

**P. P. TEODORESCU**

**O WYTRZYMAŁOŚCI BELEK PROSTYCH.**

**I. ROZWAŻANIA OGÓLNE. BELKA PROSTA PODPARTA SWOBODNIE**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CCXXXVIII**

**TOM X • ZESZYT 4 • ROK 1962**

## SPIS TREŚCI

1. Uwagi ogólne	587
1.1. Oznaczenia	587
1.2. Przypadek belki prostej podpartej	589
1.3. Przypadek obciążenia belki prostej	590
1.4. Rozwiązania metodami teorii wytrzymałości materiałów	590
1.5. Rozwiązania metodami teorii sprężystości	592
1.6. Metody rachunkowe	594
2. Belka prosta podparta swobodnie. Rozwiązania przy użyciu wielomianów biharmonicznych	595
2.1. Obciążenie momentami na końcach belki	595
2.2. Obciążenie rozłożone w sposób ciągły	602
2.3. Obciążenie rozłożone w sposób ciągły o nieciągłej pochodnej	616
2.4. Obciążenie rozłożone w sposób nieciągły	620
2.5. Obciążenie siłami skupionymi	622
2.6. Obciążenie siłami masowymi	626
3. Belka prosta podparta swobodnie. Rozwiązania oparte na rozwinięciach w szereg nieskończony	628
3.1. Obciążenie dowolne	628
3.2. Stan naprężeń i odkształceń w belce podpartej swobodnie	634
Dodatek	638

W pracy niniejszej zajmiemy się problemem belek prostych o przekroju prostokątnym, przy czym uzyskane wyniki będzie można na ogół stosować z wystarczająco dobrym przybliżeniem dla belek o dowolnym przekroju poprzecznym; dokładność tego przybliżenia można określić w każdym przypadku. Wyniki nie odnoszą się natomiast do belek cienkościennych (których wymiary znacznie się różnią między sobą); z belkami tymi związane są pewne zagadnienia specjalne.

Przypadek belki prostej bywa na ogół badany metodami przybliżonymi teorii wytrzymałości materiałów, opartymi na klasycznym założeniu przekrojów płaskich (hipoteza Bernoulliego). Z drugiej strony do problemów belek-ścian (płaskich płyt poddanych działaniu obciążeń równoległych do płaszczyzny środkowej, przy czym zakłada się, że obciążenia działają w tej płaszczyźnie) wykorzystuje się metody teorii sprężystości i nie przyjmuje się założenia o płaskich przekrojach. Co więcej, nawet w przypadku czystego zginania przekrój płaski przed odkształceniem przechodzi w wycinek powierzchni walca parabolicznego, [30], mimo, że wzór Naviera (wyprowadzony metodami teorii wytrzymałości materiałów dla naprężeń normalnych) jest w tym przypadku spełniony również w ramach teorii sprężystości.

Wiadomo również, że dla belek tego typu dokładność uzyskanych wyników jest inna dla stanu naprężeń, a inna dla stanu odkształceń. Wynika stąd czasem konieczność obliczania pewnych wielkości na gruncie teorii sprężystości, podczas gdy dla innych wielkości wyniki uzyskane w ramach teorii wytrzymałości są wystarczająco dokładne. Wynika więc stąd problem określenia granic stosowalności teorii wytrzymałości materiałów oraz dokonania przeglądu dokładnych i przybliżonych metod stosowanych w teorii sprężystości ze względu na zakres ich stosowalności.

Problemy powyższe postawić można dla belek o zupełnie dowolnym przekroju poprzecznym, jednakże dla ustalenia pojęć i uproszczenia rachunków zajmiemy się belkami o przekroju poprzecznym prostokątnym.

Przeprowadzimy pewne rozważania ogólne, a następnie zbadamy przypadek belki prostej podpartej swobodnie (I, niniejsza część pracy), omówimy belki wspornikowe i wsporniki (II część artykułu) oraz belki hiperstatyczne i podamy pewne końcowe wnioski (III część).

### 1. Uwagi ogólne

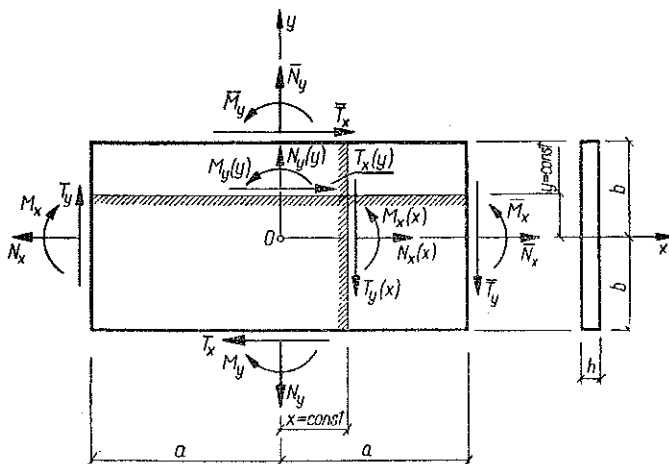
Przeprowadzimy przede wszystkim pewne rozważania o charakterze ogólnym, dotyczące belek prostych i możliwości ich badania z punktu widzenia teorii wytrzymałości materiałów.

**1.1 Oznaczenia:** Za osie układu współrzędnych przyjmuje się na ogół osie symetrii belki (rys. 1).

Oznaczmy przez  $2a$  i  $2b$  wymiary belki w płaszczyźnie środkowej, a przez  $h$  jej szerokość (w dalszym ciągu będziemy przyjmowali, że jest ona równa jedności). Niech  $\lambda$  będzie stosunkiem długości belki do wysokości jej przekroju poprzecznego

$$(1.1) \quad \lambda = \frac{l}{2b} = \frac{a}{b}, \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

W przypadku belek-ścian przyjmujemy na ogół  $0,5 \leq \lambda \leq 2,0$ . Jeśli  $\lambda > 2,0$ , otrzymujemy wówczas zwykłą belkę prostą. Jeśli  $\lambda < 0,5$ , to belka zachowuje się jak ściana, a wpływ ugięcia można pominąć w porównaniu z wpływem siły poprzecznej. Sztywność belki jest proporcjonalna jedynie do powierzchni przekroju poprzecznego, co wykazano w pracach [8] i [27].



Rys. 1

Będziemy również używali niekiedy współrzędnych bezwymiarowych

$$(1.2) \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

W punktach wewnętrznych belki pojawiają się naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y$  oraz naprężenia styczne  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . W ustalonym przekroju  $x = \text{const}$  można zsumować te naprężenia otrzymując siły i momenty działające w tym przekroju: siłę osiową  $N_x(x)$ , siłę poprzeczną  $T_y(x)$  oraz moment zginający  $M_x(x)$  (rys. 1), mianowicie

$$(1.3) \quad N_x(x) = \int_{-b}^b \sigma_x dy, \quad T_y(x) = - \int_{-b}^b \tau_{xy} dy, \quad M_x(x) = - \int_{-b}^b \sigma_x y dy.$$

Podobnie przy  $y = \text{const}$  otrzymujemy  $N_y(y)$ ,  $T_x(y)$  i  $M_y(y)$ .

Dla końców belki używać będziemy następujących oznaczeń:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \bar{N}_x &= \int_{-b}^b \sigma_x(a, y) dy, & \bar{T}_y &= - \int_{-b}^b \tau_{xy}(a, y) dy, & \bar{M}_x &= - \int_{-b}^b \sigma_x(a, y) y dy, \\ N_x &= \int_{-b}^b \sigma_x(-a, y) dy, & T_y &= - \int_{-b}^b \tau_{xy}(-a, y) dy, & M_x &= - \int_{-b}^b \sigma_x(-a, y) y dy \end{aligned}$$

i podobnie określimy  $\bar{N}_y$ ,  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{M}_y$ ,  $N_y$ ,  $T_x$  i  $M_y$ . Te ostatnie wielkości są niezbędne dla sformułowania warunków brzegowych.

Wobec założenia, że grubość belki wynosi 1, uzyskujemy pole powierzchni przekroju poprzecznego w postaci

$$(1.5) \quad A = 2b.$$

Z tego samego względu moment bezwładności określony jest wzorem

$$(1.6) \quad I = \frac{2}{3} b^3.$$

Moment statyczny zginanego przekroju  $y = \text{const}$  można przedstawić w postaci

$$(1.7) \quad S(y) = \frac{1}{2} (b^2 - y^2).$$

Wpływ siły poprzecznej na wielkość ugięcia ujmuje się w teorii wytrzymałości materiałów za pomocą pewnego współczynnika  $k$ , który uwzględnia niejednorodny rozkład naprężeń stycznych wzdłuż wysokości belki

$$(1.8) \quad k = \int_A \frac{S^2(y) A}{I^2 h^2} dA.$$

W naszym przypadku  $k = 6/5 = 1,2$ .

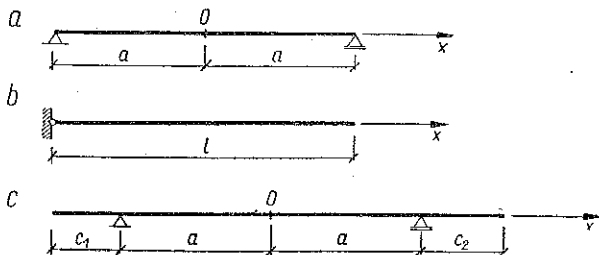
**1.2. Przypadek belki prostej podpartej.** Opis matematyczny występujących w rzeczywistości sposobów podparcia jest trudny do przeprowadzenia. Dlatego też wprowadzamy pewien schemat takiego podparcia, pozwalający na możliwie dobre przybliżenie zjawiska fizycznego.

Z punktu widzenia teorii sprężystości rozważać można trzy typy problemów. :

Pierwszy problem podstawowy, w którym przyjmuje się warunki dla naprężeń na powierzchni belki. W tym przypadku warunki brzegowe podawane są jedynie w celu określenia przemieszczenia ciała sztywnego, przy uwzględnieniu pewnego specjalnego rozkładu reakcji w strefach podparcia belki. Drugi problem podstawowy, w którym przyjmuje się warunki dla przemieszczeń na powierzchni, i problem mieszany, w którym nakłada się warunki zarówno na naprężenia jak i na przemieszczenia. Dwa ostatnie typy problemów występują w przypadku belek-ścian,

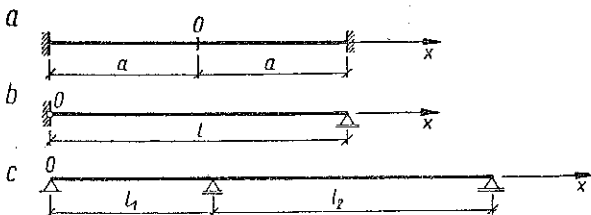
W przypadku zwykłej belki prostej można, z praktycznego punktu widzenia, ograniczyć się do pierwszego problemu podstawowego.

Będziemy również z punktu widzenia wytrzymałości materiałów rozróżniać belki izostaticzne i belki hiperstatyczne. Belkami izostaticznymi są belki podparte swobodnie (rys. 2a), belki wspornikowe (rys. 2c) i wsporniki (rys. 2b). Oprócz



Rys. 2

belek tych można rozważać bardziej skomplikowane systemy izostaticzne, np. belki ciągłe przegubowe (belki Gerbera). Wśród belek hiperstatycznych wymienimy belkę obustronnie utwierdzoną (rys. 3a), belkę utwierdzoną w jednym końcu a swobodnie podpartą w drugim (rys. 3b) i belkę ciągłą (rys. 3c).



Rys. 3

**1.3. Przypadek obciążenia belki prostej.** Będziemy rozróżniali obciążenie zewnętrzne i obciążenie siłami masowymi. Wykorzystane będą również własności symetrii lub antysymetrii obciążenia.

Wyróżnić również można przypadki obciążeń stycznych oraz obciążeń normalnych. Wspomnimy także, iż na gruncie teorii wytrzymałości materiałów przyjmuje się, że obciążenia działają na oś belki (ze statycznego punktu widzenia).

**1.4. Rozwiązania metodami teorii wytrzymałości materiałów.** Na gruncie teorii wytrzymałości naprężenie normalne  $\sigma_x$  określa wzór L. M. H. Naviera (rys. 4a)

$$(1.9) \quad \sigma_x = - \frac{M_x(x)}{I} y;$$

naprężenie  $\sigma_y$  znika

$$(1.9') \quad \sigma_y = 0,$$

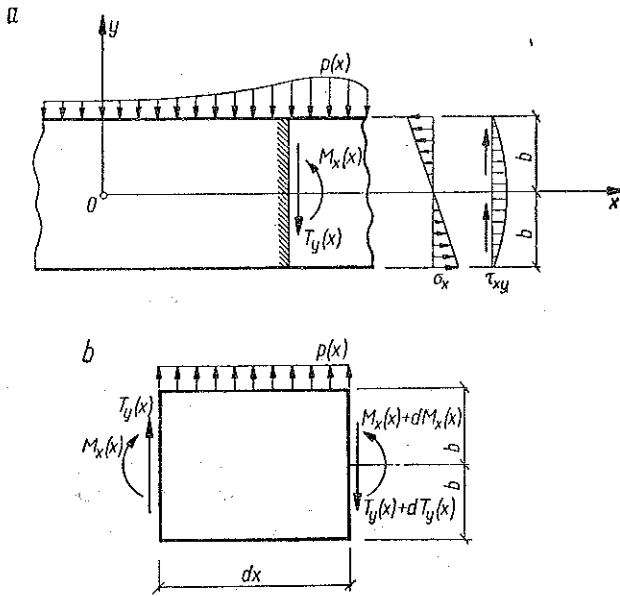
a naprężenie styczne określone jest za pomocą wzoru D. I. Jurawskiego

$$(1.10) \quad \tau_{xy} = -\frac{T_y(x)}{2I}(b^2 - y^2).$$

Wypisując równanie równowagi elementu belki o długości  $dx$  (rys. 4b) otrzymujemy związki różniczkowe pomiędzy siłami i momentami działającymi na przekroju a obciążeniem  $p(x)$  belki (rozpatrywanym jako liczba względna), podobnie jak w teorii sprężystości

$$(1.11) \quad \frac{dT_y(x)}{dx} = p(x),$$

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = T_y(x).$$



Rys. 4

Weźmy pod uwagę odkształcenie elementu belki (rys. 5) uwzględniając założenie J. Bernoulliego: przemieszczenie  $v_P$  jest jednakowe dla wszystkich punktów tego samego przekroju poprzecznego i jest określone przez <sup>1</sup>

$$(1.12) \quad \frac{M_x(x)}{EI} = \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 v_M(x)}{dx^2},$$

gdzie  $\rho$  jest promieniem krzywizny odkształconej warstwy środkowej, a przez  $E$  oznaczono moduł sprężystości podłużnej.

