

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI PRZEKROJU POPRZECZNEGO
PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO NA SIŁĘ KRYTYCZNĄ EULERA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXLV

TOM VIII • ZESZYT 1 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	115
2. Równanie przestępne zagadnienia	118
3. Iteracyjne obliczanie siły krytycznej. Siła Eulera jako pierwsze przybliżenie siły krytycznej pręta o przekroju odkształcalnym	123
4. Zależność zmniejszenia siły Eulera od niektórych parametrów. Wnioski praktyczne	127

1. Uwagi wstępne

Najbardziej rozpowszechnionymi elementami w konstrukcjach inżynierskich są pręty, które definiujemy na ogół jako posiadające jeden wymiar (długość) duży w porównaniu z pozostałymi (tzn. z wymiarami przekroju poprzecznego). Jednym z podstawowych założeń wszelkich teorii dotyczących prętów i układów prętowych jest założenie o niezmienności (nieodkształcalności) przekroju poprzecznego, które powtarza się tak w teoriach wytrzymałościowych zginania i skręcania, jak i w związanych z nimi teoriach stateczności i dynamiki. Pozwala ono na opisanie stanu odkształceń czterema co najwyżej niezależnymi wielkościami, mianowicie trzema składowymi przesunięcia i kątem obrotu (skręcenia) przekroju poprzecznego.

Wymienione założenie nie budzi zastrzeżeń w zastosowaniu do prętów pełnych lub grubościennych, natomiast przyjęcie jego dla prętów cienkościennych może prowadzić do poważniejszych niedokładności. Wynika to z faktu, że nie wszystkie wymiary przekroju poprzecznego są tu porównywalne: grubość ścianek jest bardzo mała w stosunku do pozostałych jego wymiarów. Jednocześnie niezgodność (ogólnie biorąc) rozwiązań prętowych z równaniami teorii sprężystości powoduje, że nie wszystkie równania równowagi są spełnione; w rezultacie tego braku zrównoważenia powstają dodatkowe odkształcenia, które rozwijają się przede wszystkim w kierunku najmniejszego oporu, tzn. powodują zniekształcenie cienkiej ścianki przekroju poprzecznego.

Podobnie jak inne teorie prętowe również teorie stateczności prętów cienkościennych oparte są na założeniu niezmienności przekroju poprzecznego. Dotyczy to zarówno teorii giętnego wyboczenia EULERA, która okazała się tu niewystarczająca, jak też ogólniejszych teorii wyboczenia giętno-skrętnego, rozbudowywanych pracowicie i nie bez potknięć przez wielu badaczy, z których wymienimy: WAGNERA, [1], OSTENFELDA, [2], KAPPUSA, [3], F. i H. BLEICHÓW, [4], wreszcie WŁASOWA, którego monografia, [5], stanowi obecnie podstawowe dzieło klasyczne dla tej gałęzi wiedzy. Wyniki teoretyczne zostały potwierdzone z dużą dokładnością przez badania doświadczalne (np. [5]), przy czym oczywiście zapewniono nieodkształcalność przekroju poprzecznego pręta przez zakładanie sztywnych przepon rozmieszczonych w niedużych stosunkowo odstępach.

Możliwość utraty stateczności przez zniekształcenie przekroju poprzecznego została dostrzeżona po raz pierwszy bodaj przez TIMOSZENKĘ (por. np. [6]),

który rozważał cienkościenny przekrój kwadratowy. Utrata stateczności występuje w tym przypadku przez wyboczenie płytowe czterech ścianek. Rozwiązanie jest tu natychmiastowe, ponieważ założenie wolnego podparcia wzdłuż krawędzi podłużnych pręta spełnia ściśle warunki zadania. Inny, bardziej skomplikowany przypadek niestateczności przez samo tylko zniekształcenie przekroju poprzecznego rozważał autor w pracy [7] przedstawiając również rozwiązanie ściśle. W latach powojennych, w związku przede wszystkim z rozwojem konstrukcji lotniczych, poświęcono wiele uwagi wyboczeniu płytowemu ścianek w prętach cienkościennych. Obecnie można uważać, że zjawisko to jest znane wystarczająco dokładnie, także i z praktycznego punktu widzenia; szczególnie opracowane tablice i wykresy ułatwiają otrzymanie wyniku liczbowego dla praktycznie ważnych typów prętów cienkościennych o przekrojach otwartych lub zamkniętych. Obszerne wykazy prac na ten temat i zestawienia wzorów można znaleźć w monografiach [8] i [9]. Wyboczenie płytowe ścianek nazwano «wyboczeniem lokalnym», co ma podkreślać fakt, że pręt jako całość nie ulega wyboczeniu: jego oś pozostaje prosta, zaś przekroje poprzeczne nie doznają obrotów. Charakterystyczne jest tutaj sfałowanie ścianek — płyt, przy czym długość półfali wyboczenia jest, praktycznie biorąc, tego rzędu co szerokość ścianki, dlatego ilość półfal jest zawsze duża i siła krytyczna wyboczenia lokalnego nie zależy od długości pręta. Takie podejście jest jednak nieściśle: wyboczenie lokalne nie może powstać niezależnie (pomijając przypadki wyjątkowe, np. — omówiony w pracy [6]), bowiem założenie wyboczenia czysto płytowego nie spełnia na ogół wszystkich warunków równowagi. Ponieważ jednak sztywności giętne i skrętne prętów są bardzo duże w porównaniu ze sztywnością płytową, należy się spodziewać, że wypływające stąd niedokładności mają znikomy wpływ na wyniki.

Nie ma dotychczas prac ujmujących wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na siłę krytyczną wyboczenia całego pręta¹ (w języku angielskim istnieje dobre, krótkie określenie «primary buckling» jako przeciwstawienie do «local buckling»); w języku polskim nie ma dotychczas takiego określenia dla wyboczenia całego pręta w odróżnieniu od wyboczenia lokalnego; proponujemy termin «wyboczenie ogólne»).

