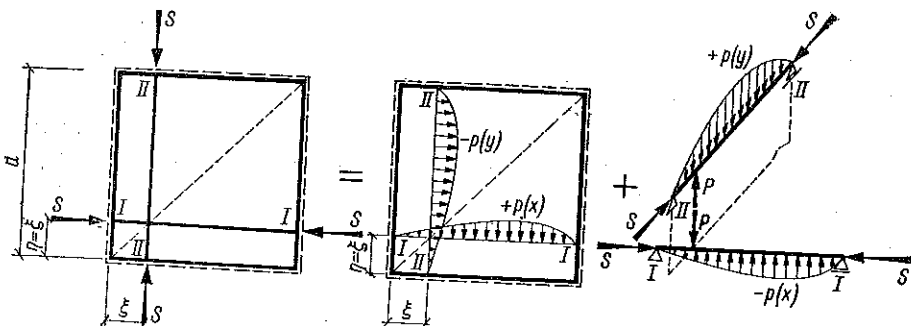
$$p_y(x, y) = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin a_m \xi \sin a_m x \sin a_n y;$$

oddziaływanie żebra I-I

$$p_x(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m \sin a_n \xi \sin a_m x \sin a_n y;$$

oddziaływanie żeber I-I i II-II

$$p(x, y) = p_x(x, y) + p_y(x, y).$$



Rys. 4

Amplitudę drgań przy obciążeniu $p(x, y)$ określa funkcja

$$w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi}{\Delta_{mn}} \sin a_m x \sin a_n y,$$

gdzie

$$\Delta_{mn} = D(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - N(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) - \mu \omega^2.$$

Amplitudy wzdłuż prostej $y = \xi$ są następujące:

$$(2.1) \quad w(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi) \sin a_n \xi}{\Delta_{mn}} \sin a_m x.$$

Oddziaływanie płyty i siły P na żebro I-I wynosi odpowiednio

$$p_x(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin a_m x,$$

$$q_x(x) = \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin a_m \xi \sin a_m x,$$

a krzywa amplitud żebra I-I określona jest równaniem

$$(2.2) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m - \frac{2P}{a} \sin a_m \xi}{\Delta_m} \sin a_m x,$$

gdzie

$$(2.3) \quad \Delta_m = EI a_m^4 - S a_m^2 - \mu_1 \omega^2.$$

W punkcie $x = \xi$ wychylenia żebra są równe zeru, ponadto wychylenia żebra są równe wychyleniom płyty wzdłuż $y = \xi$. Stąd z przyrównania wyrażenia (2.2) dla $x = \xi$ do zera oraz z przyrównania (2.1) i (2.2) otrzymano warunki zgodności odkształceń:

$$(2.4) \quad - \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m} + \sum_{m=1}^{\infty} p_m \frac{\sin a_m \xi}{\Delta_m} = 0,$$

$$(2.5) \quad \frac{2P}{a} \frac{\sin a_m \xi}{\Delta_m} - p_m \left(\frac{1}{\Delta_m} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{\Delta_{mn}} \right) + \frac{2}{a} \sin a_m \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \sin a_n \xi}{\Delta_{mn}} = 0.$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$(2.6) \quad \frac{2P}{a} = P_0, \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m} = - \frac{\sin^2 a_1 \xi}{\Delta_1} - C_0 = G_0,$$

gdzie

$$(2.7) \quad C_0 = - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m};$$

$$(2.8) \quad - \frac{1}{\Delta_m} - \left(\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{\Delta_{mn}} - \frac{2}{a} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_{mm}} \right) = \\ = - \frac{1}{\Delta_m} - C_m = G_m + \frac{2}{a} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_{mm}} = \bar{G}_m,$$

gdzie

$$G_m = - \frac{1}{\Delta_m} - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{\Delta_{mn}}.$$

Związki (2.4) oraz (2.5) mogą być potraktowane jako nieskończony układ równań o macierzy:

$$(2.9) \quad \left[\begin{array}{cccc} \frac{\sin^2 a_1 \xi}{\Delta_1} - C_0 & \frac{\sin a_1 \xi}{\Delta_1} & \frac{\sin a_2 \xi}{\Delta_2} & \dots \\ \frac{\sin a_1 \xi}{\Delta_1} & - \frac{1}{\Delta_1} - C_1 & \frac{2}{a} \frac{\sin a_1 \xi \sin a_2 \xi}{\Delta_{12}} & \dots \\ \frac{\sin a_2 \xi}{\Delta_2} & \frac{2}{a} \frac{\sin a_2 \xi \sin a_1 \xi}{\Delta_{21}} & - \frac{1}{\Delta_2} - C_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right].$$

Poszukiwaną częstotliwość drgań własnych rozważanego ustroju wyznaczyć można przyrównując do zera wyznacznik układu równań o macierzy (2.9). Wartość siły krytycznej S , przy której następuje wyboczenie żebra, otrzymuje się z powyższej macierzy, jeśli podstawimy $\omega = 0$ oraz jeśli przyrównamy wyznacznik do zera.