<sup>1</sup> Indeks  $P$  wskazuje, że chodzi tu o wpływ momentu zginającego.

Całkując przy założeniu, że materiał ma te same własności we wszystkich punktach ustalonego przekroju, otrzymamy

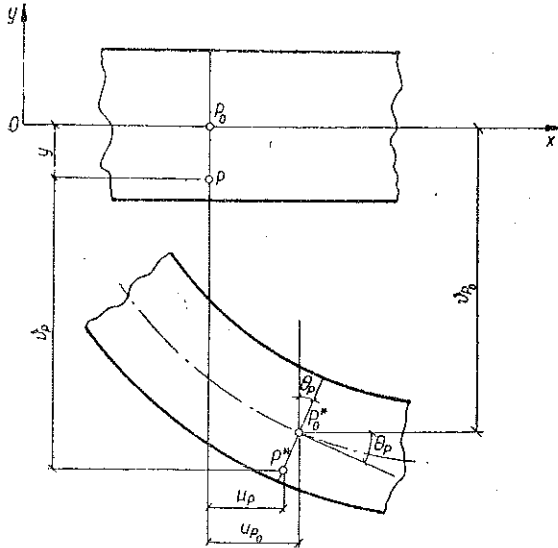
$$(1.13) \quad EI[v(x) - (\omega_0 x + v_0)] = \int dx \int M_x(x) dx.$$

Zauważmy, że

$$(1.14) \quad \theta(x) = -\frac{dv(x)}{dx}$$

jest obrotem przekroju poprzecznego belki.

Podobnie dla przemieszczeń wzdłuż belki otrzymujemy



Rys. 5

$$(1.15) \quad EI[u - (-\omega_0 y + u_0)] = -y \int M_x(x) dx.$$

Stałe  $u_0$ ,  $v_0$  i  $\omega_0$  odpowiadają odpowiednio przemieszczeniom i obrotowi belki rozpatrywanej jako ciało sztywne; określa je sposób podparcia.

Wpływ siły ścinającej na obrót  $\theta$  przekroju belki określony jest przez związek (według teorii S. P. Timoszenki, [35])

$$(1.16) \quad \theta_r(x) = k \frac{T_y(x)}{GA},$$

w którym współczynnik liczbowy  $k$  określony jest wzorem (1.8),

$G$  jest modułem odkształcenia postaciowego, związanym z modułem sprężystości podłużnej wzorem

$$(1.17) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona. Związek (1.14) pozwala na wyznaczenie odpowiadającego tym wielkościom przemieszczenia  $v_T$ . Przemieszczenie  $u_T$  jest zerem.

**1.5. Rozwiązania metodami teorii sprężystości.** Przy korzystaniu z metod teorii sprężystości naprężenia określa się następująco (por. [3], [4]):

$$(1.18) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$(1.18') \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$



gdzie funkcja naprężeń  $F = F(x, y)$  spełnia równanie biharmoniczne

$$(1.19) \quad \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$$

Przemieszczenia określone są za pomocą wzorów

$$(1.20) \quad \begin{aligned} Eu &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(y) + E(-\omega_0 y + u_0), \\ Ev &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} + f_2(x) + E(\omega_0 x + v_0), \end{aligned}$$

przy czym funkcje  $f_1(y)$  i  $f_2(x)$  określa się za pomocą równania o zmiennych rozdzielonych

$$(1.21) \quad \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0.$$

W przypadku występowania sił masowych  $X, Y$  różnych od zera dochodzą jeszcze całki szczególne

$$(1.22) \quad \sigma_x = - \int X dx, \quad \sigma_y = - \int Y dy, \quad \tau_{xy} = 0.$$

W przypadku tym

$$(1.23) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

ma to miejsce na przykład wtedy, gdy siły masowe są stałe (przypadek spotykany często w praktyce). Funkcja  $F$  Airy'ego jest wtedy również funkcją biharmoniczną.

Przypadek sił masowych dowolnych rozważany był w pracach [26] i [29].

Przyjmijmy ogólnie, że wyniki dotyczące naprężeń mają postać

$$(1.24) \quad \sigma_x = \sigma_x^R + \sigma_x^E, \quad \sigma_y = \sigma_y^R + \sigma_y^E,$$

$$(1.24') \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^R + \tau_{xy}^E,$$

gdzie  $\sigma_x^R, \sigma_y^R$  i  $\tau_{xy}^R$  są naprężeniami otrzymanymi metodami wytrzymałościowymi, a  $\sigma_x^E, \sigma_y^E$  i  $\tau_{xy}^E$  są poprawkami uzyskanymi przy użyciu dokładniejszych metod teorii sprężystości.

Zauważmy, że  $\sigma_x^R, \sigma_y^R, \tau_{xy}^R$  nie reprezentują stanu naprężeń możliwego na gruncie teorii sprężystości (naprężenia te, określone równaniami (1.9), (1.9') i (1.10) nie spełniają równań równowagi A. L. Cauchy'ego ani warunku ciągłości M. Lévy'ego); są one jedynie pewnym przybliżeniem rzeczywistego stanu naprężeń. Również układ  $\sigma_x^E, \sigma_y^E$  i  $\tau_{xy}^E$  nie reprezentuje możliwego stanu naprężeń.

Rozważania te prowadzimy po to, aby móc dokonać porównania rezultatów otrzymanych metodami teorii wytrzymałości materiałów i wyników uzyskanych

na gruncie teorii sprężystości, określając jednocześnie zakres stosowalności tych pierwszych.

Stosując podobne rozumowanie możemy również przyjąć, że

$$(1.25) \quad u = u_R + u_E, \quad v = v_R + v_E.$$

Zauważmy, że przemieszczenia  $u_R, v_R$  nie są tymi przemieszczeniami, które na gruncie teorii sprężystości są związane z naprężeniami  $\sigma_x^R, \sigma_y^R, \tau_{xy}^R$ .

**1.6. Metody rachunkowe.** W przypadku belki prostej dobre wyniki dają elementarne metody rachunkowe. Poniżej zbadamy kilka problemów belek prostych wykorzystując wielomiany biharmoniczne lub rozwinięcia w szeregi Fouriera, zbadamy kilka przypadków podparcia i obciążenia. Należy zauważyć, że poza kilkoma przypadkami szczególnymi wykorzystanie wielomianów biharmonicznych prowadzi do rozwiązań przybliżonych, stosowalnych w praktyce jedynie dla pewnych stosunków między wymiarami belki.

Rozwiązania tego typu podane zostały przez A. MESNAGERA, [19], i A. TIMPE'A, [36], około r. 1900. Później inne wyniki podali: R. GRAN OLSSON, [13], I. I. GOLDIENBLAT, [12], i G. WORCH, [39]. Jedno z takich rozwiązań podaliśmy również w pracy [32].

W pracy [27] przeprowadziliśmy dość ogólne badania wielomianów biharmonicznych dwu zmiennych, uwzględniając parzystość lub nieparzystość ze względu na  $x$  lub na  $y$ ; głębsze badania nad tymi wielomianami znajdujemy w książce Z. ZWEILINGA, [40]. Zastosowaliśmy te wyniki w [31], [33] i [34] dla badania belek prostych.

Metody rachunku wariacyjnego zostały wykorzystane w 1889 r. przez M. RIBIÈRE'A, [22], w jego pracy doktorskiej. Badania takie powtórzono w [23] i [24]. Należy zaznaczyć, że nie wszystkie uzyskane rezultaty są zadowalające. Rozważania takie w nieco odmiennej formie powtórzył L. N. G. FILON, [10].

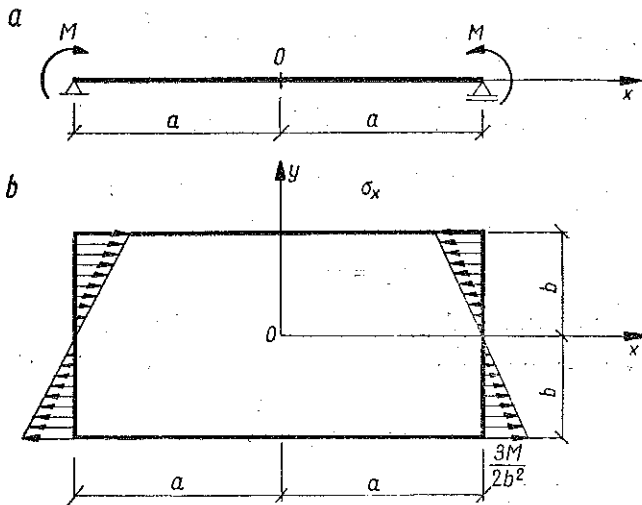
Dalsze badania ujawniły związki między problemem belki długiej i belki-ściany na nieskończonej ilości podpór. Ważniejsze wyniki, wykorzystywane do dziś, uzyskał F. DISCHINGER, [9], w r. 1932. Zaznaczyć należy, że rezultaty te stosują się do belek-ścian jedynie w sposób przybliżony.

Dla belek tego typu należy wykorzystywać inne metody obliczeń, jak np. metod różnic skończonych, [7], [38]. Rozwijając badania K. GIRKMANNNA, [11], i A. S. KALMANOKA, [15], [16], [17], [18], — równocześnie z B. L. ABRAMIANEM, [1], [2], — podaliśmy niedawno, [25], [28], metody obliczania belek-ścian, stosowalne dla dowolnego sposobu podparcia (belki podparte swobodnie lub belki utwierdzone) i dowolnego obciążenia. W metodzie tej wykorzystuje się szeregi Fouriera. Metody rachunkowe podane zostały przez G. GRÜNINGA, [14], W. VALENTINA, [37], i przez nas, [27].

Później, w 1949 r., G. WORCH, [39], podjął szczegółowe badania naprężeń oraz stanu odkształcenia belki prostej. Porównał on pewne wyniki wyrażające się wielomianami, otrzymane na gruncie teorii sprężystości, z rezultatami uzyskanymi metodami wytrzymałości materiałów. Jest to pierwsza znana nam obszerniejsza praca z tej dziedziny.

W roku 1955 A. CIŚMIGIU, [8], zaproponował następującą klasyfikację techniczną belek prostych: belki długie (dla których  $\lambda > 5$ ), belki średniej długości ( $2 \leq \lambda \leq 5$ ) i belki krótkie ( $\lambda < 2$ ).

Ostatnio D. MORGENSTERN, [20], przeprowadził również badania przybliżeń uzyskiwanych w oparciu o hipotezę J. Bernoulliego. I. BABUŠKA i M. PRAGER, [5], badali możliwości sprowadzenia problemów o wielu wymiarach do problemów o mniejszej ilości wymiarów, przy czym redukcję tę przeprowadzono z możliwie najlepszym przybliżeniem (jeden z typów takiej redukcji przeprowadza się metodami wytrzymałości materiałów). R. BABUŠKOWA, [6], zastosowała tę ideę do problemu zginania belki prostej.



Rys. 6

Poniżej będziemy stosowali metody elementarne teorii sprężystości do badania różnych typów belek. Rezultaty porównywać będziemy z rezultatami uzyskanymi metodami wytrzymałości materiałów.

## 2. Belka prosta podparta swobodnie. Rozwiązania przy użyciu wielomianów biharmonicznych

Przeprowadzimy badania belki prostej podpartej swobodnie z punktu widzenia różnych możliwych typów obciążenia. Każdy typ obciążenia zawiera z rachunkowego punktu widzenia pewne osobliwości.

2.1. Obciążenie momentami na końcach belki. Zbadamy przypadek belki prostej podpartej swobodnie, na której końcach przyłożone są momenty, zarówno ze względu na to, że przypadek ten jest sam w sobie interesujący, jak i na to, że otrzymane rezultaty mogą posłużyć do badania innych przypadków podparcia i obciążenia.

Przypadek zginania czystego belki (rys. 6a) można badać przy pomocy jednowymiaru biharmonicznego trzeciego stopnia. Funkcją naprężeń będzie zatem

$$(2.1) \quad F = -\frac{M}{4}\eta^3.$$

Naprężenia są następujące

$$(2.2) \quad \sigma_x = -\frac{3M}{2b^2}\eta, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0;$$

rozkład ich przedstawiony jest na rysunku 6b.