Oddamy najpierw głos F. BLEICHOWI, autorowi cytowanej poprzednio monografii ([8], s. 106): «Oddzielne badanie wyboczenia ogólnego i lokalnego musi dać tylko przybliżone wyniki, ponieważ w ogólności istnieje sprzężenie wyboczenia lokalnego i ogólnego. Dotychczas nie poczyniono wysiłków w celu oceny dokładności teorii skrętnego i giętnego wyboczenia ogólnego przez jednoczesną analizę wyboczenia lokalnego i ogólnego, ponieważ analiza taka byłaby nadzwyczaj skomplikowana». Pogląd ten podziela R. DĄBROWSKI w wydanej kilka lat później monografii, [9]. Również najnowsze miarodajne źródło, mia-

¹ W wyjątkowych przypadkach wyboczenie lokalne może być identyczne z wyboczeniem całego pręta, np. z wyboczeniem skrętnym przekroju krzyżowego (por. np. [8], [9]).

nowicie przegląd krytyczno-bibliograficzny J. NOWIŃSKIEGO, [10], nie notuje żadnych nowych usiłowań w tej dziedzinie².

Jak z powyższego widać, istnieje pewna dosyć poważna luka w teorii stateczności prętów cienkościennych. Z jednej strony stoją teorie wybożenia ogólnego, tzn. klasyczna teoria wybożenia giętnego EULERA i nowsze teorie wybożenia giętno-skrętnego. Z drugiej strony opracowano wystarczająco dokładnie zjawisko wybożenia lokalnego. Brak natomiast teorii ujmującej utratę stateczności pręta cienkościennego ściśle, tzn. z uwzględnieniem wpływu odkształceń prętowych na wybożenie lokalne lub, na odwrót, przy uwzględnieniu wpływu odkształceń płytowych na wybożenie ogólne. Znaczenie pierwszego z wymienionych problemów jest, jak powyżej już wspomniano, raczej teoretyczne. Drugi problem ma znaczenie praktyczne i wymaga opracowania tym bardziej, że odkształcalność przekroju poprzecznego zawsze, rzecz jasna, wpływa na zmniejszenie siły krytycznej.

Autor pokusił się o wypełnienie tej luki i przedstawia teraz pierwszą z serii prac związanych z tym zagadnieniem. Przedmiotem jej jest zbadanie wpływu zniekształcenia przekroju poprzecznego pręta dwuteowego na siłę krytyczną EULERA. W dalszych pracach omówione będzie wybożenie skrętne i ogólniejszy przypadek wybożenia giętno-skrętnego. Wyniki otrzymamy przy pewnych praktycznie uzasadnionych uproszczeniach, które następnie zweryfikujemy w ramach ogólnej teorii wybożenia prętów cienkościennych o odkształcalnym przekroju pozbawionej tych upraszczających założeń. Rozważać będziemy jedynie pręty, których przekrój poprzeczny jest wielokątem, co praktycznie biorąc prawie nie ogranicza zastosowań. Przekroje o obrysie krzywoliniowym wymagają rozwiązania ogólnego problemu stateczności powłoki walcowej; droga ta nie rokuje powodzenia. Ograniczymy się do obszaru sprężystego.

Stosowane metody nie wykraczają w zasadzie poza teorię płyt i teorię prętów cienkościennych. Równania wyjściowe, którymi będziemy się posługiwali, można odnaleźć w podręcznikach lub monografiach z wymienionych dziedzin (np. [5], [6], [8], [12]), których w dalszym ciągu nie będziemy cytowali.

W pracy niniejszej rozpatrzony będzie wyłącznie wymieniony poprzednio problem zmiany w siłę krytycznej EULERA, powodowanej odkształcalnością przekroju poprzecznego. Zagadnienie wzajemnego stosunku wybożenia ogólnego i lokalnego omówimy w oddzielnej publikacji.

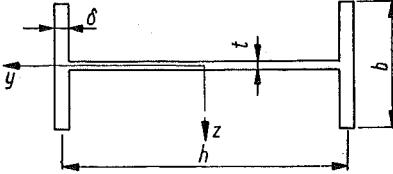
Otrzymane wyniki będą miarodajne oczywiście tylko wtedy, gdy obliczona siła krytyczna będzie mniejsza od siły krytycznej wybożenia lokalnego³.

² Można tu wymienić jedynie nie cytowaną przez NOWIŃSKIEGO pracę J. RUTECKIEGO, [11].

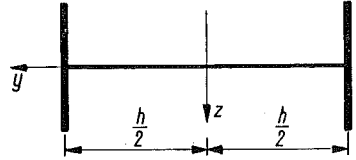
³ W końcowej fazie pisania tej pracy ukazał się w miesięczniku «Der Stahlbau» (nr 5, 6, 1959) artykuł *Zum Problem der Gesamtstabilität von einfachsymmetrischen I-Trägern*, którego autorem jest J. SCHEER. Rozważa on monosymetryczny przekrój dwuteowy ściskany mimośrodowo. Nader skomplikowane w ujęciu autora zagadnienie uzyskuje prosty zapis dzięki użyciu rachunku macierzowego. Dane liczbowe potrzebne do skonstruowania licznych wykresów można było otrzymać jedynie za pomocą maszyn elektronicznych.