Dla określenia przybliżonej wartości siły krytycznej przyjęto następujący warunek:

$$(2.10) \quad \begin{vmatrix} -\frac{\sin^2 a_1 \xi}{\Delta_1} - C_0 & \frac{\sin a_1 \xi}{\Delta_1} \\ \frac{\sin a_1 \xi}{\Delta_1} & -\frac{1}{\Delta_1} - C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wielkość C_0 wyraża się zgodnie ze wzorem (2.7) następującą sumą przy założeniu $\omega = 0$:

$$(2.11) \quad C_0 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m} = \frac{a^4}{\pi^4 EI} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{m^2} \frac{1}{m^2 - B},$$

gdzie

$$B = \frac{a^2}{\pi^2 EI} S.$$

Ułamek znajdujący się pod znakiem sumy $1/(m^2 - B)$ można wyrazić szeregiem potęgowym, który otrzymuje się wykonując zwykłe dzielenie:

$$\frac{1}{m^2 - B} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} B + \frac{1}{m^6} B^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{m^{2(k+1)}}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (2.11) otrzymamy

$$(2.12) \quad C_0 = \frac{a^4}{\pi^4 EI} \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k,$$

gdzie

$$a_k = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{m^{2(k+2)}}.$$

Szereg występujący w (2.12) ze względów praktycznych wyrażono w postaci ułamka, którego mianownik stanowi szereg potęgowy

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k B^k}.$$

Współczynniki szeregu występującego w mianowniku otrzymuje się również wykonując dzielenie przez wielomian. Okazuje się, że dla wartości

$aD/EI < 1,5$ ($B < 10$), a z takim mamy tu do czynienia, szereg ten z wystarczającą dokładnością dla obliczeń praktycznych można zastąpić dwoma wyrazami. Przyjmujemy więc

$$(2.13) \quad C_0 \approx \frac{a^4}{\pi^4 EI} \frac{1}{b_0 + b_1 B}.$$

Wartości C_0 wyliczone ze wzoru (2.13) różnią się od wartości dokładnych (2.12) o 3%, a różnica ta jest tym mniejsza, im mniejszy jest stosunek aD/EI . Stąd ze wzoru (2.10) po uwzględnieniu (2.13) oraz (2.3) przy $\omega = 0$ mamy

$$\frac{1}{C_1} + EI \frac{\pi^4}{a^4} \left(b_0 + S b_1 \frac{a^2}{EI \pi^2} \right) \sin^2 \alpha_1 \xi + EI \frac{\pi^4}{a^4} - S \frac{\pi^2}{a^2} = 0.$$

Wzór na wartość siły krytycznej powodującej wyboczenie rozpatrywanego ustroju jest następujący:

$$(2.14) \quad S_{kr} = \frac{EI \pi^2}{a^2} \frac{1 + b_0 \sin^2 \alpha_1 \xi}{1 - b_1 \sin^2 \alpha_1 \xi} + \frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{C_1} \frac{1}{1 - b_1 \sin^2 \alpha_1 \xi},$$

gdzie C_1 obliczymy z (2.8) dla $m = 1$.

W przypadku gdy odcinek ξ stanowi pewną wielokrotność boku płyty, tj. gdy $\xi/a = 1/r$, gdzie $r = 2, 3, 4, 5, \dots$ dla $m/r = k = 1, 2, 3, \dots$, mamy $\sin \alpha_m \xi = 0$.

Wówczas wyznacznik (2.9) przyjmie postać

$$W = \begin{vmatrix} G_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{m-1} & 0 & f_{m+1} & \cdots \\ f_1 & \bar{G}_1 & f_{12} & \cdots & f_{1(m-1)} & 0 & f_{1(m+1)} & \cdots \\ f_2 & f_{21} & \bar{G}_2 & \cdots & f_{2(m-1)} & 0 & f_{2(m+1)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m-1} & f_{(m-1)1} & f_{(m-1)2} & \cdots & \bar{G}_{(m-1)(m-1)} & 0 & f_{(m-1)(m+1)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{G}_m & 0 & \cdots \\ f_{m+1} & f_{(m+1)1} & f_{(m+1)2} & \cdots & f_{(m+1)(m-1)} & 0 & \bar{G}_{(m+1)(m+1)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie G_0 i \bar{G}_m określają wzory (2.6) i (2.8) oraz gdzie

$$f_m = \frac{\sin \alpha_m \xi}{\Delta_m}, \quad f_{mn} = \frac{2}{a} \frac{\sin \alpha_m \xi \sin \alpha_n \xi}{\Delta_{mn}}.$$

W m -tej kolumnie i w m -tym szeregu wszystkie wyrazy poza wyrazem na przekątnej są równe zero.