Składowymi przemieszczenia są

$$(2.3) \quad E[u - (\omega_0 y + u_0)] = -\frac{3M}{2b^3}xy = -\frac{M}{I}xy,$$

$$E[v - (\omega_0 x + v_0)] = \frac{3M}{4b^3}(x^2 + \nu y^2) = \frac{M}{2I}(x^2 + \nu y^2).$$

We wzorach tych wykorzystaliśmy uprzednio wprowadzone oznaczenia.

Z symetrii przemieszczenia względem osi  $Oy$  wynika

$$(2.4) \quad u_0 = \omega_0 = 0.$$

Jeśli belka jest podparta punktowo w środkach przekrojów końcowych, możemy napisać wykorzystując warunki podparcia swobodnego  $u(\pm a, 0) = 0, v(\pm a, 0) = 0$

$$(2.4') \quad v_0 = -\frac{3Ma^2}{4Eb^3}.$$

Przemieszczeniami będą

$$(2.5) \quad u = -\frac{3M}{2Eb^3}xy = -\frac{M}{EI}xy,$$

$$v = -\frac{3M}{4Eb^3}(a^2 - x^2 - \nu y^2) = -\frac{M}{2EI}(a^2 - x^2 - \nu y^2).$$

Gdyby belka była podparta w punktach  $(x = \pm a, y = -b)$ , to otrzymalibyśmy<sup>2</sup>

$$(2.4'') \quad v'_0 = -\frac{3M}{4Eb^3}(a^2 + \nu b^2),$$

a przemieszczenie  $v'$  określone byłoby za pomocą wzoru<sup>3</sup>

$$(2.5') \quad v' = -\frac{M}{2EI}[a^2 - x^2 + \nu(b^2 - y^2)].$$

<sup>2</sup> Będziemy odróżniali za pomocą przecinków różne sposoby podparcia.

<sup>3</sup> Aby przemieszczenie  $u'$  było zerem w jednym z punktów podparcia, przyjmuje się  $u'_0 \neq 0$ .

Dodatkowy wyraz występujący w wyrażeniu określającym przemieszczenie  $v'$  reprezentuje odkształcenie liniowe belki wzdłuż wysokości przekroju podparcia

$$(2.6) \quad v'(a, 0) = -\frac{3\nu M}{4Eb}$$

Równanie odkształconej warstwy środkowej można napisać w postaci

$$(2.7) \quad v'(x, 0) = -\frac{M}{2EI}(a^2 + \nu b^2 - x^2),$$

a maksymalne ugięcie dane jest przez

$$(2.8) \quad f = -v'(0, 0) = \frac{M}{2EI}(a^2 + \nu b^2),$$

przy czym ugięcie w dół, tak jak w wytrzymałości materiałów, uważamy za dodatnie.

Stosunek  $v'(a, 0)$  do maksymalnego ugięcia  $v'(0, 0)$  wynosi

$$(2.9) \quad \frac{v'(a, 0)}{v'(0, 0)} = \frac{\nu b^2}{a^2 + \nu b^2} = \frac{1}{1 + \lambda^2/\nu}$$

Wyniki (w procentach) w zależności od stosunku  $\lambda$  i współczynnika Poissona  $\nu$  zestawione są w tabelcy 1. Dochodzimy do wniosku, że wpływ odkształcenia liniowego w przekroju podparcia można praktycznie pominąć dla zwykle stosowanych do wyrobu belek materiałów (dla betonu zbrojonego przyjmuje się  $\nu = 1/6$ , a dla metali  $\nu = 0,3$ ).

Tablica 1

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1/6	4,0	1,8	1,0	0,7	0,2
0,3	7,0	3,2	1,8	1,2	0,3
0,5	11,1	5,3	3,0	2,0	0,5

Wzory (1.9), (1.9') i (1.10) prowadzą również do związków (2.2). Zatem wyniki otrzymane w teorii wytrzymałości materiałów dotyczące stanu naprężeń są poprawne również w teorii sprężystości.

Jeśli chodzi o stan odkształceń, to widać, że przemieszczenie  $u$  określone związkiem (1.15) jest również takie samo (rys. 7a) <sup>4</sup>. Ponieważ siła poprzeczna znika, więc dla składowej  $v$  przemieszczenia otrzymujemy

$$(2.10) \quad v_R = -\frac{M}{2EI}(a^2 - x^2).$$

W przypadku tym

$$(2.10') \quad v_E = \frac{\nu M}{2EI}y^2, \quad v'_E = -\frac{\nu M}{2EI}(b^2 - y^2).$$

W pierwszym przypadku metody wytrzymałościowe dają to samo (w porównaniu z metodami teorii sprężystości) przemieszczenie  $v$  warstwy środkowej ( $y = 0$ ) i większe przemieszczenia dla warstw zewnętrznych ( $y = \pm b$ ). W przypadku drugim uzyskujemy mniejsze przemieszczenie dla warstwy środkowej i te same przemieszczenia dla warstw zewnętrznych (rys. 7b) <sup>5</sup>.

Zauważmy, że za pomocą metod teorii sprężystości otrzymuje się maksymalną poprawkę ze wzoru (2.9) i z tablicy 1, którą można pominąć z punktu widzenia technicznego.

Zwróćmy uwagę na to, że wyrażenie  $v(x, y_0)$  nie podaje równania warstwy odkształconej będącej obrazem nieodkształconej warstwy  $y = y_0 = \text{const}$ . Rzeczywiście, przyjmując za współrzędne ciała odkształconego

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x^* &= x + u = x \left(1 - \frac{M}{EI}\right)y, \\ y^* &= y + v = y - \frac{M}{2EI}(a^2 - x^2 - \nu y^2), \end{aligned}$$

znajdujemy równania parametryczne  $x^* = x^*(x, y)$ ,  $y^* = y^*(x, y)$  punktu ciała nieodkształconego. Eliminując  $x$  z równań (2.11) znajdujemy, że warstwa  $y = y_0$  przechodzi w

$$(2.12) \quad y^* = y_0 - \frac{M}{2EI}(a^2 - \nu y_0^2) + \frac{MEIx^{*2}}{2(EI - My_0^2)}.$$

Zauważmy, że równanie warstwy środkowej odkształconej ( $y_0 = 0$ ) jest poprawnie określone w tym przypadku przez równanie (2.10). Jednakże warstw zdeformowanych odpowiadających nie zdeformowanym warstwom  $y_0 = \pm b$  (brzegowym, górnej i dolnej) nie można uzyskać w ten sposób; widoczny jest wpływ składowej  $u$  odkształcenia.

<sup>4</sup> Wielkości przemieszczeń na przekroju  $x = \text{const}$  zaznaczone są tak, że ukazują rzeczywisty sens przemieszczenia.

<sup>5</sup> Wielkości przemieszczeń na przekroju  $y = \text{const}$  zaznaczone są tak, że pokazują rzeczywisty sens przemieszczenia.

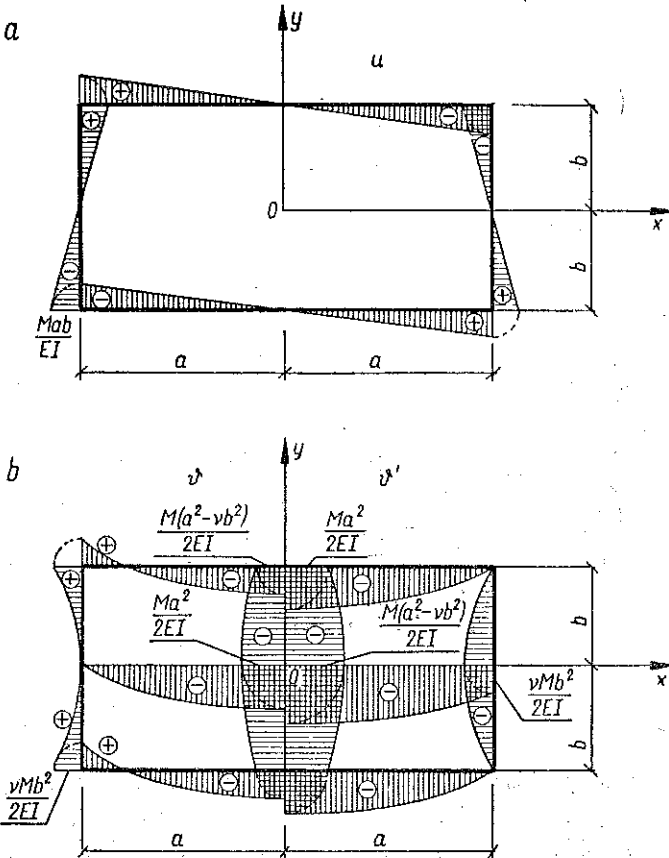
Różnica między równaniem (2.12) i równaniem uzyskanym ze związku (2.5) wyraża się we współczynniku przy  $x^2$  poprawką

$$\frac{M}{2EI} - \frac{MEI}{2(EI - My_0)^2} = \frac{M}{2EI} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{My_0}{EI}\right)^2} \right]$$

Widzimy przy tym, że

$$(2.13) \quad \frac{u(x, y_0)}{x} = - \frac{My_0}{EI}$$

Przy założeniu przemieszczeń małych względem wymiarów ciała powyższą poprawkę można pominąć.



Rys. 7

Biorąc pod uwagę przekrój  $x = x_0 = \text{const}$  i eliminując parametr  $y$  z równań (2.11) otrzymujemy

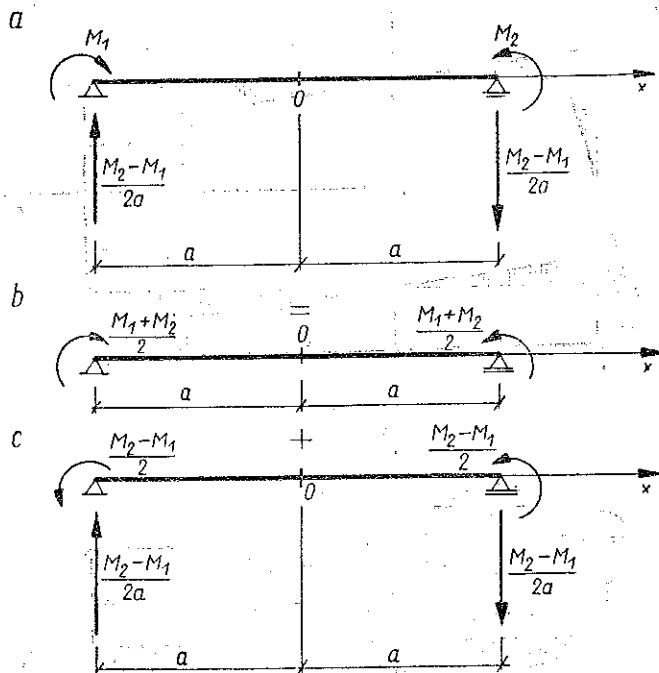
$$(2.14) \quad y^* = - \frac{M}{2EI} (a^2 - x_0^2) - \frac{EI}{Mx_0} (x^* - x_0) + \frac{vEI}{2Mx_0^2} (x^* - x_0)^2$$

Zatem założenie J. Bernoulliego spełnione jest w sposób ścisły jedynie na przekroju  $x_0 = 0$  z powodu symetrii. Ogólnie mówiąc przekrój płaszczyzną prostopadłą przekształca się w wycinek powierzchni walca parabolicznego.

Zauważmy, że dwa ostatnie wyrazy związku (2.14) można napisać w postaci

$$-\frac{EI}{Mx_0}(x^* - x_0) \left[ 1 - \frac{y}{2} \frac{x^* - x_0}{x_0} \right].$$

Biorąc pod uwagę, że  $x^* - x_0 = u(x_0, y)$  oraz przyjmując założenie małych odkształceń sformułowane powyżej możemy pominąć wyrażenia nieliniowe w związku (2.14). Powiedzieć możemy wobec tego, że założenie Bernoulliego spełnione jest w sposób przybliżony.



Rys. 8

Przedyskutowaliśmy dość szeroko przypadek zginania zwykłego, który jest jednym z ważniejszych przypadków obciążenia; choć jest to przypadek elementarny, to zawiera on w sobie problemy różniące się z punktu widzenia stanu naprężeń i stanu odkształceń, problemy, które na ogół nie są rozważane.

Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek belki prostej poddanej działaniu momentów  $M_1$  i  $M_2 > M_1$  na końcach (rys. 8a). Rozkładając ten przypadek według własności symetrii względem środka 0 otrzymamy zginanie czyste (obciążenie symetryczne) (rys. 8b) oraz przypadek obciążenia przedstawiony na rys. 8c (obciążenie antysymetryczne).