2. Równanie przestępne zagadnienia

Dany jest osiowo ściskany pręt długości l o symetrycznym przekroju dwuteowym (rys. 1). Zakładamy, że oba końce pręta podparte są przegubowo oraz że znajdują się na nich niepodatne w swej płaszczyźnie i wiotkie w kierunku prostopadłym przepony poprzeczne uniemożliwiające zniekształcenie skrajnych przekrojów. W praktyce grubość δ pólek jest zawsze znacznie większa niż grubość t środnika, zaś szerokość b pólki jest mniejsza niż wysokość h środnika. Skutkiem takich proporcji odkształcenia pólki w płaszczyźnie przekroju po-



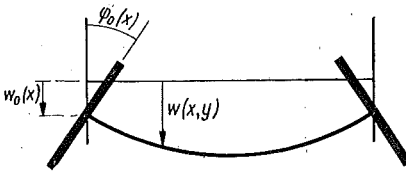
Rys. 1



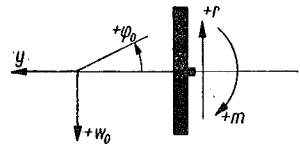
Rys. 2

przecznego są małe w porównaniu do odkształceń środnika. Jednocześnie duża swoboda odkształceń pólki (ze względu na swobodną krawędź podłużną) powoduje, że dają one małe zmiany w stanie naprężeń. Dlatego nie popełnimy dużego błędu przyjmując, że pólki są nieodkształcalne w płaszczyźnie przekroju poprzecznego.

Rysunek 2 przedstawia przyjęty układ współrzędnych, przy czym nie uwidoczniła na nim oś x pokrywa się z osią pręta. Rozważać będziemy wyboczenie giętne w płaszczyźnie osi z , które na ogół jest miarodajne dla przekroju dwuteowego. Odkształcenie przekroju poprzecznego, wynikające z wyżej



Rys. 3



Rys. 4

wymienionych założeń, przedstawiono na rys. 3. Środnik odkształca się tu płytowo, przy czym ugięcie wynosi $w(x, y)$ i wyznacza ugięcie prętowe $w_0(x)$ pólki oraz ich kąt skręcenia $\varphi_0(x)$:

$$w_0(x) = w\left(x, \frac{h}{2}\right), \quad \varphi_0(x) = \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y = \frac{h}{2}}$$

Przy założeniu, że naprężenia normalne nie przekraczają wartości krytycznych wyboczenia płytowego, problem stateczności ogólnej całego pręta sprowadza się do problemu stateczności półek traktowanych jako pręty zginane i skręcane, połączone z nieliniowo pracującą płytą-średnikiem, który przekazuje na półki płytowe reakcje podporowe $r_y(x)$ oraz momenty zamocowania $m_y(x)$. W dalszym ciągu wprowadzimy dla tych wielkości skrócone oznaczenia: $r_y = r$, $m_y = m$. Dodatnie kierunki przemieszczeń w_0 , φ_0 oraz oddziaływań r , m średnika na półki przedstawia rys. 4. Warunki równowagi dla odkształconej półki, znajdującej się pod działaniem siły osiowej $\sigma\delta b$, reakcji r oraz momentu rozłożonego m przedstawiają się jak następuje:

dla zginania

$$(2.1) \quad w_0^{IV} + w_0'' \frac{\sigma\delta b}{EI} + \frac{r}{EI} = 0$$

oraz dla skręcania

$$(2.2) \quad \varphi_0''(GI_s - \sigma I_0) - m = 0.$$

I oznacza tutaj moment bezwładności półki względem osi y , I_s moment bezwładności na skręcanie, zaś I_0 biegunowy moment bezwładności d'a półki; E oraz G są modułami sprężystości; σ przedstawia naprężenia normalne od siły ściskającej osiowo.

Funkcje $w_0(x)$ i $\varphi_0(x)$ muszą spełniać na obu końcach pręta warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia, zatem będzie dla $x = 0$ oraz dla $x = l$:

$$(2.3) \quad w_0 = 0, \quad w_0'' = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Funkcja $w(x, y)$ musi spełniać znane równanie różniczkowe cząstkowe płyty ściskanej i zginanej:

$$(2.4) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} \sigma t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

przy czym na krawędziach poprzecznych $x = 0$, $x = l$ narzucone są warunki

$$(2.5) \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Warunkom tym uczynimy zadość stosując popularne w teorii płyt założenie

$$(2.6) \quad w(x, y) = f(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Jak wiadomo, funkcja $f(y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$f^{IV} - 2\alpha_n^4 f'' + \left(\alpha_n^4 - \frac{\sigma t}{D} \alpha_n^2 \right) f = 0$$

i wyraża się sumą czterech symetrycznych lub antysymetrycznych składników:

$$(2.7) \quad f(y) = C_1 \operatorname{ch} py + C_2 \cos qy + C_3 \operatorname{sh} py + C_4 \sin qy,$$

gdzie

$$(2.8) \quad p = \sqrt{a_n \sqrt{\frac{\sigma t}{D}} + a_n^2}, \quad q = \sqrt{a_n \sqrt{\frac{\sigma t}{D}} - a_n^2}.$$

Ze względu na symetrię odkształceń względem osi z przyjmiemy $C_3 = C_4 = 0$, zatem funkcja $w(x, y)$ przedstawi się w postaci

$$(2.9) \quad w(x, y) = (C_1 \operatorname{ch} py + C_2 \cos qy) \sin a_n x.$$

Stąd podstawiając $y = h/2$, otrzymamy:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0(x) = (C_1 \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 \cos \bar{q}) \sin a_n x, \\ \varphi_0(x) = (C_1 p \operatorname{sh} \bar{p} - C_2 q \sin \bar{q}) \sin a_n x, \\ m(x) = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=\frac{h}{2}} = \\ \quad = -D [C_1 (\nu a_n^2 - p^2) \operatorname{ch} \bar{p} + C_2 (\nu a_n^2 + q^2) \cos \bar{q}] \sin a_n x, \\ r(x) = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=\frac{h}{2}} = \\ \quad = D \{ C_1 [(2 - \nu) a_n^2 - p^2] p \operatorname{sh} \bar{p} - C_2 [(2 - \nu) a_n^2 + q^2] q \sin \bar{q} \} \sin a_n x, \end{array} \right.$$

gdzie $\bar{p} = ph/2$, $\bar{q} = qh/2$.