Obliczony wyznacznik stanowi iloczyn wyrazu \bar{G}_m przez odpowiadający mu podwyznacznik $|W_m|$. Ponieważ zaś w tym przypadku $\bar{G}_m = G_m$, za-

tem $W = G_m |W_m| = 0$, a stąd $G_m = 0$ lub $|W_m| = 0$ w przypadku gdy $m/r = k$.

Rozwiązanie równania $|W_m| = 0$ dla $\omega = 0$ daje najmniejszą wartość siły krytycznej, gdy wyboczenie prętów i płyty ma postać przedstawioną na rys. 4. Rozwiązanie i wynik jest taki sam jak podano wyżej [wzór (2.14)].

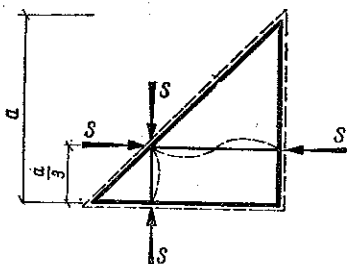
Z równania $G_m = 0$ można wyznaczyć wartości siły krytycznej wyższego rzędu wywołujące wyboczenia przedstawione na rys. 5. Równanie to ma postać

$$\frac{1}{EI a_m^4 - S a_m^2 - \mu_1 \omega^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{D(a_m^2 + a_n^2)^2 - N(a_m^2 + a_n^2) - \mu \omega^2} = 0,$$

przy czym $\omega = 0$, $\xi = k(a/m)$ oraz

$$S = \frac{m^2 \pi^2 EI}{a^2} + \frac{\pi^2 D}{m^2 2a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{n}{m} \pi}{(m^2 + n^2)^2 - \frac{N}{D} \frac{a^2}{\pi^2} (m^2 + n^2)} \right]^{-1}$$

Przykład 1. Obliczenie wartości siły krytycznej wyboczającej zebro, wzmacniające płytę przy $\xi = a/3$ i $N = 0$.



Rys. 5

Najmniejsza wartość siły krytycznej obliczona na podstawie wzoru (2.14) wynosi

$$S_{kr} = \frac{EI \pi^2}{(0,532 a)^2} + 3,33 \frac{\pi^2}{a} D.$$

Przykład 2. Rozpatrzmy przypadek dwóch prostokątnych żebrow przycinających się w środku przekątnej, gdy $\xi = a/2$.

W danym przypadku postępując jak wyżej zauważymy, że warunki zgodności odkształceń (2.4) i (2.5) upraszczają się do następującego równania otrzymanego z (2.5):

$$(2.15) \quad \frac{1}{\Delta_m} + \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{\Delta_{mn}} = 0.$$

Ponieważ postać wyboczenia żebrow wzmacniających o rozpiętości a jest antysymetryczna, ugięcia ich w środku rozpiętości są równe zero. Nie występuje też siła wzajemnego oddziaływania między żebrow (P = 0). Obciążenia płyty wynikające z oddziaływania żebrow są antysymetryczne i powodują antysymetryczną postać odkształcenia płyty (stąd wynika np., że obciążenie $p_y(x, y)$ nie powoduje ugięcia wzdłuż $y = a/2$, tj. wzdłuż zebra poziomego).

Da $m = 2$ i $N = 0$ wyrażenie (2.15) przyjmie postać

$$(2.16) \quad -\frac{1}{EI a_2^4 - S a_2^2 - \mu_1 \omega^2} = \frac{2a^3}{D\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2^2 + n^2)^2 - A},$$

gdzie

$$A = \frac{a^4}{D\pi^4} \mu \omega^2.$$

W powyższym równaniu wielkością nie znaną jest częstotliwość drgań własnych ustroju ω , której wyznaczenie jest naszym zadaniem. Sumę szeregu występującego po prawej stronie obliczono podobnie jak sumę szeregu (2.11) ograniczając wynik również do kilku wyrazów:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4 + n^2)^2 - A} \approx \frac{1}{20,9 - 0,712A - 0,00378A^2}.$$

Przy założeniu $\omega = 0$ powyższa suma wynosi dla $m = 2$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4 + n^2)^2} = \frac{\pi}{8m^3} \frac{\operatorname{sh} m\pi - m\pi}{\operatorname{ch} m\pi + 1} \approx \frac{1}{20,9}.$$

Dla obliczenia przybliżonej wartości ω przyjęto

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4 + n^2)^2 - A} \approx \frac{1}{20,9 - 0,712A}.$$