Wzmy ten ostatni przypadek obciążenia w postaci danej na rysunku 9a. Wykorzystamy funkcję Airy'ego

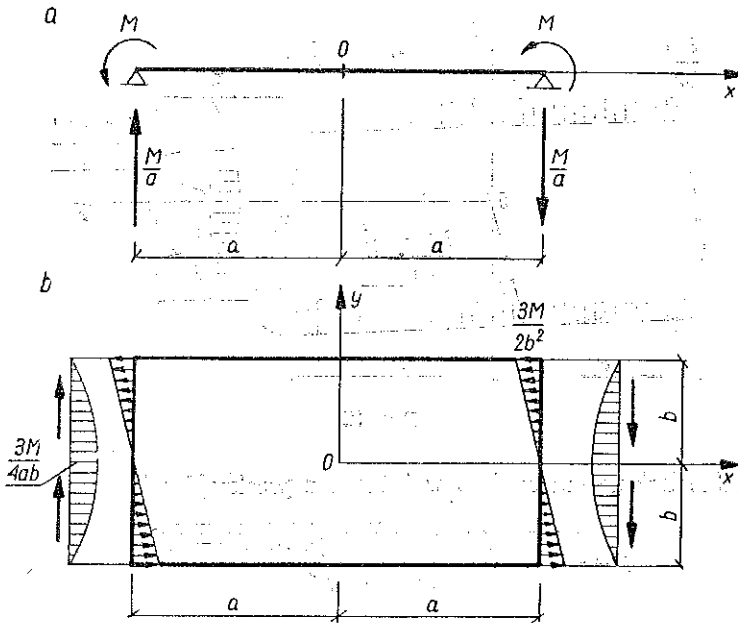
$$(2.15) \quad F = \frac{M}{4} \xi \eta (3 - \eta^2).$$

Stan naprężeń (rys. 9b) określony jest przez

$$(2.16) \quad \sigma_x = -\frac{3M}{2b^2} \xi \eta, \quad \sigma_y = 0,$$

$$(2.16') \quad \tau_{xy} = -\frac{3M}{4ab} (1 - \eta^2).$$

Widzimy, że rezultaty otrzymane odpowiadają rezultatom, które dają metody wytrzymałości materiałów. W analogiczny sposób znajdujemy przemieszczenia:



Rys. 9

Superponując efekty dwu rodzajów obciążeń uzyskujemy wyniki odpowiadające przypadkowi obciążenia, podanemu na rysunku 8a. Stan naprężeń (rys. 10) będzie zatem dany przez

$$(2.17) \quad \sigma_x = -\frac{3}{4b^2} [(1 - \xi) M_1 + (1 + \xi) M_2],$$

$$\sigma_y = 0,$$

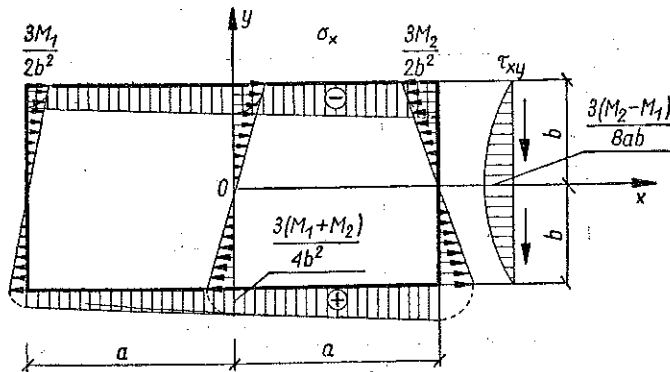
$$(2.17') \quad \tau_{xy} = -\frac{3}{8ab} (M_2 - M_1) (1 - \eta^2).$$

W przypadku podparcia w środkach przekrojów końcowych otrzymujemy przemieszczenia

$$(2.18) \quad E \frac{u}{a} = \frac{\eta}{8b^2} \{M_1 \{ \lambda'^2 [6(1+\nu) - (2+\nu)\eta^2] - (1+6\xi - 3\xi^2) \} - \\ - M_2 \{ \lambda'^2 [6(1+\nu) - (2+\nu)\eta^2] - (1 - 6\xi - 3\xi^2) \} \}, \\ E \frac{v}{b} = -\frac{1}{8b^2} \{M_1 (1-\xi) [\lambda^2 (1+\xi)(3-\xi) - 3\nu\eta^2] + \\ + M_2 (1+\xi) [\lambda^2 (1-\xi)(3+\xi) - 3\nu\eta^2] \}.$$

Równaniem warstwy środkowej odkształconej będzie

$$(2.19) \quad E \frac{v(x, 0)}{b} = -\frac{\lambda^2}{8b} (1-\xi^2) [(3-\xi)M_1 + (3+\xi)M_2].$$



Rys. 10

Maksymalne ugięcie ma miejsce w jednym z przekrojów

$$(2.20) \quad \xi = \frac{3(M_1 + M_2) \pm 2\sqrt{3(M_1^2 + M_1M_2 + M_2^2)}}{3(M_1 - M_2)}$$

i wynosi

$$(2.21) \quad f = -\frac{\lambda^2}{Eb(M_1 - M_2)^2} \left\{ M_1 M_2 (M_1 + M_2) \pm \frac{2}{27} [3(M_1^2 + M_1M_2 + M_2^2)]^{3/2} \right\}.$$

W podobny sposób zbadać można stan odkształceń w tym ogólniejszym przypadku obciążenia.

2.2. Obciążenia rozłożone w sposób ciągły. Rozważmy przypadek, w którym obciążenie  $p(x)$  można określić za pomocą funkcji ciągłej i pochodnej ciągłej na górnej lub dolnej powierzchni belki.

Rozpatrzmy przypadek belki podpartej swobodnie, poddanej działaniu obciążenia rozłożonego równomiernie na górnej powierzchni belki (rys. 11a). Obciążenie

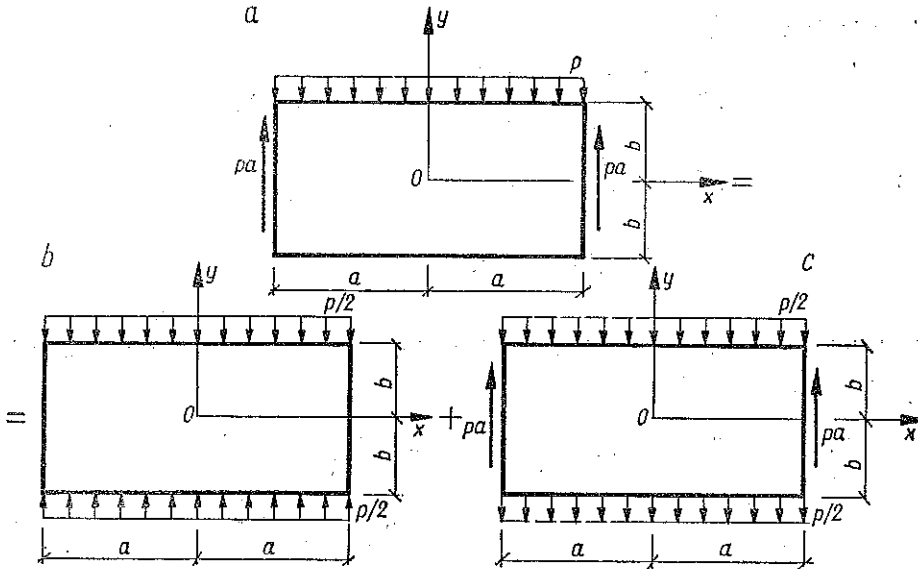
to będziemy uważali za złożenie dwu rodzajów obciążenia z uwagi na symetrię względem osi  $Ox$ : ściskania belki w kierunku  $Oy$  (rys. 11b — obciążenie symetryczne) i zginania (rys. 11c — obciążenie antysymetryczne).

W pierwszym przypadku funkcja Airy'ego

$$(2.22) \quad F' = -\frac{p}{4}x^2$$

określa naprężenia

$$(2.23) \quad \sigma'_x = 0, \quad \sigma'_y = -\frac{p}{2}, \quad \tau'_{xy} = 0.$$



Rys. 11

W przypadku drugim wybieramy wielomian biharmoniczny nieparzysty ze względu na  $y$ , parzysty ze względu na  $x$

$$(2.24) \quad F''(x, y) = \gamma_3 x^2 y + \delta_3 y^3 + \gamma_5 (x^4 y - x^2 y^3) + \delta_5 (y^5 - 5x^2 y^3),$$

który określa naprężenia

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \sigma''_x &= 6\delta_3 y - 6\gamma_5 x^2 y + \delta_5 (20y^3 - 30x^2 y), \\ \sigma''_y &= 2\gamma_3 y + \gamma_5 (12x^2 y - 2y^3) - 10\delta_5 y^3, \\ \tau''_{xy} &= -2\gamma_3 x + \gamma_5 (-4x^3 + 6xy^2) + 30\delta_5 xy^2. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe mają postać

$$(2.26) \quad \sigma_y'' = -\frac{p}{2}, \quad \tau_{xy}'' = 0, \quad \text{gdy } y = b;$$

$$(2.26') \quad \bar{N}_x'' = 0, \quad \bar{T}_y'' = -pa, \quad \bar{M}_x'' = 0, \quad \text{gdy } x = a.$$

Stąd znajdujemy następujące wartości parametrów

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \gamma_3 &= -\frac{3p}{8b}, & \delta_3 &= \frac{p}{8b} \left( \frac{2}{5} - \lambda^2 \right), \\ \gamma_5 &= 0, & \delta_5 &= -\frac{p}{40b^3}. \end{aligned}$$

Naprężenia wynoszą

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \sigma_x'' &= \frac{3p}{4b} \left( \frac{2}{5} - \lambda^2 \right) y - \frac{p}{4b^3} (2y^3 - 3x^2y), \\ \sigma_y'' &= -\frac{p}{4b^3} (3b^2 - y^2) y, \\ \tau_{xy}'' &= \frac{3p}{4b^3} (b^2 - y^2) x. \end{aligned}$$

Nakładając efekty dwu rodzajów widzimy, że stan naprężeń można przedstawić w postaci (1.24), (1.24'), gdzie

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{3p}{4} \lambda^2 (1 - \xi^2) \eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta), \\ \tau_{xy}^R &= \tau_{xy} = \frac{3p}{4} \lambda (1 - \eta^2) \xi, & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Wiemy, że naprężenia określane metodami wytrzymałościowymi zmieniają się wzdłuż belki w zależności od momentu zginającego  $M_x(x)$  i siły poprzecznej  $T_y(x)$  (rys. 12)

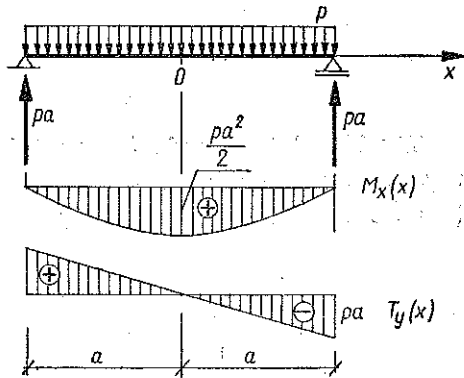
$$(2.30) \quad \begin{aligned} M_x(x) &= \frac{p}{2} (a^2 - x^2) = \frac{pa^2}{2} (1 - \xi^2), \\ T_y(x) &= -px = -pa\xi. \end{aligned}$$

W przekroju poprzecznym  $x = \text{const}$  do zmieniającego się liniowo wzdłuż wysokości przekroju naprężenia  $\sigma_x^R$  dodajemy poprawkę  $\sigma_x^E$  stałą wzdłuż całej belki

(rys. 13a). Wpływ tej poprawki na maksymalne naprężenie normalne określa stosunek

$$(2.31) \quad \frac{\sigma_x^E(0,1)}{\sigma_x(0,1)} = \frac{1}{1 + 3,75 \lambda^2}$$

W tablicy 2 zestawione są (wyrażone w procentach) wartości tego stosunku dla różnych wartości  $\lambda$ . Widać, że wpływ tej poprawki jest mały. Widać również, że wpływ poprawki  $\sigma_x^E$  jest mały. Jednakże poprawka ta nie może być stała, ponieważ zmniejsza się w pobliżu końców belki, na których musi być zerem. Dla przekrojów końcowych ( $\xi = \pm 1$ ) warunki brzegowe nałożone zostały w sposób całkowy (przy rozważaniu sił i momentów działających na przekroje). W rzeczywistości musimy mieć  $\sigma_x(\pm 1, \eta) = 0$ . Zasada Saint Venanta pozwala dokonać tego przybliżenia tak, że błędy występują jedynie w strefach bliskich końcom belki. Aby uzyskać poprawne rezultaty, musimy ze stanem naprężeń określonym wzorami (2.29) superponować dający się pominąć stan naprężeń przedstawiony na rys. 14.



Rys. 12

Naprężenia  $\sigma_y$  będą takie same w każdym przekroju poprzecznym (rys. 13b), przy czym zmieniają się wzdłuż przekroju w sposób prawie liniowy.

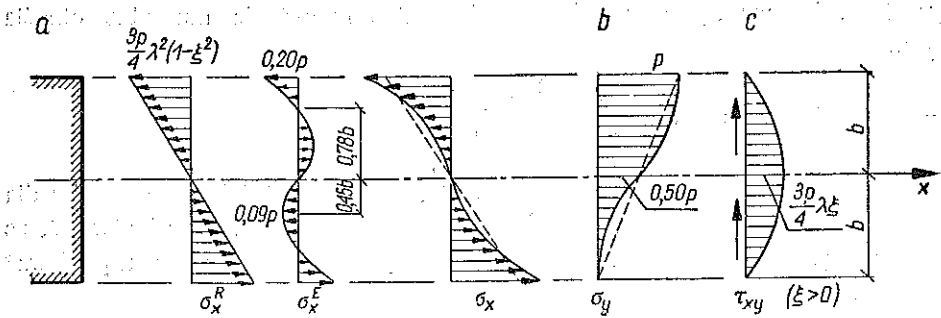
Tablica 2

$\lambda$	2	3	4	5	10
$\frac{\sigma_x^E(0,1)}{\sigma_x(0,1)}$	6,25	2,88	1,64	1,05	0,25

Rozważmy stosunek

$$(2.32) \quad \frac{\sigma_y(\xi, 1)}{\sigma_x(0,1)} = \frac{1}{0,2 + 0,75 \lambda^2}$$

którego wartości (w procentach) dla różnych  $\lambda$  zestawione są w tablicy 3. Zauważmy, że dla  $\lambda > 4$  można praktycznie pominąć  $\sigma_y$  w stosunku do  $\sigma_x$ . Przy badaniu zmienności naprężeń w otoczeniu punktów belki (kierunki główne i naprężenia normalne główne) można dokonać tego dopiero dla  $\lambda > 5$  (przy wyłączeniu końców belki) lub dopiero dla  $\lambda > 10$ .