Widoczne jest, że funkcje $w_0(x)$ i $\varphi_0(x)$ spełniają warunki brzegowe (2.3). Pozostaje zatem uczynić zadość warunkom zgodności sił i przemieszczeń półki i środnika na krawędziach podłużnych $y = \pm h/2$, co uzyskamy podstawiając wielkości w_0 , φ_0 , m i r wyrażone wzorami (2.10) do równań (2.1) i (2.2). Otrzymamy w ten sposób układ dwu równań jednorodnych ze względu na stałe C_1 i C_2 :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 \left\{ \left(a_n^4 - a_n^2 \frac{\sigma \delta b}{EI} \right) \operatorname{ch} \bar{p} + \frac{D}{EI} [(2 - \nu) a_n^2 - p^2] p \operatorname{sh} \bar{p} \right\} + \\ \quad + C_2 \left\{ \left(a_n^4 - a_n^2 \frac{\sigma \delta b}{EI} \right) \cos \bar{q} - \frac{D}{EI} [(2 - \nu) a_n^2 + q^2] q \sin \bar{q} \right\} = 0, \\ C_1 \left[-a_n^2 \left(1 - \frac{\sigma I_0}{GI_s} \right) p \operatorname{sh} \bar{p} + \frac{D}{GI_s} (\nu a_n^2 - p^2) \operatorname{ch} \bar{p} \right] + \\ \quad + C_2 \left[a_n^2 \left(1 - \frac{\sigma I_0}{GI_s} \right) q \sin \bar{q} + \frac{D}{GI_s} (\nu a_n^2 + q^2) \cos \bar{q} \right] = 0. \end{array} \right.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje warunek wybożenia w postaci równania przestępnego, w którym niewiadomą jest naprężenie krytyczne σ_{kr} :

$$(2.12) \quad \left\{ \left(\alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\sigma_{kr} \delta b}{EI} \right) \operatorname{ch} \bar{p} + \frac{D}{EI} [(2-\nu) \alpha_n^2 - p^2] p \operatorname{sh} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{D}{GI_s} (\nu \alpha_n^2 + q^2) \cos q + \alpha_n^2 \left(1 - \frac{\sigma_{kr} I_0}{GI_s} \right) q \sin q \right\} - \\ - \left\{ \left(\alpha_n^4 - \alpha_n^2 \frac{\sigma_{kr} \delta b}{EI} \right) \cos \bar{q} - \frac{D}{EI} [(2-\nu) \alpha_n^2 + q^2] q \sin \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{D}{GI_s} (\nu \alpha_n^2 - p^2) \operatorname{ch} \bar{p} - \alpha_n^2 \left(1 - \frac{\sigma_{kr} I_0}{GI_s} \right) p \operatorname{sh} \bar{p} \right\} = 0.$$

Wygodniejsze jest przyjęcie jako niewiadomej wielkości bezwymiarowej $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$, podstawiając poza tym ⁴

$$(2.13) \quad \begin{cases} I_0 = I = \frac{1}{12} \delta b^3, & I_s = \frac{1}{3} \delta^3 b, \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, & D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \end{cases}$$

otrzymamy

$$(2.14) \quad \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{th} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right) (\nu + \gamma_2^2) + n\pi \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right) (\nu - \gamma_1^2) - n\pi \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2) k_{kr}} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2) k_{kr}} - 1}, \\ \bar{p} = \frac{n\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{n\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_2.$$

W równaniu (2.14) przekrój poprzeczny scharakteryzowany jest kilkoma wielkościami, które można wyrazić przez cztery niezależne bezwymiarowe parametry: l/h , l/b , l/δ i l/t .

⁴ Przyjęto $I_0 = I$, ponieważ zawsze $\delta \ll b$.

Otrzymamy wówczas

$$(2.15) \quad \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{th} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (\nu + \gamma_2^2) + n\pi \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - \frac{n\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (\nu - \gamma_1^2) - n\pi \gamma_1 \operatorname{tg} \bar{p} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} = 0.$$

Wyboczenie EULERA zachodzi przy wygięciu pręta podług jednej półfali, zatem podstawiając $n = 1$ oraz przyjmując $\nu = 0,3$ dla stali i wpisując wartości liczbowe stałych dochodzimy do następującej postaci równania przestępnego:

$$(2.16) \quad \left\{ \left[9,86960 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - 3,45230 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_1 (\gamma_2^2 + 0,3) \operatorname{th} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ 0,714285 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (0,3 + \gamma_2^2) + 3,14159 \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} \left[1 - 0,65 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[9,86960 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] - 3,45230 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_2 (\gamma_1^2 - 0,3) \operatorname{tg} \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ 0,714285 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{l}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (0,3 - \gamma_1^2) - 3,14159 \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} \left[1 - 0,65 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 k_{kr} \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{1,05187 \frac{l}{t} \sqrt{k_{kr} + 1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1,05187 \frac{l}{t} \sqrt{k_{kr} - 1}}, \\ \bar{p} = 1,570796 \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = 1,570796 \frac{h}{l} \gamma_2.$$

Zauważmy, że gdy $t/\delta \rightarrow 0$, wówczas równanie (2.14) znacznie się upraszcza:

$$(2.17) \quad \left[n^2 \pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_{kr} \right] \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{l} \right)^2 k_{kr} \right] (\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p}) = 0.$$

Istnieją wówczas trzy niezależne rozwiązania:

Pierwsze rozwiązanie daje naprężenia krytyczne giętnego wyboczenia półki

$$(2.18) \quad \sigma_{kr}^{(1)} = E k_{kr}^{(1)} = \frac{n^2 \pi^2 E}{12} \left(\frac{b}{l} \right)^2;$$

drugie rozwiązanie daje naprężenia krytyczne skrętnego wybożenia półki (przy oznaczeniu $I_0 = \delta b^3/12$)

$$(2.19) \quad \sigma_{kr}^{(2)} = Ek_{kr}^{(2)} = \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\delta}{b} \right)^2;$$

trzecie naprężenie krytyczne $\sigma_{kr}^{(3)}$ otrzymamy z rozwiązania równania przestępnego

$$\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} = 0,$$

które przedstawia warunek wybożenia dla płyty prostokątnej wolno podpartej na krawędziach $x = 0$, $x = l$ i zamocowanej na krawędziach $y = \pm h/2$. Wynik ten potwierdza prawidłowość naszych rozważań, ponieważ przy bardzo cienkim środkiku półki dają doskonale jego podparcie i utwierdzenie.