Po podstawieniu tej wartości do równania (2.16) znajdziemy

$$-\frac{1}{EI a_2^4 - S a_2^2 - \mu_1 \omega^2} = \frac{2a^3}{D\pi^4} \frac{1}{20,9 - 0,712A}.$$

Z powyższego równania wyznaczono ω dla pierwszego przybliżenia:

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{0,356 a \mu + \mu_1}} \sqrt{10,45 \frac{D\pi^4}{a^3} + EI a_2^4 - S a_2^2}.$$

Dla obliczenia dokładniejszej przybliżonej wartości ω przyjęto wartość przybliżoną sumy

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4 + n^2)^2 - A} \approx \frac{1}{20,9 - 0,712A - 0,00378A^2}.$$

Po podstawieniu do równania (2.16) otrzymano równanie dwukwadratowe

$$(2.17) \quad \zeta \omega^4 + \rho \omega^2 + \gamma = 0,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\zeta = 0,00189 \frac{a^5}{D\pi^4} \mu^2,$$

$$\varrho = 0,356 a\mu + \mu_1,$$

$$\gamma = -EI\alpha_2^4 + S\alpha_2^2 - 10,45 \frac{D\pi^4}{a^3}.$$

Poszukiwana częstotliwość drgań własnych ω jest równa rzeczywistemu dodatniemu pierwiastkowi powyższego równania. Częstotliwość drgań własnych ω można otrzymać na drodze kolejnych przybliżeń. Np. obliczoną wartość $\omega^{(1)}$ z pierwszego przybliżenia należy podstawić do równania dwukwadratowego (2.17) zamiast ω występującego w czwartej potędze.

Przy wzroście siły S do wartości krytycznej następuje zanikanie wahań względem pozycji wyjściowej, częstotliwość drgań własnych ω dąży do zera i następuje wyboczenie. Przyjmując $\omega = 0$ dla $m = 2$ z równania (2.15) otrzymano następujący warunek, z którego wyznaczono wartość siły krytycznej:

$$(2.18) \quad -\frac{1}{EI\alpha_2^4 - S\alpha_2^2} = \frac{2a^3}{D\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4+n^2)^2 - (4+n^2)A_1},$$

gdzie

$$A_1 = \frac{N}{D} \frac{a^2}{\pi^2}.$$

Sumę szeregu występującego po prawej stronie obliczono podobnie jak sumę szeregu (2.11) ograniczając wynik do kilku wyrazów:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^m \frac{1}{(4+n^2)} \frac{1}{(4+n^2) - A_1} \approx \frac{1}{20,9 - 3,72A_1 - 0,0376A_1^2}.$$

Po podstawieniu do równania (2.18) otrzymano warunek

$$(2.19) \quad 10,45 \frac{D\pi^4}{a^3} + EI\alpha_2^4 - S\alpha_2^2 - 1,86 N \frac{\pi^2}{a} - 0,0188 \frac{N^2}{D} a = 0.$$

Z warunku powyższego wyznaczono siłę i obciążenie krytyczne. Siła krytyczna S_{kr} ściskająca pręt i powodująca wyboczenie całego ustroju wynosi

$$(2.20) \quad S_{kr} = \frac{4\pi^2}{a^2} EI + 2,61 \frac{D\pi^3}{a} - 0,465 Na - 0,0047 N^2 \frac{a^3}{D\pi^2},$$

a obciążenie krytyczne N_{kr} działające w płaszczyźnie płyty i powodujące wyboczenie całego ustroju (pierwsze przybliżenie)

$$N_{kr} = \frac{8,6\pi^2}{a^3} EI + 5,62 \frac{D\pi^2}{a^2} - 2,15 \frac{S}{a}.$$

Dla otrzymania dokładniejszej wartości N_{kr} należy rozwiązać równanie dwukwadratowe.

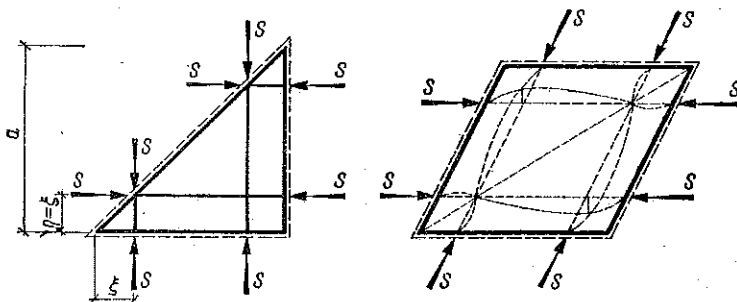
Jeśli przyjąć we wzorze (2.19) $EI = 0$, to obciążenie krytyczne działające w płaszczyźnie płyty, powodujące wyboczenie płyty trójkątnej wyniesie

$$N_{kr} \approx 5,15 \frac{D\pi^2}{a^2},$$

gdy tymczasem wynik ścisły $N_{kr} = 5D\pi^2/a^2$ (porównaj [2], s. 16).