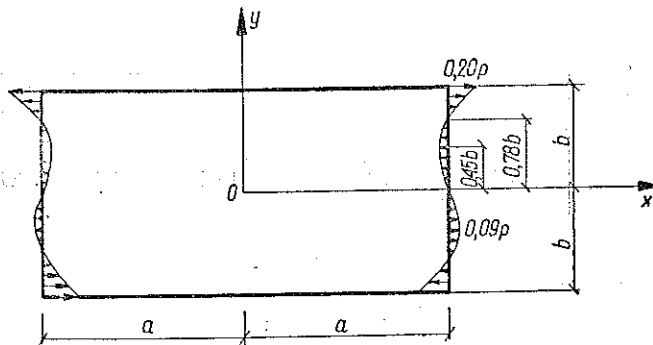


Rys. 13

W tablicach 2 i 3 podaliśmy wartości jedynie dla  $\lambda \geq 2$ ; dla innych wartości  $\lambda$  uzyskamy, zgodnie z zasadą Saint Venanta, wyniki dalekie od rzeczywistości (lub też wyniki, które należałoby sprawdzić metodami dokładniejszymi).

Tablica 3

$\lambda$	2	3	4	5	10
$\frac{\sigma_y(\xi, 1)}{\sigma_x(0, 1)}$	31,25	14,40	8,20	5,25	1,25



Rys. 14

Napężenie  $\tau_{xy}$  zmienia się w sposób paraboliczny wzdłuż wysokości belki (rys. 13c) i jest takie samo, jak napężenie określone wzorem Jourawskiego w teorii wytrzymałości. W przekrojach końcowych belki napężenie to odpowiada podparciu belki za pomocą tarcia bocznego.

Obliczenia przemieszczeń dają

$$(2.33) \quad E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = \frac{p}{4b^3} \left\{ 3 \left[ \left( \frac{2}{5} + \nu \right) b^2 - a^2 \right] + \right. \\ \left. + x^2 - (2 + \nu) y^2 \right\} xy + \frac{\nu}{2} px,$$

$$E[v - (\omega_0 x + v_0)] = \frac{p}{4b^3} \left\{ 3 \left[ \frac{\nu}{2} (a^2 - x^2) - \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu}{5} \right) b^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \nu \right) y^2 \right\} y^2 - \frac{p}{2} y + \frac{3p}{8b^3} \left[ a^2 + \left( \frac{8}{5} + \nu \right) b^2 - \frac{x^2}{6} \right] x^2.$$

Z warunków symetrii mechanicznej względem osi  $Oy$  wynika, że

$$(2.34) \quad \omega_0 = 0.$$

W przypadku podparcia swobodnego przekrojów końcowych ( $v = 0$  dla  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ ) znajdujemy przemieszczenie ciała sztywnego

$$(2.34') \quad v_0 = -\frac{3pa^2}{8Eb^3} \left[ \frac{5}{6} a^2 + \left( \frac{8}{5} + \nu \right) b^2 \right],$$

skąd otrzymujemy

$$(2.35) \quad E \frac{u}{a} = \frac{p}{4} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} + \nu \right) - \lambda^2 (3 - \xi^2) - (2 + \nu) \eta^2 \right] \xi \eta + \frac{\nu}{2} p \xi, \\ E \frac{v}{b} = \frac{p}{4} \left\{ 3 \left[ \frac{\nu}{2} \lambda^2 (1 - \xi^2) - \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu}{5} \right) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right\} \eta^2 - \\ - \frac{p}{2} \eta - \frac{3p}{8} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[ \frac{\lambda^2}{6} (5 - \xi^2) + \frac{8}{5} + \nu \right].$$

Ponieważ przemieszczenie  $u$  nie może zniknąć jednocześnie w obu punktach podparcia, przyjęliśmy (ze względu na symetrię)

$$(2.34'') \quad u_0 = 0.$$

Dla warstwy środkowej otrzymujemy

$$(2.36) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = -\frac{3p}{8} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[ \frac{\lambda^2}{6} (5 - \xi^2) + \frac{8}{5} + \nu \right],$$

a ugięcie maksymalne określone jest przez

$$(2.37) \quad f = -v(0, 0) = \frac{3pb}{8E} \lambda^2 \left( \frac{5}{6} \lambda^2 + \frac{8}{5} + \nu \right).$$

Rezultaty odpowiadające wytrzymałości materiałów przyjmują przy tych samych warunkach brzegowych postać

$$(2.38) \quad E \frac{u_R}{a} = -\frac{p}{4} \lambda^2 (3 - \xi^2) \xi \eta, \quad v_R = v_M + v_T,$$

oraz

$$(2.38') \quad E \frac{v_M}{b} = -\frac{p}{16} \lambda^4 (1 - \xi^2) (5 - \xi^2),$$

$$E \frac{v_T}{b} = -0,6(1+\nu) p \lambda^2 (1 - \xi^2).$$

Ugięcie maksymalne określone jest przez

$$(2.39) \quad f_R = f_M + f_T,$$

gdzie

$$(2.39') \quad f_M = \frac{5pb}{16E} \lambda^4, \quad f_T = 0,6(1+\nu) \frac{pb}{E} \lambda^2.$$

Dla porównania wpływu działania sił poprzecznych z działaniem momentu zginającego w powyższych wzorach zbadamy iloraz

$$(2.40) \quad \frac{f_T}{f_M} = 1,92 \frac{1+\nu}{\lambda^2},$$

którego wartości procentowe, zależne od wartości  $\lambda$  i  $\nu$ , podane są w tabelcy 4.

Tablica 4

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	48	21	12	8	2
1/6	56	25	14	9	2
0,3	63	28	16	10	3
0,5	72	32	19	12	3

Obliczymy również stosunek

$$(2.41) \quad \frac{f_T}{f_R} = \frac{1}{1 + \frac{f_M}{f_T}} = \frac{1}{1 + \frac{5\lambda^2}{9,6(1+\nu)}},$$

którego procentowe wartości podane są w tabelcy 5



Zauważmy, że dla  $\lambda \leq 5$  wpływ sił poprzecznych staje się istotny — co musimy wziąć pod uwagę; przy  $\lambda = 2$  składowa ugięcia pochodząca od sił poprzecznych stanowi więcej niż trzecią część ugięcia całkowitego.

Tablica 5

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	33	18	11	7	2
1/6	36	20	12	8	2
0,3	39	22	14	9	2
0,5	42	24	15	10	3

Porównując równanie warstwy środkowej zdeformowanej (2.38) i (2.38'), uzyskane metodami wytrzymałości materiałów, z równaniem (2.36), znalezionym na gruncie teorii sprężystości, można wyróżnić wpływ momentu zginającego (pierwszy składnik prawej strony). Pozostałe czynniki (siły poprzeczne, naprężenie  $\sigma_y$  itd.) zawarte są w równaniu

$$(2.42) \quad E \frac{v - v_M}{b} = -0,6 \left( 1 + \frac{5\nu}{8} \right) p \lambda^2 (1 - \xi^2).$$

Obliczając dla różnych  $\nu$  stosunek

$$(2.43) \quad \frac{v - v_M}{v_T} = 1 - \frac{3\nu}{8(1+\nu)},$$

(którego wyrażone w procentach wartości podane są w tabl. 6) zauważamy, że uwzględnienie uzyskanego w teorii wytrzymałości wpływu sił poprzecznych daje wystarczająco dobre przybliżenie dla zdeformowanej warstwy środkowej, niezależnie od  $\lambda$  (stosunku pomiędzy wymiarami belki).

Tablica 6

$\nu$	0	1/6	0,3	0,5
$\frac{v - v_M}{v_T}$	1,000	0,947	0,914	0,875

Metodami teorii sprężystości otrzymujemy dla składowych przemieszczenia poprawkę

$$(2.44) \quad E \frac{u_E}{a} = \frac{P}{4} \left[ 3 \left( \frac{2}{5} + \nu \right) - (2 + \nu) \eta^2 \right] \xi \eta + \frac{\nu}{2} p \xi,$$

$$E \frac{v_E}{b} = \frac{P}{4} \left\{ 3 \left[ \frac{\nu}{2} \lambda^2 (1 - \xi^2) - \left( \frac{1}{2} + \frac{\nu}{5} \right) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right\} \eta^2 -$$

$$- \frac{P}{2} \eta + 0,225 \nu p \lambda^2 (1 - \xi^2),$$

Maksymalną wartość składowej  $u$  przemieszczenia uzyskujemy dla końców belki

$$(2.45) \quad u_R(1, \pm 1) = \mp \frac{pa}{2E} \lambda^2, \\ u_E(1, -1) = 0,2 \frac{pa}{E}, \quad u_E(1, 1) = (\nu - 0,2) \frac{pa}{E}.$$

Zauważmy, że poprawka uzyskana na gruncie teorii sprężystości spełnia nierówność

$$(2.46) \quad |u_E(1, \pm 1)| \leq 0,3 \frac{pa}{E}$$

dla wszystkich możliwych w rzeczywistości wartości współczynnika Poissona; dla  $\nu \leq 0,4$  otrzymamy przemieszczenie

$$(2.47) \quad u_E(\pm 1, 1) = \pm 0,2 \frac{pa}{E},$$

odpowiadające punktom dolnej krawędzi belki.

Badając iloraz

$$(2.48) \quad \frac{|u_E(1, \pm 1)|}{|u_R(1, \pm 1)|} = \frac{0,4}{\lambda^2} \quad \text{lub} \quad \frac{0,6}{\lambda^2},$$

którego wartości (w procentach) zestawione są w tabelicy 7, stwierdzamy, że poprawka uzyskana na gruncie teorii sprężystości jest mała dla  $\lambda \geq 3$  i zaczyna gwałtownie wzrastać dla mniejszych  $\lambda$ . Wyrażone w procentach wartości stosunku

$$(2.49) \quad \frac{|u_{\max}|}{f} = \frac{4\lambda^2 + 1,6}{\lambda(2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu)} \quad \text{lub} \quad \frac{4\lambda^2 + 2,4}{\lambda(2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu)}$$

podane są w tabelicy 8. Można zauważyć, że przemieszczenie wzdłuż belki jest dość duże w pewnych punktach i nie może być w rachunku pominięte.

Tablica 7

$\lambda$	2	3	4	5	10
$ u_E(1, \pm 1) $	10,00; 15,00	4,46; 6,67	2,50; 3,75	1,60; 2,40	0,40; 0,60
$ u_R(1, \pm 1) $					

Jeśli chodzi o przemieszczenie  $v$ , to wystarczy znać zachowanie się warstwy środkowej belki ( $\eta = 0$ ), a dokładniej maksymalne przemieszczenie  $f$  odpowiadające środkowemu przekrojowi belki ( $\xi = 0$ ). Zauważmy tu, że  $f_E$  jest liczbą ujemną, zatem ugięcie obliczone na gruncie wytrzymałości materiałów jest większe od rzeczywistego.

Rozpatrzmy stosunek (procentowe wartości w tabl. 9)

$$(2.50) \quad \frac{f_E}{f} = \frac{1,8\nu}{2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu}$$

Widać, że wpływ poprawki uzyskanej w teorii sprężystości można praktycznie pominąć. Można więc w tym przypadku skutecznie stosować wyniki teorii wytrzymałości materiałów.

Tablica 8

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	59	46	37	30	16
1/6	57	45	36	30	16
0,3	56	44	36	30	16
0,5	56	44	36	30	16

Tablica 9

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1/6	1,96	1,08	0,66	0,45	0,12
0,3	3,44	1,92	1,18	0,79	0,21
0,5	5,52	3,12	1,94	1,31	0,35

Dla warstw zewnętrznych uzyskujemy przemieszczenia

$$(2.51) \quad E \frac{v(\xi, 1) - v(\xi, 0)}{b} = \frac{p}{4} [1,5\nu\lambda^2(1 - \xi^2) - 3,25 - 0,10\nu],$$

$$E \frac{v(\xi, -1) - v(\xi, 0)}{b} = \frac{p}{4} [1,5\nu\lambda^2(1 - \xi^2) + 0,75 - 0,10\nu].$$

Aby zbadać różnice pomiędzy przemieszczeniami warstw zewnętrznych i warstwy środkowej w przekroju środkowym belki, obliczymy stosunki

$$(2.52) \quad \frac{v(0, 1) - v(0, 0)}{v(0, 0)} = \frac{6,5 - \nu(3\lambda^2 - 0,2)}{\lambda^2(2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu)},$$

$$\frac{v(0, -1) - v(0, 0)}{v(0, 0)} = \frac{1,5 + \nu(3\lambda^2 - 0,2)}{\lambda^2(2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu)}$$

Wartości liczbowe stosunków tych podane są w tablicach 10 i 11 w zależności od różnych wartości  $\lambda$  i  $\nu$ . Gdy jeden z tych stosunków jest zerem, to punkty odpowiadające mu warstwy zewnętrznej (warstwy dolnej) podlegają przemieszczeniu mniejszemu niż warstwy środkowej. Jednocześnie widzimy, że różnice przemieszczeń

między warstwami zewnętrznymi a warstwą środkową można pominąć; można więc uważać, że zdeformowane warstwy belki są w praktyce równoległe oraz że ugięcie maksymalne mierzone na powierzchni belki odpowiada ugięciu warstwy środkowej.