Jeżeli pominiemy naprężenia $\sigma_{kr}^{(3)}$ (ponieważ zagadnienia wybożenia płytowego-lokalnego nie interesuje nas), pozostają do dyskusji dwa pierwiastki równania odpowiadające naprężeniom $\sigma_{kr}^{(1)}$ oraz $\sigma_{kr}^{(2)}$. Łatwo stwierdzić, że (praktycznie biorąc) mniejsze, a zatem miarodajne, będzie zawsze naprężenie $\sigma_{kr}^{(1)}$. Jeżeli przy obliczeniu siły krytycznej EULERA pominiemy, jak to się zwykle czyni, moment bezwładności względem osi y , to oczywiście otrzymamy również naprężenia krytyczne $\sigma_{kr}^{(1)}$. Jak z powyższego widać, w omawianym przypadku skrajnym odkształcalność środkika nie wpływa na zmianę siły krytycznej. Jasne jest, że również w drugim skrajnym przypadku, mianowicie przy $\delta/t \rightarrow 0$ odkształcalność środkika nie wpływa na siłę EULERA. Stąd wniosek, że zarówno przy bardzo grubym jak i przy bardzo cienkim środkiku jego odkształcenia mają znikomy wpływ na wielkość rozpatrywanej siły krytycznej. Największych wpływów należy spodziewać się przy pewnych pośrednich wartościach stosunku δ/t . Wniosek ten znajduje potwierdzenie w wynikach obliczeń przedstawionych w p. 4.

3. Iteracyjne obliczanie siły krytycznej. Siła Eulera jako pierwsze przybliżenie siły krytycznej pręta o przekroju odkształcalnym

Równanie przestępne wyprowadzone w p. 2 jest nader skomplikowane i obliczenie jego najmniejszego dodatniego pierwiastka, który daje naprężenie krytyczne, wymaga dużego nakładu pracy rachunkowej. Pożądane jest zatem opracowanie metody, która pozwoliłaby na uzyskanie wyniku z ominięciem rozwiązania tego kłopotliwego równania. Od razu trzeba zaznaczyć, że często i z powodzeniem stosowane metody energetyczne nie mogą okazać się tutaj przydatne. Złożoność zjawiska wyklucza tu przyjęcie najprostszej z tych metod, metody TIMOSZENKI, operującej jednym parametrem. Przy użyciu metody RITZA musimy odkształcenie pręta opisać co najmniej dwoma parametrami, po jednym dla zginania i skręcania pólki. Wówczas siłę krytyczną otrzymamy, jak wiadomo, przez rozwiązanie równania kwadratowego, którego współczynniki wyrażają się jednak już bardzo skomplikowanymi wzorami.

Z drugiej strony przy użyciu jednego tylko parametru dla opisanego zginania i jednego dla skręcania półki nie należy spodziewać się dokładności przekraczającej jeden procent. Dokładność taka, na ogół wystarczająca, nie może nas zadowolić, ponieważ, jak wykazują wyniki obliczeń ścisłych (por. p. 4), odkształcalność przekroju poprzecznego zmienia się krytyczną EULERA (w realnych praktycznie przypadkach) nie więcej niż o kilka procent. Dlatego obarczenie wyniku błędem rzędu jeden procent dałoby skażony obraz zjawiska. Lepszą dokładność można by uzyskać zakładając większą ilość parametrów (co najmniej cztery) określających założoną przybliżoną postać odkształcenia pręta. Wówczas jednak otrzymamy równanie co najmniej czwartego stopnia, które nie może już konkurować z równaniem przestępnym.

Z drugiej strony fakt, iż poszukiwana siła krytyczna niewiele różni się od siły EULERA, narzuca przypuszczenie, że tę właśnie siłę można uważać za pierwsze przybliżenie służące następnie za punkt wyjścia pewnego procesu iteracyjnego, zmierzającego do wyniku ścisłego.

Rozkład odkształceń tak prętowych, jak i płytowych wzdłuż osi pręta jest, zgodnie z rozwiązaniem ścisłym przedstawionym poprzednio, niezależny od charakterystyk przekroju i podlega zmienności według funkcji $\sin(n\pi x/l)$; ponieważ jest znany, nie wymaga iteracji. Natomiast rozkład odkształceń płytowych w kierunku poprzecznym jako zależny od charakterystyk przekroju i od obciążenia osiowego, zatem ogólnie biorąc nieznanymi, będzie podlegał iteracji.

W stanie wyjściowym założymy, że siła krytyczna jest równa sile EULERA $P_E = 2\pi^2 EI/l^2$. Siła ta będzie pierwszym przybliżeniem; odpowiada tej sile współczynnik

$$k_E = \frac{\pi^2}{6} \frac{\delta b^3}{l^2 (2\delta b + th)},$$

który można zapisać w zależności od bezwymiarowych parametrów:

$$(3.1) \quad k_E = \frac{\pi^2}{6} \frac{\frac{\delta}{l} \left(\frac{b}{l}\right)^3}{2 \frac{\delta}{l} \frac{b}{l} + \frac{t}{l} \frac{h}{l}}.$$

W przypadku uwzględnienia momentu bezwładności środka względem osi y otrzymamy

$$(3.2) \quad k_E^* = k_E \left[1 + \frac{h}{\delta} \left(\frac{t}{b}\right)^3 \right].$$