3. Drugi przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej

Dana jest płyta w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego swobodnie podparta na trzech bokach. Jest ona wzmocniona czterema żebrami równoległymi do boków przyprostokątnych (rys. 6). Na żebra wzmocniające płytę działają siły S . Należy wyznaczyć siłę krytyczną.



Rys. 6

Najpierw rozpatrzono płytę kwadratową wzmocnioną czterema żebrami przecinającymi się na przekątnych. Pod wpływem impulsu nastąpiło wychylenie antysymetryczne odpowiadających sobie punktów płyty i żeber symetrycznie położonych względem przekątnej, której ugięcie jest równe zero. Odkształcenia żeber są jednakowe i odpowiadają ugięciom płyty. Ugięcia żeber przecinających się poza przekątną wyżej wspomnianą są takie same co do wartości i kierunku. W takim punkcie między żebrami nie występuje wzajemne oddziaływanie. Po oddzieleniu płyty od żeber ich wzajemne oddziaływanie wyrażono jako obciążenie ciągłe, a wzajemne oddziaływanie żeber w punktach przecięcia się ich na przekątnej zastąpiono siłą P (rys. 7). Obciążenie działające na płytę i żebra oraz siłę P działającą na żebra przedstawiono za pomocą szeregów trygonometrycznych w następujący sposób:

obciążenie płyty wzdluz zebel I-I i II-II

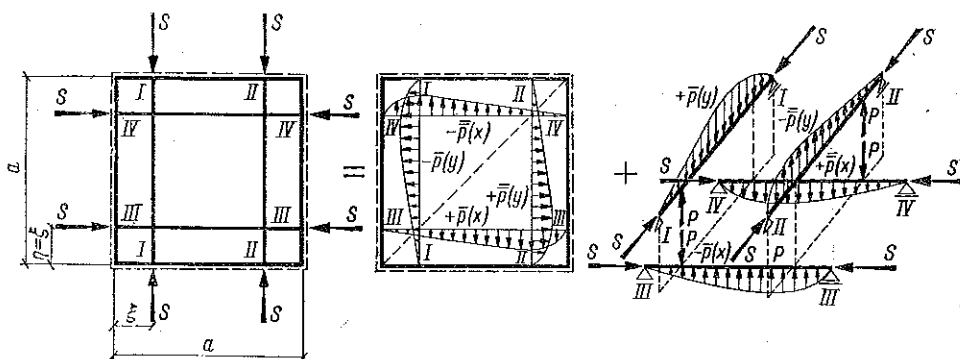
$$\bar{p}_y(x, y) = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin a_m \xi \sin a_m x \sin a_n y,$$

$$\bar{\bar{p}}_y(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin a_m \xi (-1)^{n+m} \sin a_m x \sin a_n y;$$

obciążenie płyty wzdluz zebel III-III i IV-IV

$$\bar{p}_x(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m \sin a_n \xi \sin a_m x \sin a_n y,$$

$$\bar{\bar{p}}_x(x, y) = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m \sin a_n \xi (-1)^{n+m} \sin a_m x \sin a_n y.$$



Rys. 7

Amplitudę drgań płyty od powyższego obciążenia wzdluz zebel I-I, II-II, III-III i IV-IV określa funkcja

$$w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi}{\Delta_{mn}} [1 - (-1)^{n+m}] \sin a_m x \sin a_n y,$$

gdzie

$$\Delta_{mn} = D(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - \mu\omega^2.$$

Ugięcia wzdluz prostej $y = \xi$

$$(3.1) \quad w(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi}{\Delta_{mn}} \times \\ \times [1 - (-1)^{n+m}] \sin a_n \xi \sin a_m x.$$

Obciążenie żebra III-III ($y = \xi$) złożone z obciążenia ciągłego i siły P określają funkcje

$$\bar{p}_x(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin a_m x,$$

$$q_x(x) = \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin a_m \xi \sin a_m x.$$

Ugięcia żebra od obciążenia ciągłego i od siły P wynosi

$$(3.2) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m - \frac{2P}{a} \sin a_m \xi}{\Delta_m} \sin a_m x,$$

gdzie

$$\Delta_m = EI a_m^4 - S a_m^2 - \mu_1 \omega^2.$$

W punkcie $x = \xi$ wychylenie żebra jest równe zeru, ponadto wzdłuż $y = \xi$ wychylenia żebra są równe wychyleniom płyty. Stąd z przyrównania ugięcia (3.2) dla $x = \xi$ do zera oraz z warunku równości ugięć (3.1) i (3.2) otrzymano warunki zgodności odkształceń. Postępując następnie podobnie jak w p. 2 wyznaczono najmniejszą wartość siły krytycznej powodującej wyboczenie ustroju. Jest ona równa

$$(3.3) \quad S_{kr} = \frac{EI \pi^2}{a^2} \frac{1 + b_0 \sin^2 a_1 \xi}{1 - b_1 \sin^2 a_1 \xi} + \frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{C_1} \frac{1}{1 - b_1 \sin^2 a_1 \xi},$$

gdzie

$$C_1 = \frac{2a^3}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi [1 + (-1)^n]}{(1 + n^2)^2},$$

$$C_0 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m} \approx \frac{a^4}{EI \pi^4} \frac{1}{b_0 + b_1 B}.$$