Tablica 10

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	10,95	2,63	0,91	0,91	0,03
1/6	7,38	1,01	-0,20	-0,35	-0,17
0,3	4,74	-0,61	-1,06	-0,94	-0,33
0,5	0,92	-2,65	-2,34	-1,80	-0,56

Tablica 11

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	-2,53	-0,61	-0,21	-0,09	-0,01
1/6	-5,68	-2,37	-1,30	-0,82	-0,20
0,3	-8,03	-3,75	-2,17	-1,40	-0,36
0,5	-11,30	-5,75	-3,55	-2,32	-0,59

Gdy belka jest podparta w punktach ( $x = \pm a$ ,  $y = -b$ ), znajdujemy przemieszczenie ciała sztywnego

$$(2.34''') \quad v'_0 = v_0 - \frac{pb}{8E} (1,5 - 0,2\nu).$$

Widzimy, że przemieszczenie dodatkowe ( $v'_0 - v_0$ ), któremu podlegałyby punkty belki, nie zależy od jej długości. Odpowiada ono liniowemu odkształceniu  $\nu(\pm 1, -1)$  w przekrojach podparcia.

Tablica 12

$\nu \backslash \lambda$	2	3	4	5	10
0	2,53	0,61	0,21	0,09	0,01
1/6	2,40	0,59	0,20	0,09	0,01
0,3	2,30	0,57	0,20	0,08	0,01
0,5	2,15	0,54	0,19	0,08	0,01

Zbadamy stosunek

$$(2.53) \quad \frac{v'_0 - v_0}{f} = \frac{1,5 - 0,2\nu}{\lambda^2 (2,5\lambda^2 + 4,8 + 3\nu)},$$

którego wartości liczbowe liczone dla różnych  $\lambda$  i  $\nu$  zestawione są w tabl. 12. Widzimy, że rozpatrując teoretyczne punkty podparcia różne od środków końcowych przekrojów belki otrzymujemy, jeśli chodzi o przemieszczenia, praktycznie te same rezultaty.

Jednocześnie maksymalne ugięcie uzyskane w przypadku podparcia zwykłego w punktach ( $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = -1$ ), które jest większe od poprzednio rozważanego, jest bliższe wynikom otrzymanym w teorii wytrzymałości materiałów (większe niż obliczane metodami teorii sprężystości w przypadku podparcia w środku przekrojów końcowych). Zatem metody wytrzymałości materiałów są dogodniejsze do obliczania przemieszczeń.

Przeprowadziliśmy bardziej szczegółowy rachunek stanu naprężeń i odkształceń dla tego przypadku obciążenia, ponieważ przypadek ten uważamy za podstawowy. Analogiczne problemy spotykamy we wszystkich innych rodzajach obciążenia.

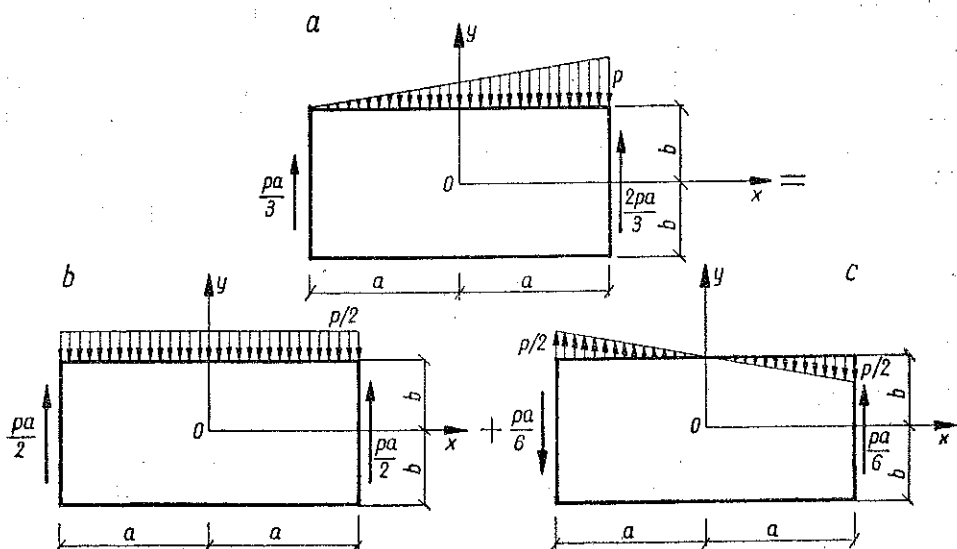
Rozpatrzmy teraz przypadek belki poddanej obciążeniu rozłożonemu w sposób ciągły na górnej powierzchni (rys. 15a). Obciążenie to rozłożyć można na symetryczne względem osi  $Oy$  i antysymetryczne względem tej osi. Otrzymamy obciążenie rozłożone równomiernie (symetryczne, rys. 15b) — przypadek badany poprzednio — oraz obciążenie zmieniające się liniowo (antysymetryczne, rys. 15c). To drugie obciążenie możemy przedstawić (rys. 16a) jako złożenie dwu obciążeń: zginania czystego w płaszczyźnie pionowej (obciążenie symetryczne, rys. 16b) oraz obciążenia zmieniającego się liniowo (obciążenie antysymetryczne, rys. 16c).

Stan naprężeń będący wynikiem złożenia powyższych obciążeń można zapisać w postaci (1.24) i (1.24'), przy czym

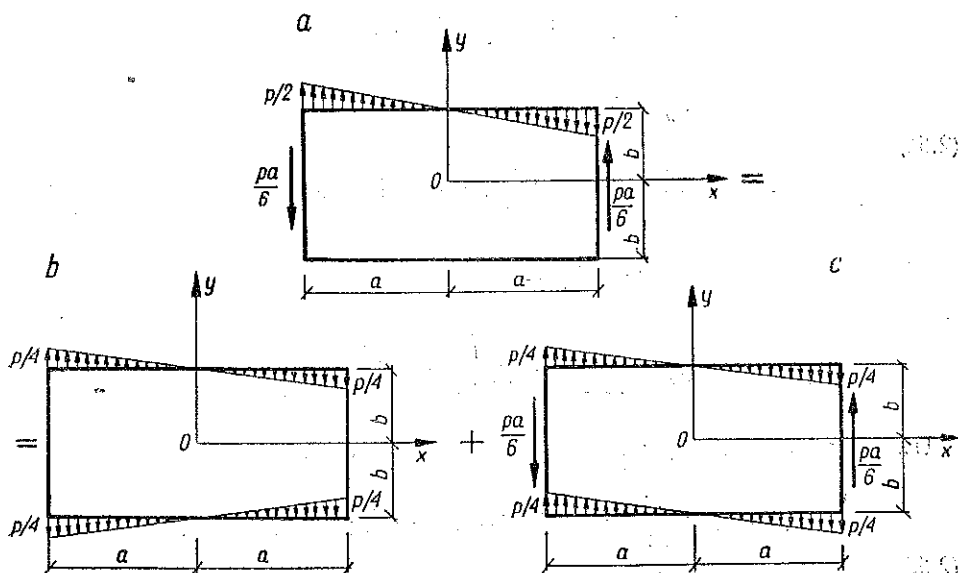
$$\begin{aligned}
 \sigma_x^R &= -\frac{p}{8} \lambda^2 (3 + \xi) (1 - \xi^2) \eta, \\
 \sigma_x^E &= \frac{p}{4} (1 + \xi) \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\
 \sigma_y^R &= 0, \\
 \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{p}{8} (1 + \xi) (1 + \eta)^2 (2 - \eta), \\
 \tau_{xy}^R &= \frac{p}{16} \lambda (1 - \eta^2) (3\xi^2 + 6\xi - 1), \\
 \tau_{xy}^E &= \frac{p}{16 \lambda} (1 - \eta^2) \left( \frac{1}{5} - \eta^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Uwzględniliśmy, że siły i momenty wynoszą (rys. 17)

$$\begin{aligned}
 M_x(x) &= \frac{p}{12 a} (3a + x) (a^2 - x^2) = \frac{p a^2}{12} (3 + \xi) (1 - \xi^2), \\
 T_y(x) &= -\frac{p}{12 a} (3x^2 + 6ax - a^2) = -\frac{p a}{12} (3\xi^2 + 6\xi - 1).
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$



Rys. 15



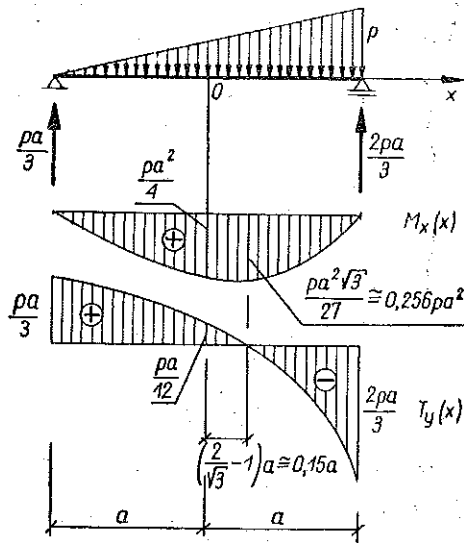
Rys. 16

Wyniki dotyczące wpływu na naprężenia normalne poprawek określonych na gruncie teorii sprężystości są identyczne z uzyskanymi poprzednio, jedynie we wzorach (2.29) stałą intensywność  $p$  obciążenia mamy zastąpić przez zmieniającą się liniowo wraz z przekrojem intensywność  $(1/2)(1+\xi)p$ .

Dla naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  znajdujemy poprawkę, niezależną od przekroju, którą można w stosunku do samego obciążenia pominąć (rys. 18); rzeczywiście, dla  $\lambda \geq 2$  maksymalna poprawka stanowi mniej niż 10% intensywności  $p$  obciążenia.

Gdy intensywność obciążenia zmienia się w sposób paraboliczny (rys. 19)

$$(2.56) \quad p(x) = -\frac{p}{a^2}(a^2 - x^2) = -p(1 - \xi^2),$$



Rys. 17

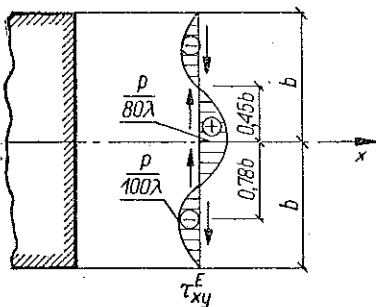
otrzymujemy (R. GRAN OLSSON, [13]) dla stanu naprężeń wzory

$$(2.57) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{p}{8} \lambda^2 (1 - \xi^2) (5 - \xi^2) \eta, \\ \sigma_x^E &= \frac{p}{2} (1 - \xi^2) \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta - \frac{p}{\lambda^2} (0,075 \eta^5 + 0,050 \eta^3 + 0,500 \eta^2 - \\ &\quad - 0,062 \eta - 0,167), \\ \sigma_y^R &= 0, \\ \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{p}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta)^2 (2 - \eta) + \frac{p}{20 \lambda^2} (1 - \eta^2)^2 \eta, \\ \tau_{xy}^R &= \frac{p}{4} \lambda (3 - \xi^2) (1 - \eta^2) \xi, \\ \tau_{xy}^E &= -\frac{p}{4 \lambda} (1 - \eta^2) \left( \frac{1}{5} - \eta^2 \right). \end{aligned}$$

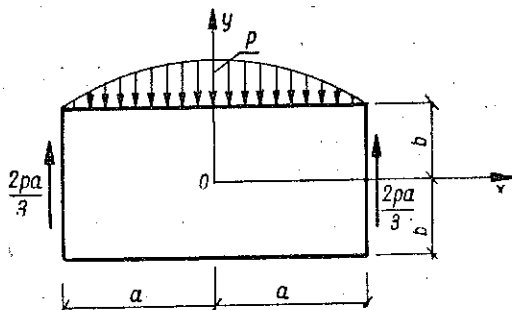
Uwzględniwszy siły i momenty (rys. 20)

$$(2.58) \quad \begin{aligned} M_x(x) &= \frac{p}{12a^2} (a^2 - x^2) (5a^2 - x^2) = \frac{pa^2}{12} (1 - \xi^2) (5 - \xi^2), \\ T_y(x) &= -\frac{p}{3a^2} (3a^2 - x^2) x = -\frac{pa}{3} (3 - \xi^2) \xi. \end{aligned}$$

Uzyskana w teorii sprężystości poprawka  $\sigma_x^E(\pm 1, \eta)$  (rys. 21a) ma wartość około 0,10  $p$  dla  $\lambda \geq 2$  i stanowi 40% maksymalnego naprężenia  $\sigma_x^R$ . Można ją więc praktycznie pominać. Również poprawka  $\sigma_y^E(\pm 1, \eta)$  (rys. 21b) jest bliska 0,004  $p$  dla  $\lambda \geq 2$  i można ją pominać.



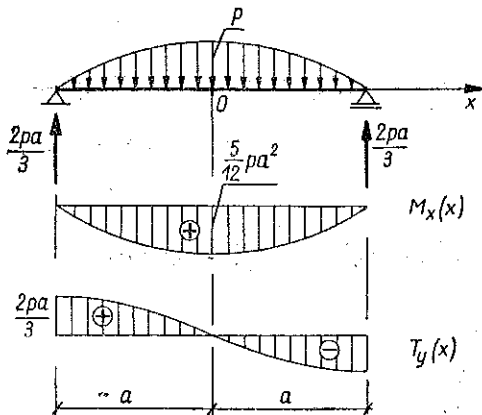
Rys. 18



Rys. 19

Z wyników uzyskanych w powyższych przypadkach można wysnuć kilka wniosków ogólnych, prawdziwych praktycznie w każdym przypadku obciążenia rozłożonego w sposób ciągły.