Biorąc pod uwagę rozwiązanie (2.8) równania płytowego możemy obecnie obliczyć [wykorzystując wzory (2.10) przez podstawienie do nich pierwszego przybliżenia $k_1 = k_E$ lub $k_1 = k_E^*$] odpowiadające temu przybliżeniu przemieszczenie prętowe $w_0^{(1)}(x)$ i $\varphi_0^{(1)}(x)$ półek oraz oddziaływania $r^{(1)}(x)$ i $m^{(1)}(x)$ środ-

nika na półki, zachowując stałe C_1 i C_2 jako niewiadome. Oddziaływaniami tymi obciążymy następnie pręt podstawiając je do równań (2.1). Z równań tych obliczymy teraz drugie przybliżenie k_2 biorąc pod uwagę, że pod działaniem obciążeń $r^{(1)}(x)$, $m^{(1)}(x)$ i siły osiowej każda z półek musi wykazywać przemieszczenia $w_0^{(1)}(x)$ i $\varphi_0^{(1)}(x)$. W tym celu należy również wielkości $w_0^{(1)}(x)$ i $\varphi_0^{(1)}(x)$ wstawić do równań (2.1). Otrzymamy w ten sposób układ dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe C_1 i C_2 , który będzie identyczny z układem (2.11). Rozwiązania niesprzeczne na stałe C_1 i C_2 możliwe będą tylko wtedy, gdy wyznacznik układu będzie równy zeru. Warunek ten prowadzi z kolei do równania identycznego z (2.14). Nie będzie to jednak równanie przestępne, lecz kwadratowe ze względu na poszukiwane drugie przybliżenie k_2 współczynnika k_{kr} . Za przybliżenie to przyjmiemy mniejszy pierwiastek równania kwadratowego; biorąc $n = 1$ będziemy mieli

$$(3.3) \quad \left\{ \left[\pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_2 \right] + \frac{\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{th} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (\nu + \gamma_2^2) + \pi \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_2 \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[\pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_2 \right] - \frac{\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \left(\frac{l}{b} \right) (\nu - \gamma_1^2) - \pi \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_2 \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_E} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_E} - 1}, \\ \bar{p} = \frac{\pi h}{2l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{\pi h}{2l} \gamma_2.$$

Dalszy tok obliczeń jest identyczny z podanym powyżej. Dla uzyskania n -go przybliżenia obciążamy półki oddziaływaniami płytowymi przybliżenia $(n-1)$ -go dobierając tak siłę osiową, aby ich odkształcenia były zgodne z odkształceniami płytowymi $(n-1)$ -go przybliżenia. Wynik otrzymujemy zawsze jako mniejszy z pierwiastków równania kwadratowego:

$$(3.4) \quad \left\{ \left[\pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_n \right] + \frac{\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \left(\frac{l}{\delta} \right) \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{th} \bar{p} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (\nu + \gamma_2^2) + \pi \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_n \right] \right\} - \\ - \left\{ \left[\pi^2 - 12 \left(\frac{l}{b} \right)^2 k_n \right] - \frac{\pi}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \frac{l}{\delta} \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \frac{l}{b} (\nu - \gamma_1^2) - \pi \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} \left[1 - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k_n \right] \right\} = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1}+1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1}-1}},$$

$$\bar{p} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_2.$$

Przykład liczbowy. Obliczmy metodą iteracyjną siłę krytyczną dla pręta scharakteryzowanego parametrami: $l/t = 1000$, $l/h = 10$, $l/\delta = 300$, $l/b = 20$.

Podstawiając te wartości do (3.4) otrzymamy

$$(3.5) \quad [(9,86960 - 4800 k_n) - 8,28552 \cdot 10^{-3} \gamma_1 (\gamma_2^2 + 0,3) \operatorname{th} \bar{p}] \times$$

$$\quad \times 385,711 \cdot 10^{-3} (0,3 + \gamma_2^2) + 3,14159 \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} (1 - 146,25 k_n)] -$$

$$\quad - [(9,86960 - 4800 k_n) - 8,28552 \cdot 10^{-3} \gamma_2 (\gamma_1^2 - 0,3) \operatorname{tg} \bar{q}] \times$$

$$\quad \times [385,711 \cdot 10^{-3} (0,3 - \gamma_1^2) - 3,14159 \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} (1 - 146,25 k_n)] = 0,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \sqrt{1051,87 \sqrt{k_{n-1}+1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1051,87 \sqrt{k_{n-1}-1}},$$

$$\bar{p} = 0,1570796 \gamma_1, \quad \bar{q} = 0,1570796 \gamma_2.$$

Współczynnik odpowiadający sile EULERA wynosi według wzoru (3.1) $k_E = 1,5817 \cdot 10^{-3}$. Podstawiając tę wartość do (3.6) mamy $\gamma_1 = 6,54417$, $\gamma_2 = 6,39011$, $\bar{p} = 1,02804$ oraz $\bar{q} = 1,00375$. Podstawiając kolejno te liczby do (3.5) otrzymamy równanie kwadratowe

$$33,2888 \cdot 10^6 k_2^2 - 434 792 k_2 + 590,573 = 0,$$

którego mniejszy pierwiastek jest drugim przybliżeniem i wynosi $k_2 = 1,53983 \cdot 10^{-3}$.

Trzecie przybliżenie obliczamy z równania

$$32,6960 \cdot 10^6 k_3^2 - 428 176 k_3 + 586,651 = 0,$$

skąd $k_3 = 1,55467 \cdot 10^{-3}$.

Czwarte przybliżenie daje

$$32,9066 \cdot 10^6 k_4^2 - 430 531 k_4 + 588,074 = 0$$

oraz $k_4 = 1,54941 \cdot 10^{-3}$.