W przypadku gdy odcinek ξ stanowi pewną wielokrotną część boku płyty jak w p. 2, wyznaczono wartość siły krytycznej wyższego rzędu:

$$S_{kr} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} EI + \frac{\pi^2}{m^2} \frac{D}{2a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{n}{m} \pi}{(m^2 + n^2)^2} [1 - (-1)^{m+n}] \right\}^{-1}.$$

Przykład 3. Obliczymy wartości siły krytycznej powodującej wyboczenia żebra wzmacniającego płytę przy $\xi = a/3$.

Najmniejsza wartość siły krytycznej na podstawie wzoru (3.3) wynosi

$$S_{kr} = \frac{EI \pi^2}{(0,532a)^2} + 1,71 \frac{D \pi^2}{a}.$$

Przykład 4. Obliczmy wartości siły krytycznej powodującej wybo-
czenie żebra wzmacniającego płytę przy $\xi = a/2$.

Mamy więc przypadek dwóch prostopad-
łych podwójnych żeber przecinających się
w środku (rys. 8).

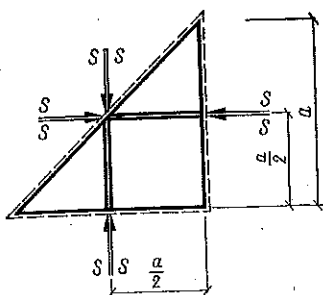
Siła krytyczna wynosi na podstawie wzo-
ru (3.3)

$$S_{kr} = \frac{4\pi^2}{a^2} EI_1 + 1,305 \frac{D\pi^2}{a}.$$

Dla żebra pojedynczego, gdy $I = 2I_1$, mamy

$$\bar{S}_{kr} = \frac{4\pi^2}{a} EI + 2,61 \frac{D\pi^2}{a}$$

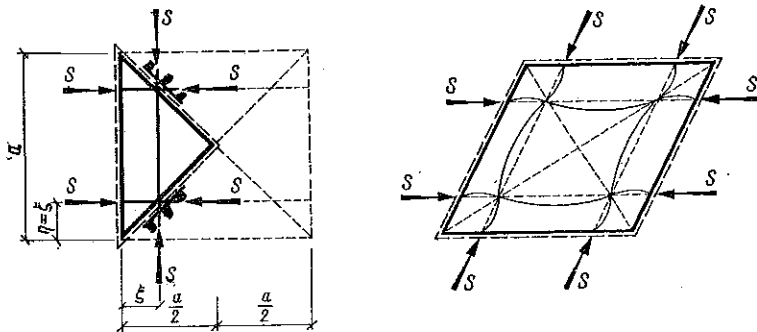
[por. (2.20) dla $N = 0$].



Rys. 8

4. Trzeci przypadek wzmocnienia żebrami płyty trójkątnej

Dana jest płyta w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego
swobodnie podparta na trzech bokach oraz wzmocniona żebrami (rys. 9).
Żebra wzmacniające płytę stanowią belki w jednym końcu swobodnie pod-
parte, w drugim końcu w punkcie ich styku sprężyste utwierdzone poza
płytą. Żebra wzmacniające płytę są ściskane siłami S . Należy obliczyć
siłę krytyczną, przy której następuje wybočenje płyty.



Rys. 9

Rozpatrzmy najpierw płytę kwadratową wzmocnioną czterema żebra-
mi przecinającymi się na przekątnych i obciążonych siłami S . Płycie na-
dano impuls powodujący wychylenia punktów płyty łącznie z żebrami,
przy czym przesunięcia odpowiadających sobie punktów żeber poziomych
i pionowych są równe co do wielkości bezwzględnej, a różne co do znaku.