Rezultaty dotyczące  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$ , uzyskane na gruncie teorii wytrzymałości materiałów (zwłaszcza dotyczące naprężenia stycznego), mogą być wykorzystane praktycznie z przybliżeniem dostatecznie dobrym. Dla naprężenia normalnego  $\sigma_x$  można ewentualnie wykorzystywać poprawkę (na ogół zmienną) (rys. 13a i 21a).



Rys. 20

W wyrażeniach określających naprężenie normalne  $\sigma_y$  można na ogół przyjąć poprawkę analogiczną do tej, którą określają wzory (2.29), zastępując jednakże stałą intensywność  $p$  przez zmieniającą się wraz z przekrojem intensywność obciążenia (rys. 13b).

Widzimy również, że dokładność teoretycznych punktów podparcia wnosi nie posiadające znaczenia modyfikacje do wyrażeń określających składowe przemieszczenia. Zauważmy, że rezultaty dotyczące przemieszczenia

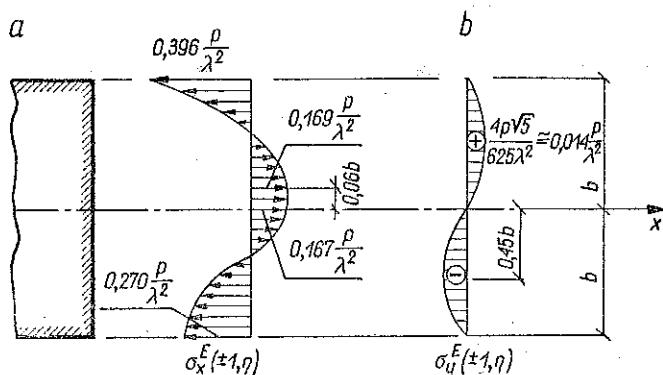
$v$  uzyskane na gruncie teorii sprężystości są dostatecznie dobre, nie można natomiast pominać składowej  $u$  przemieszczeń, która również może być obliczana metodami teorii sprężystości.

**2.3. Obciążenie rozłożone w sposób ciągły o nieciągłej pochodnej.** Metody rachunkowe użyte powyżej nie dają się zastosować do przypadku belki poddanej obciążeniu



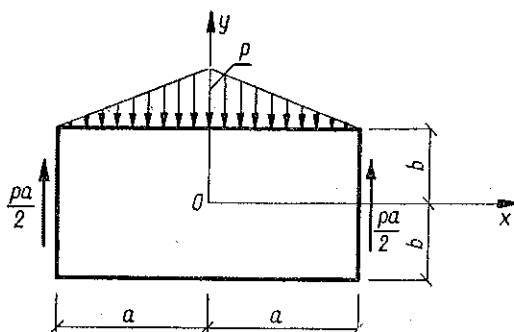
rozłożonemu  $p(x)$ , gdzie  $p(x)$  jest funkcją ciągłą o pochodnej nieciągłej, określoną na górnej i dolnej powierzchni belki. Wobec tego należy przeprowadzić pewne adaptacje tych metod.

Rozpatrzmy belkę podpartą swobodnie, poddaną obciążeniu o rozkładzie trójkątnym (rys. 22). Ten przypadek obciążenia badany był przez CHING-YOUAN-NEOU, [21], i przez nas, [31], [34], w r. 1957. Poniżej podamy nasze rozwiązanie, które jest prostsze.



Rys. 21

Przeprowadźmy przekrój przez środek belki, wprowadźmy siły i momenty na tym przekroju i weźmy pod uwagę lewą część belki (rys. 23a). Układ osi współrzędnych wybierzemy tak jak na rysunku, co jest dogodniejsze w tym przypadku obciążenia. Dane obciążenie przedstawic można w postaci złożenia obciążenia symetrycznego względem osi  $Ox$  i antysymetrycznego względem tej osi. Otrzymamy wtedy ściskanie mimośrodowe (obciążenie symetryczne, rys. 23b) oraz przypadek obciążenia pokazanego na rysunku 23c (antysymetryczne), które należy zbadać.



Rys. 22

Superpozycja tych obciążeń wywołuje stan naprężeń, który zapisać można w postaci (1.24) i (1.24'), gdzie

$$(2.59) \quad \sigma_x^R = -\frac{p}{4} \lambda^2 (3 - \xi^2) \xi \eta,$$

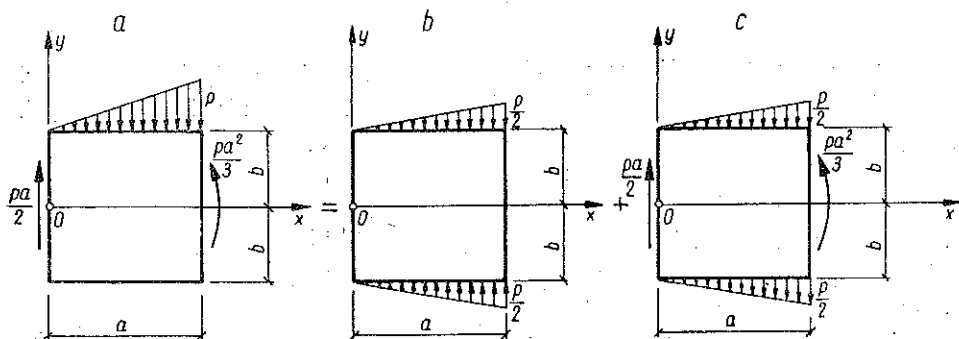
$$\sigma_x^E = \frac{p}{2} \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \xi \eta,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^R &= 0, \\
 \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{p}{4}(1+\eta)^2(2-\eta)\xi, \\
 \tau_{xy}^R &= -\frac{3p}{8}\lambda(1-\xi^2)(1-\eta^2), \\
 \tau_{xy}^E &= \frac{p}{8\lambda}(1-\eta^2)\left(\frac{1}{5}-\eta^2\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

Uwzględniliśmy siły i momenty (rys. 24)

$$\begin{aligned}
 M_x(x) &= \frac{px}{6a}(3a^2-x^2) = \frac{pa^2}{6}(3-\xi^2)\xi, \\
 T_y(x) &= \frac{p}{2a}(a^2-x^2) = \frac{pa}{2}(1-\xi^2).
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Uzyskane rezultaty mają tę samą postać, co znalezione dla obciążenia rozważanego w p. 2.2; poprawki uzyskane na gruncie teorii sprężystości są analogiczne.



Rys. 23

Zauważmy jednakże, że rezultaty powyższe są lepsze niż te, które uzyskuje się w bardziej znanych problemach (np. belka prosta podparta swobodnie, poddana obciążeniu rozłożonemu równomiernie), a warunki brzegowe są ogólniejsze

$$\sigma_x = 0, \quad T_y = \frac{pa}{2}, \quad \text{gdy} \quad x = 0.
 \tag{2.61}$$

Zauważmy jeszcze, że stosując zasadę superpozycji efektów badany powyżej przypadek obciążenia (rys. 25a) można rozłożyć na dwa inne przypadki (rys. 25b i 25c), które były badane wcześniej.

Można również wyznaczyć składowe przemieszczenia w postaci

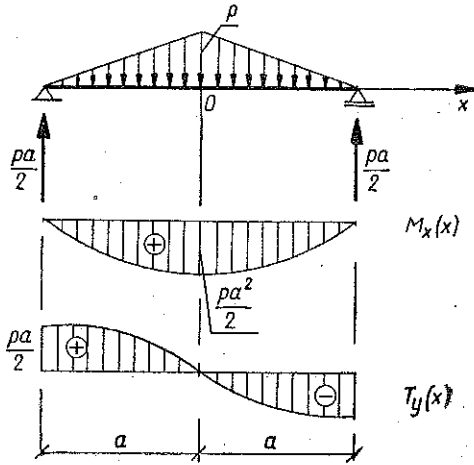
$$(2.62) \quad E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = -\frac{px^2 y}{80ab^3} [5(6a^2 - x^2) - 6(2+5\nu)b^2 + 10(2+\nu)y^2] + \frac{p}{4}(vx^2 + y^2) + \frac{py}{80ab^3} \{ (3+2\nu)y^4 + 2[(1-2\nu)b^2 + 5(2+\nu)a^2]y^2 + 4(1+\nu)b^4 \},$$

$$E[v - (\omega_0 x + v_0)] = \frac{pxy^2}{80ab^3} [10\nu(3a^2 - x^2) - 6(5+2\nu)b^2 + 5(1+2\nu)y^2] - \frac{pxy}{2a} - \frac{px}{80ab^3} \{ x^4 - 2[5a^2 + (8+5\nu)b^2]x^2 + 60(1+\nu)a^2 b^2 \},$$

przy czym należy wyznaczyć przemieszczenia ciała sztywnego  $u_0, v_0$  i obrót  $\omega_0$ .

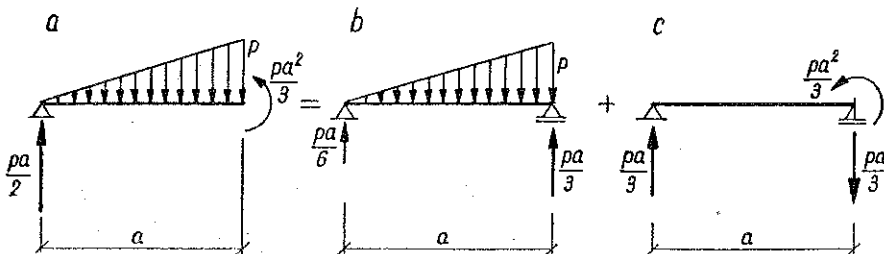
Przyjmijmy, że belka jest podparta swobodnie w środku ciężkości przekroju końcowego. Zatem dla punktu  $(0,0)$  należy przyjąć  $u = 0, v = 0$ . W punkcie  $(a, 0)$  ze względu na symetrię należy przyjąć, że  $\alpha_{yx} = \partial u / \partial y = 0$ . Z warunków tych wynika

$$(2.63) \quad \begin{aligned} u_0 &= v_0 = 0, \\ \omega_0 &= \frac{pa}{80Eb^3} [6(2+5\nu)b^2 - 25a^2] + \frac{(1+\nu)pb}{20Ea}, \end{aligned}$$



Rys. 24

wobec czego składowe przemieszczenia są dobrze określone.



Rys. 25

Równaniem odkształconej warstwy środkowej jest

$$(2.64) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = -\frac{p}{80} \{ \lambda^4 \xi^4 - 2\lambda^2 [5(\lambda^2 + \nu) + 8] \xi^2 + \\ + \lambda^2 [5(5\lambda^2 + 6\nu) + 48] - 4(1 + \nu) \} \xi,$$

a w środku belki ( $\xi = 1$ ) uzyskujemy maksymalne ugięcie

$$(2.65) \quad f = -v(1, 0) = \frac{pb}{20E} [4\lambda^4 + (8 + 5\nu)\lambda^2 - (1 + \nu)].$$

Na gruncie teorii wytrzymałości materiałów znajdziemy, uwzględniając wpływ sił poprzecznych, następujące równanie odkształconej warstwy środkowej:

$$(2.66) \quad E \frac{v_R}{b} = -\frac{p}{80} \{ \lambda^4 \xi^4 - 2\lambda^2 [5\lambda^2 + 8(1 + \nu)] \xi^2 + \lambda^2 [25\lambda^2 + 48(1 + \nu)] \} \xi$$

oraz maksymalne ugięcie

$$(2.67) \quad f_R = \frac{pb}{5E} \lambda^2 [\lambda^2 + 2(1 + \nu)].$$

Przyjmując  $\nu = 1/6$  (beton) otrzymujemy dla  $\lambda = 5$

$$(2.68) \quad f = 136 \frac{pb}{E}, \quad f_R = 136,7 \frac{pb}{E},$$

a dla  $\lambda = 2$

$$(2.68') \quad f = 4,91 \frac{pb}{E}, \quad f_R = 5,07 \frac{pb}{E}.$$

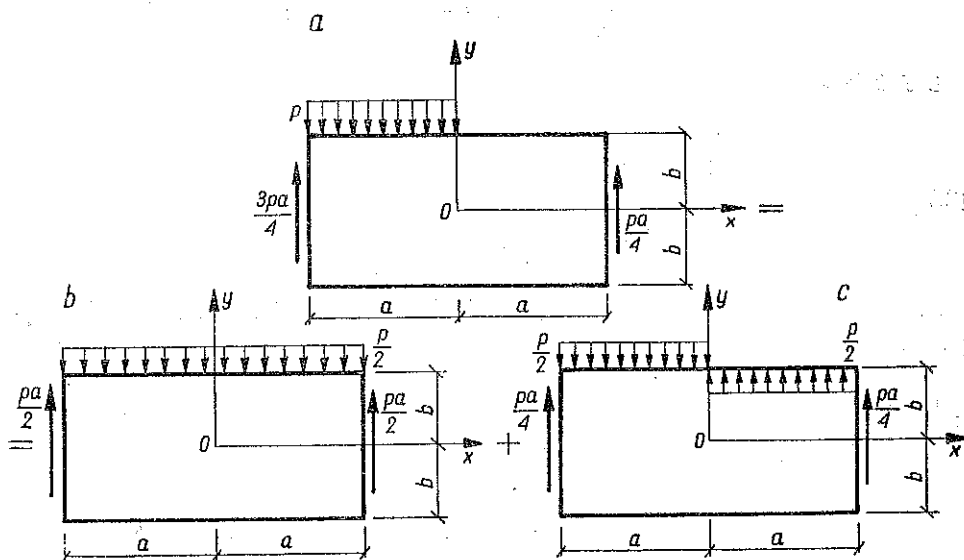
W pierwszym przypadku różnica wynosi około 0,5%, w drugim około 3%. Zatem również w tym przypadku obciążenia metody rachunku oparte na teorii wytrzymałości materiałów są z technicznego punktu widzenia wystarczająco dokładne nawet dla  $\lambda = 2$ .