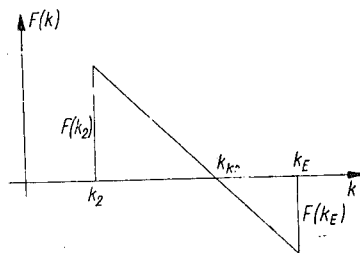
Piąte przybliżenie prowadzi do równania

$$32,8285 \cdot 10^6 k_5^2 - 429 657 k_5 + 587,548 = 0,$$

skąd $k_5 = 1,55138 \cdot 10^{-3}$.

Rozwiązanie równania przestępnego daje wynik $k_{kr} = 1,5507$. Jak widać, piąte przybliżenie daje błąd nie przekraczający kilku setnych procent.

Zbieżność iteracji nie jest zadowalająca i metoda, pomimo że prosta, wymaga również dużego nakładu pracy. Może być jednak bardzo użyteczna jako narzędzie pomocnicze. Mianowicie rozwiązanie równania przestępnego jest stosunkowo łatwe, gdy wiemy, gdzie tego rozwiązania szukać. Ponieważ jest zawsze $k_E > k_{kr}$, zaś $k_2 < k_{kr}$, otrzymujemy nierówność $k_2 < k_{kr} < k_E$, która daje przedział, na ogół bardzo wąski, w którym znajduje się rozwiązanie. Jeżeli k_{kr} różni się od k_E nie więcej niż o 10%, to wynik z dokładnością do kilku miejsc znaczących otrzymać można wprost przez liniową interpolację (por. rys. 5) między wartościami $F(k_E)$ oraz $F(k_2)$, gdzie symbol F oznacza lewą stronę równania przestępnego (2.14).



Rys. 5

4. Zależność zmniejszenia siły Eulera od niektórych parametrów. Wnioski praktyczne

Podamy tu wyniki obliczeń, które pozwalają na wyciągnięcie pewnych wniosków.

Tablica 1

	$h/b = 2,5$	$\delta/t = 4$	$b/\delta = 10$	
l/h	4	6	8	10
$k_E \cdot 10^3$	6,2664	2,7851	1,5666	1,0026
$k_{kr} \cdot 10^3$	4,050	2,608	1,5325	0,9930
χ	0,6459	0,9364	0,9782	0,9903
$\Delta P_{kr} \%$	35,4	6,36	2,18	0,97

W tablicy 1 zestawiono dane liczbowe przedstawiające zależność badanego zjawiska od długości pręta, którego przekrój poprzeczny określony jest parametrami

Tablica 2

	$l/h = 10$	$l/b = 25$	$l/\delta = 250$	
l/t	500	1000	1500	
$k_E \cdot 10^3$	0,80981	1,0026	1,0890	
$k_{kr} \cdot 10^3$	0,80764	0,9930	1,0765	
χ	0,9973	0,9903	0,9885	
$\Delta P_{kr} \%$	0,27 ¹⁾	0,97	1,15	

¹⁾ Biorąc współczynnik k_E^* otrzymamy tu wartość 0,58.

trami umieszczonymi w jej nagłówku. Podano w tej tablicy kolejno: współczynnik k_E , współczynnik k_{kr} , stosunek $\chi = k_{kr}/k_E$ rzeczywistej siły krytycznej do siły EULERA oraz procentowe zmniejszenie siły EULERA $\Delta P_{kr} \% = 100(1 - \chi)$.

Jak widać, przy malejącej długości pręta wpływ odkształcenia przekroju gwałtownie rośnie.

Tablica 2 przedstawia wyniki obliczeń w zależności od parametru l/t .

Tablica 3 przedstawia zależność wyników od stosunku δ/t . Ponieważ zmiany siły EULERA są tu bardzo małe, obliczano współczynnik k_E^* zamiast współczynnika k_E i odpowiadający mu współczynnik χ^* . Dla porównania podano też współczynnik χ obliczony przy wykorzystaniu k_E .

Tablica 3

	$l/h = 10$	$l/b = 25$	$l/t = 500$	
δ/t	1	2	3	5
$k_E^* \cdot 10^4$	5,8853	8,1234	9,3083	10,541
$k_{kr} \cdot 10^4$	5,8414	8,0764	9,2702	10,519
$\chi^* = \frac{k_{kr}}{k_E^*}$	0,9925	0,9942	0,9959	0,9980
$100(1-\chi^*)$	0,75	0,58	0,41	0,20
$100(1-\chi)$	0,13	0,27	0,20	0,08

Na podstawie przedstawionych powyżej wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zmniejszenie siły krytycznej jest w praktycznych przypadkach niewielkie i przy proporcjach wymiarów przekroju poprzecznego, odpowiadających dźwigarom walcowanym, wyraża się drobnym ułamkiem procentu (por. tabl. 3).

2. W prętach dwuteowych spawanych, w których proporcje wymiarów przekroju poprzecznego mogą zbliżyć się do podanych w tabl. 2, obniżenie siły krytycznej jest większe i może wyjątkowo dochodzić do kilku procent.

3. Wpływ odkształcalności przekroju rośnie gwałtownie wraz ze zmniejszaniem długości pręta i teoretycznie może osiągnąć wartość kilkudziesięciu procent. Należy jednak pamiętać, że dla krótkich prętów otrzymane naprężenia krytyczne przekroczą zawsze wyraźnie granicę sprężystości. Poza tym będą na ogół większe od naprężeń wyboczenia lokalnego. Z obu tych przyczyn tak duże obniżenie siły EULERA pozostaje raczej tylko teoretyczną możliwością.

Literatura cytowana w tekście

[1] H. WAGNER, *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, Festschrift 25 Jahre T. H. Danzig, Gdańsk 1929.

[2] A. OSTENFELD, *Politeknisk Laereanstalts Laboratorium for Bygningsstatik*, Meddelelse nr 5, Kopenhaga 1931.

[3] R. KAPPUS, *Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenen Profil im elastischen Bereich*, Luftfahrt-Forschung, 1937.

[4] F. BLEICH and H. BLEICH, *Bending Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin-Walls*, Preliminary Pub. 2 Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Engen, Berlin 1936.