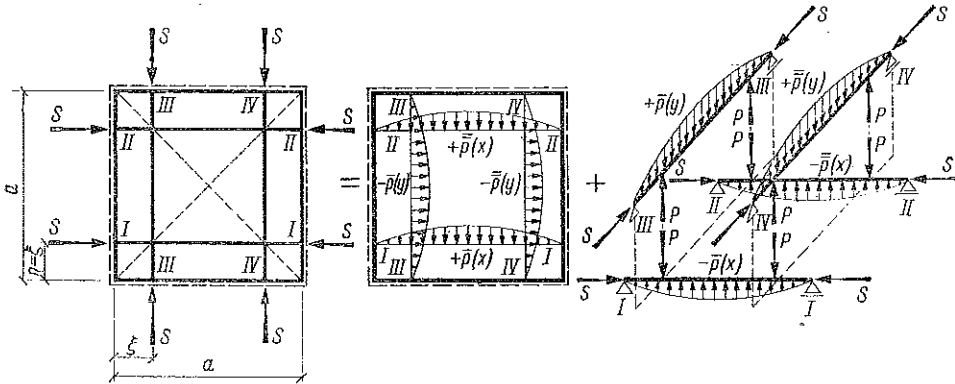
Przy takim stanie wychyleń punktów płyty punkt środkowy oraz punk-
ty położone na przekątnych płyty pozostają nieruchome. Wzajemne od-

działanie żeber na płytę i płyty na żebra przedstawiono jako obciążenie ciągłe, a wzajemne oddziaływanie krzyżujących się żeber przez siły P (rys. 10). Obciążenie płyty wzdłuż prostych wyrażono podwójnymi szeregami trygonometrycznymi w sposób następujący:

obciążenie płyty od oddziaływania żeber I-I i II-II ($y_1 = \xi$, $y_2 = a - \xi$)

$$\bar{p}_x(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m \sin a_n \xi \sin a_m x \sin a_n y,$$

$$\bar{p}_x(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m (-1)^{n+1} \sin a_n \xi \sin a_m x \sin a_n y;$$



Rys. 10

obciążenie płyty od oddziaływania żeber III-III i IV-IV ($x_1 = \xi$, $x_2 = a - \xi$)

$$\bar{p}_y(x, y) = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} p_n \sin a_m \xi \sin a_m x \sin a_n y,$$

$$\bar{p}_y(x, y) = -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} p_n (-1)^{m+1} \sin a_m \xi \sin a_m x \sin a_n y;$$

obciążenie płyty od żeber I-I, II-II, III-III i IV-IV

$$p(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 2, 3}^{\infty} \left\{ p_m [1 - (-1)^n] \sin a_n \xi - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} p_n [1 - (-1)^m] \sin a_m \xi \right\} \sin a_m x \sin a_n y.$$

Amplitudę drgań przy obciążeniu określa funkcja

$$w(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi}{\Delta_{mn}} \sin a_m x \sin a_n y,$$

gdzie

$$\Delta_{mn} = D(a_m^2 + a_n^2)^2 - \mu\omega^2.$$

Amplituda wzdłuż prostej $y_1 = \xi$ wynosi

$$(4.1) \quad w(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(p_m \sin a_n \xi - p_n \sin a_m \xi) \sin a_n \xi}{\Delta_{mn}} \sin a_m x.$$

Obciążenie żebra I-I od oddziaływania płyty określa funkcja

$$\bar{p}_x(x) = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} p_m \sin a_m x,$$

a od sił skupionych P funkcja

$$q_x(x) = \frac{2P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} [1 - (-1)^m] \sin a_m \xi \sin a_m x.$$

Amplituda żebra wynosi

$$(4.2) \quad \bar{w}(x) = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{p_m - \frac{4P}{a} \sin a_m \xi}{\Delta_m} \sin a_m x,$$

gdzie

$$\Delta_m = EI a_m^4 - S a_m^2 - \mu_1 \omega^2.$$

W punkcie $x = \xi$ i $x = a - \xi$ wychylenia żebra są równe zero, ponadto wychylenia żebra są równe wychyleniom płyty wzdłuż prostej $y_1 = \xi$. Stąd z przyrównania (4.2) (dla $x = \xi$) do zera oraz z przyrównania (4.1) do (4.2) otrzymano warunki zgodności odkształceń. Postępując następnie podobnie jak w p. 2 wyznaczono najmniejszą wartość siły krytycznej powodującej wyboczenie ustroju. Jest ona równa

$$(4.3) \quad S_{kr} = \frac{EI\pi^2}{a^4} \frac{1 + b_0 \sin^2 a_1 \xi}{1 - b_1 \sin^2 a_1 \xi} + \frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{C_1} \frac{1}{1 - b_1 \sin^2 a_1 \xi},$$

gdzie

$$C_1 = \frac{4a^3}{D\pi^4} \left[\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_n \xi}{(1+n^2)^2} - \frac{\sin^2 a_1 \xi}{4} \right],$$

$$C_0 = \sum_{m=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{\sin^2 a_m \xi}{\Delta_m} \approx \frac{a^4}{EI\pi^4} \frac{1}{b_0 + b_1 B}.$$

Przykład 5. Dla $\xi = a/3$

$$S_{kr} = \frac{EI\pi^2}{(0,582l)^2} + 9,43 \frac{D\pi^2}{a},$$

gdzie $l = a/3$.