- [5] В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Moskwa 1959.
 [6] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.
 [7] A. CHUDZIKIEWICZ, *Utrata stateczności przez zniekształcenie przekroju poprzecznego pręta cienkościennego*, Rozpr. inżyn., 1, 8 (1960).
 [8] F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York 1952.
 [9] R. DĄBROWSKI, *Praktycznie ważne przypadki wybożenia skrętnego prętów cienkościennych*, Arch. Inżyn. lądow., 1 (1956).
 [10] J. NOWIŃSKI, *Theory of Thin-Walled Bars*, Appl. Mech. Rev. 4, 12 (1959).
 [11] J. RUTECKI, *Niestateczność pręta cienkościennego z uwzględnieniem odkształcenia profilu*, Arch. Mech. stos., 3/4, 3 (1951).
 [12] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ НА ЭЙЛЕРОВУ КРИТИЧЕСКУЮ СИЛУ

В работе определяется влияние деформации поперечного сечения (рис. 1) двутаврового стержня длиной l , сжимаемого в осевом направлении на величину эйлеровской критической силы P_E в упругой области. Предполагается шарнирное опирание концов стержня и неподатливые диафрагмы на опорах, препятствующие деформации опорных сечений, а также, что полученные критические напряжения будут меньше критических напряжений при местном выпучивании стенок. Так как всегда $\delta > t$, поэтому принимается, что полки не подвергаются деформации в плоскости поперечного сечения. Поэтому деформируется только стенка, при чем ее прогиб составляет $w(x, y)$ (рис. 3). Полки рассматриваются как изгибаемые, скручиваемые стержни, а стенка как изгибаемая и сжимаемая пластинка. Для каждой полки следует удовлетворить двум уравнениям равновесия: для изгиба (2.1) и для кручения (2.2). Что же касается стенки, то в таком случае необходимо удовлетворить известному уравнению (2.4). Предполагается решение в форме (2.6). Это решение удовлетворяет краевым условиям (2.3) для $x = 0$ и $x = l$, а также условиям (2.5) на краях $x = 0, x = l$. Необходимо еще удовлетворить условиям совместности деформаций и перемещений на краях $y = \pm h/2$ подставляя (2.10) в (2.1) и (2.2). Оттуда получается условие неустойчивости в виде трансцендентного уравнения (2.14).

В разделе 3 работы дается итерационный метод определения критической силы. В качестве первого приближения принимается эйлерово напряжение т.е. согласно (1.5): $k_1 = k_E$. Полученными таким образом величинами $r(x)$ и $m(x)$ нагружаем полки, откуда определяется второе приближение k_2 , как меньший корень квадратного уравнения (3.3). Дальнейшие приближения определяются по квадратным уравнениям (3.4). Итерация является не слишком быстро-сходимой, но линейная интерполяция согласно рис. 5 дает результаты с большой точностью.

В четвертом разделе приводятся результаты исчислений. На таблице 1 дается зависимость уменьшения эйлеровой силы от длины l стержня, а на таблице 2 — зависимость от параметра δ/t , на таблице 3 приводится зависимость от параметра l/t . Из дискуссии следует, что для прскатных балок обсуждаемое влияние выражается в долях процента (таблица 3), а для сварных балок — может превышать 1%; это влияние при уменьшающейся длине стержня стремительно повышается, однако в этом случае критические напряжения превышают предел упругости и критические напряжения местного выпучивния стенок.

Summary

THE INFLUENCE OF DEFORMABILITY OF THE CROSS-SECTION ON THE EULERIAN CRITICAL FORCE OF A THIN-WALLED BEAM

The object of this paper is to determine the influence of the deformation of the cross-section (Fig. 1) of a compressed double-tee bar of length l on the EULERIAN critical force P_E in the elastic range. Hinged end supports and rigid end diaphragms preventing the deformation of the end cross-sections are assumed. It is also assumed that the critical stress obtained will be less than the critical stress of local buckling. Since we have always $\delta > t$, it is assumed that the horizontal elements are not deformed in the plane of the cross-section. Therefore, the vertical part is the only part to undergo deformation, its deflection being $w(x,y)$ (Fig. 3). In further considerations, the horizontal elements are treated as bars subjected to bending, torsion and compression, and the vertical element as a plate subjected to bending and compression. Two equilibrium equations must be satisfied: for bending, (2.1), and for torsion, (2.2). For the vertical part the familiar Eq. (2.4) must be satisfied. The solution is assumed in the form (2.6). It satisfies the boundary conditions (2.3) for $x = 0$ and $x = l$, and the conditions (2.5) at the edges $x = 0$ and $x = l$. There remain the compatibility equations of strain and displacement to be satisfied at the edges $y = \pm h/2$. This may be done by substituting (2.10) in (2.1) and (2.2). Hence the buckling condition is obtained in the form of the transcendental equation (2.14).

In Sec. 3, an iteration method for calculating the critical force is described. The EULERIAN stresses are assumed as the first approximation or, in other words, $k_1 = k_E$ according to (3.1). The quantities thus obtained are then assumed to constitute the load of the horizontal elements. Thus, the second approximation k_2 is obtained as the lower of the roots of the quadratic equation (3.3). Further approximations are calculated from the quadratic equation (3.4). The iteration is not rapidly convergent, but a linear interpolation according to Fig. 5 yields a good result.

In Sec. 4, are presented the calculation results.

Table 1 represents the dependence of the diminishing of the EULERIAN force on the length l of the bar, Table 2 showing the dependence on the parameter l/t , and Table 3—on the parameter δ/t . From a discussion, it follows that for rolled girders this influence is expressed by fractions of one per cent (Table 3); for welded girders it may exceed one per cent and with decreasing length of the bar it increases rapidly (Table 1); but then, the critical stress exceeds the elastic limit and the stress of local buckling.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 czerwca 1959 r.