Żebra wzmacniające płytę stanowią belki częściowo zamocowane na jednej z podpór poza płytą.

Przykład 6. Dla $\xi = a/2$ (żebro podwójne, rys. 11)

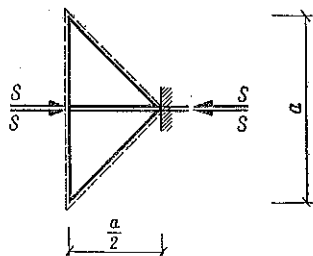
$$S_{kr} = \frac{EI_1 \pi^2}{(0,699l)^2} + 2,09 \frac{D\pi^2}{a}.$$

Przy zastosowaniu żebra pojedynczego, gdzie $I = 2I_1$, znajdziemy

$$S_{kr} = \frac{EI\pi^2}{(0,699l)^2} + 4,18 \frac{D\pi^2}{a},$$

gdzie $l = a/2$.

Żebro wzmacniające płytę stanowi belkę w jednym końcu swobodnie podpartą, a w drugim końcu przy wierzchołku kąta prostego utwierdzoną poza płytą.



Rys. 11

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, 1940.
 [2] Z. Kączkowski, *Drgania swobodne i wyboczenia płyty trójkątnej*, Arch. Mech. Stos. 1 (1956).
 [3] W. Nowacki, *Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. Stos. 2 (1954).
 [4] W. Nowacki i A. Kasner, *Stateczność rusztów wzmocnionych płytą*, Arch. Inż. Łąd. 1 (1955).

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ

В первой части работы рассматривается треугольная, изотропная пластинка, свободно опертая и расположенная на упругом основании. Пластинка подкреплена ребром, параллельным к одному из катетов, находится под влиянием продольных сил, распределенных равномерно вдоль сторон. Стержень подкрепляющий пластинку, находится под действием силы S (рис. 1а). Взаимное воздействие ребра на пластинку заменяется сплошной нагрузкой $p(x)$. Функцию $p(x, y)$ выражено двойным тригонометрическим рядом, используя формулу для нагрузки треугольной пластинки единичной силой. Исходя из дифференциального уравнения для пластинок определяется поверхность амплитуд $w(x, y)$ треугольной пластинки, сжимаемой и находящейся под действием нагрузки $p(x, y)$, (1.3). Из дифференциального уравне-

ния для сжимаемого продольными силами S ребра и нагрузкой $p(x)$ определяется кривая амплитуд $v(x)$, (1.4).

Из условия согласованности прогиба пластинки и ребра (1.5) получается уравнение (1.7). Решение составляет детерминант системы уравнений, в которой неизвестна частота собственных колебаний ω (пластинки и ребра). Предполагая, что $\omega=0$, можно из приведенного выше детерминанта определить значение критической силы сжимающей ребро S_{kr} или значение критической нагрузки N_{kr} .

Во второй части работы рассматривается несколько частных случаев подкрепления треугольной пластинки ребром или ребрами находящимися под действием сил S .

Summary

FREE VIBRATION AND BUCKLING OF A TRIANGULAR PLATE WITH RIBS

In the first part of this paper, an isotropic triangular plate is considered. The plate is simply supported on the edges and rests on an elastic foundation. The stiffening rib is parallel to one of the sides adjacent to the right angle. The plate is loaded by longitudinal forces uniformly distributed along the edges. The stiffening bar is loaded by a concentrated force S Fig. 1a. The interaction between the plate and the rib is replaced by a continuous load $p(x)$.

The load $p(x, y)$ of the plate due to the action of the rib, is expressed by a double trigonometric series using the expression for a triangular plate loaded by the unit force. Starting from the differential equation for plates, the amplitude surface $w(x, y)$ is determined for a compressed plate loaded additionally by $p(x, y)$, Eq. (1.3). The amplitude curve for the rib $v(x)$, Eq. (1.4)), is determined from the differential equation for the rib subjected to longitudinal compression, and the additional load $p(x)$ expressed by means of a simple trigonometric series.

From the compatibility condition between the plate and the rib, Eq. (1.5), the Eq. (1.7) is obtained. Finally, the determinant of a system of equations is obtained in which the unknown quantity is ω — the frequency of free vibration of the system (plate and rib). Setting $\omega=0$, the critical compressive force S_{cr} for the rib or the critical load N_{cr} may be found.

In the second part, certain particular cases are examined. These concern a triangular plate with one or more ribs loaded by concentrated forces.

KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI
WYDZ. BUD. PRZEM. POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1957 r.