Na ogół w przekrojach oddzielających rozważane części belki otrzymujemy dla stanu naprężeń i przemieszczeń większe błędy, które ocenić można, w zależności od sposobu w jaki spełnione są warunki brzegowe, tak jak robiliśmy to powyżej.

**2.4. Obciążenie rozłożone w sposób nieciągły.** Rozpatrzmy przypadek, w którym funkcja  $p(x)$  jest określona na górnej lub dolnej powierzchni belki i jest przedziałami ciągła wraz z pochodną.

Rozpatrzmy belkę podpartą swobodnie, poddaną obciążeniu takiemu jak na rys. 26a. Obciążenie to przedstawimy w postaci złożenia obciążenia symetrycznego względem osi  $Oy$  i obciążenia antysymetrycznego. Otrzymamy obciążenie rozłożone równomiernie (symetryczne, rys. 26b) oraz przypadek obciążenia podany na rys. 26c (antysymetryczne).

Pierwszy z otrzymanych typów rozpatrywany był poprzednio. W przypadku drugim rozpatrzemy wykresy sił i momentów przedstawione na rys. 27. Widać, że można belkę podzielić na dwie części, z których każdą można uważać za belkę podpartą swobodnie, poddaną obciążeniu rozłożonemu równomiernie (rys. 28).



Rys. 26

W wyniku złożenia tych obciążeń uzyskamy:

gdy  $\xi \leq 0$

$$(2.69) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{3p}{8} \lambda^2 (1 + \xi) (1 - 2\xi) \eta, & \sigma_x^E &= \frac{p}{2} \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_y^R &= 0, & \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{p}{4} (1 + \eta)^2 (2 - \eta), \\ \tau_{xy}^R &= \tau_{xy} = \frac{3p}{16} \lambda (1 + 4\xi) (1 - \eta^2), & \tau_{xy}^E &= 0; \end{aligned}$$

gdy  $\xi \geq 0$

$$(2.69') \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= \sigma_x = -\frac{3p}{8} \lambda^2 (1 - \xi) \eta, & \sigma_x^E &= 0, \\ \sigma_y^R &= \sigma_y^E = \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy}^R &= \tau_{xy} = \frac{3p}{16} \lambda (1 - \eta^2), & \tau_{xy}^E &= 0, \end{aligned}$$

przy czym siły i momenty działające w przekroju wynoszą (rys. 29).

gdy  $\xi \leq 0$

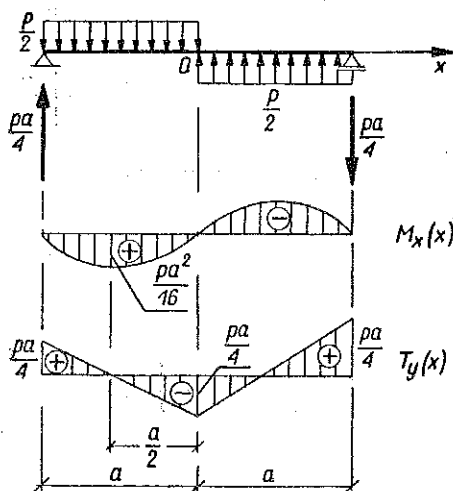
$$(2.70) \quad M_x(x) = \frac{p}{4} (a+x)(a-2x) = \frac{pa^2}{4} (1+\xi)(1-2\xi),$$

$$T_y(x) = -\frac{p}{4} (a+4x) = -\frac{pa}{4} (1+4\xi);$$

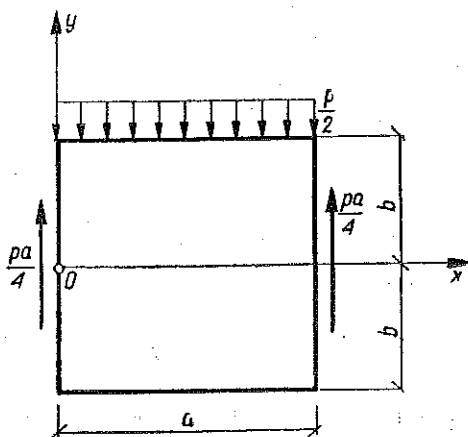
gdy  $\xi \geq 0$

$$(2.70') \quad \begin{cases} M_x(x) = \frac{p}{4} (a^2 - x^2) = \frac{pa^2}{4} (1 - \xi^2), \\ T_y(x) = -\frac{pa}{4}. \end{cases}$$

Jak widzimy, powyższe rezultaty są analogiczne do uzyskanych w innych przypadkach obciążenia.



Rys. 27



Rys. 28

W analogiczny sposób badać można belki podparte swobodnie, poddane obciążeniom innych typów. Oczywiście w przekrojach odpowiadających punktom nieciągłości otrzymujemy pewne błędy, które jednak w praktyce można pominąć w stosunku do wymiarów poszczególnych części belki, podobnie jak w przypadku rozważonym powyżej.

**2.5. Obciążenie siłami skupionymi.** Zbadamy problem belki, której górna lub dolna powierzchnia poddana jest działaniu obciążenia skupionego (siły lub momentu). Inne rezultaty dotyczące obciążenia układem sił i momentów będzie można otrzymać przez superpozycję efektów obciążeń tego najprostszego typu.

Rozpatrzmy na początku belkę podpartą swobodnie, na którą w przekroju środkowym działa siła skupiona (rys. 30). Dokonajmy przekroju belki w miejscu obciążenia, wprowadźmy na przekroju siły i momenty (rys. 31) i zbadajmy lewą część belki wprowadzając układ współrzędnych tak jak na rys. 32.

Stan naprężeń można przedstawić w postaci

$$(2.71) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^R = -\frac{3P}{4a} \lambda^2 \xi \eta, \\ \sigma_x^E &= 0, \quad \sigma_y = \sigma_y^R = \sigma_y^E = 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R = -\frac{3P}{8a} \lambda (1 - \eta^2), \\ \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Rezultaty uzyskane metodami wytrzymałości materiałów są zatem całkowicie zgodne z wynikami uzyskanymi metodami teorii sprężystości.

Zakładamy, że punkt (0,0) nie podlega przemieszczeniu ( $u = 0, v = 0$ ), co odpowiada swobodnemu podparciu w środku ciężkości przekrojów końcowych, oraz że  $\frac{du}{dy} = 0$  w punkcie  $(a, 0)$  z powodu symetrii zagadnienia względem przekroju środkowego<sup>6</sup>.

Z warunków tych dla stanu odkształceń otrzymujemy

$$(2.72) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{a} &= \frac{P}{8a} [3\lambda^2 (1 - \xi^2) + (2 + \nu) \eta^2] \eta, \\ E \frac{v}{b} &= -\frac{P}{8a} \lambda^2 [\lambda^2 (3 - \xi^2) + 6(1 + \nu) - 3\nu \eta^2] \xi. \end{aligned}$$

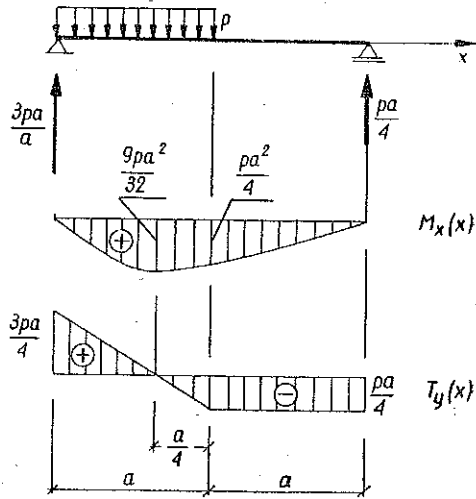
Równanie odkształconej warstwy środkowej ma postać

$$(2.73) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = -\frac{P}{8a} \lambda^2 [\lambda^2 (3 - \xi^2) + 6(1 + \nu)] \xi,$$

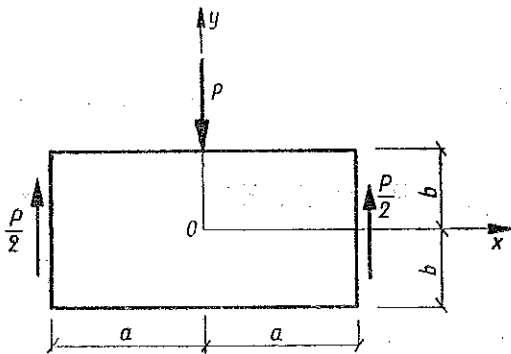
a maksymalne ugięcie wynosi

$$(2.74) \quad f = -v(1, 0) = \frac{P}{4E} \lambda [\lambda^2 + 3(1 + \nu)].$$

<sup>6</sup> Podobnie jak w p. 2. 3.

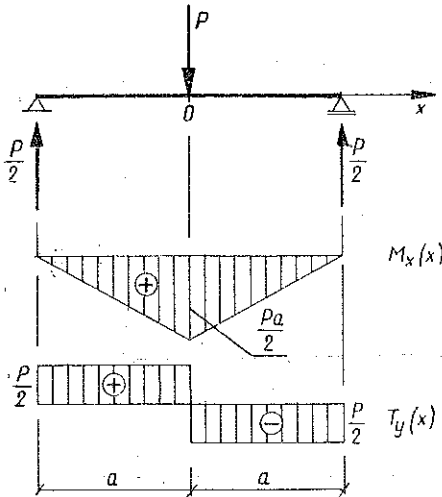


Rys. 29

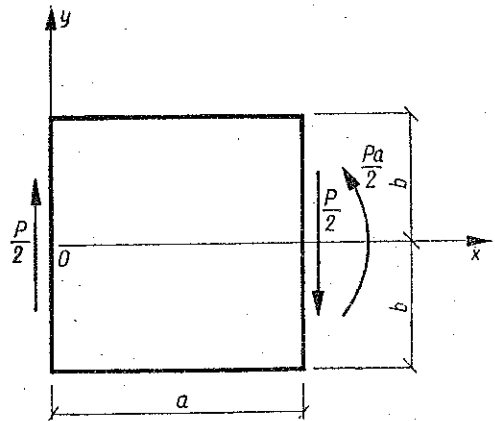


Rys. 30

Wpływ sił poprzecznych na warstwę środkową belki uwzględnić można (w ramach teorii wytrzymałości) w dwojaki sposób: albo przeprowadzając rachunki przy użyciu naprężenia stycznego  $\tau_{\max}$ , albo przy użyciu  $\tau_{sr}$ , wprowadzając współczynnik  $k$ . Wprowadzenie tego współczynnika wynika z faktu, że naprężenia styczne nie są rozłożone równomiernie wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego belki (co właśnie wykazaliśmy).



Rys. 31



Rys. 32

W pierwszym przypadku uzyskujemy równania (2.73) i (2.74). W przypadku drugim mamy

$$(2.75) \quad E \frac{v_R(\xi, 0)}{b} = -\frac{P}{8a} \lambda^2 [\lambda^2 (3 - \xi^2) + 4,8(1 + \nu)] \xi,$$

oraz

$$(2.76) \quad f_R = \frac{P}{4E} \lambda [\lambda^2 + 2,4(1 + \nu)].$$

Różnica jest największa dla ugięcia  $f$ . Jeśli przyjąć  $\nu = 1/6$  (beton), to dla  $\lambda = 5$  uzyskamy

$$(2.77) \quad f = 35,625 \frac{P}{E}, \quad f_R = 34,750 \frac{P}{E},$$

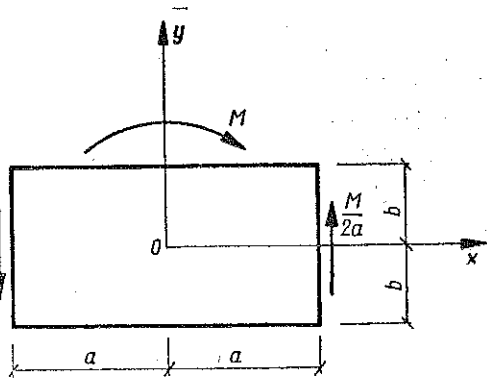
a dla  $\lambda = 2$

$$(2.77') \quad f = 3,75 \frac{P}{E}, \quad f_R = 3,40 \frac{P}{E}.$$



W pierwszym przypadku różnica wynosi 2,50%, w drugim około 100%. Zatem rachunek przeprowadzony metodami teorii wytrzymałości materiałów jest z technicznego punktu widzenia wystarczająco dokładny nawet dla  $\lambda=2$ . Rezultaty uzyskane za pomocą naprężenia stycznego  $\tau_{\max}$  są w obu przypadkach nieco większe.

Weźmy również pod uwagę przypadek belki podpartej swobodnie, poddanej działaniu momentu skupionego w przekroju środkowym (rys. 33). Zbadajmy lewą część belki (rys. 35) biorąc pod uwagę wykresy sił i momentów (rys. 34). Otrzymamy typ obciążenia analogiczny do przedstawionego na rys. 32. Zatem naprężenia można przedstawić w postaci

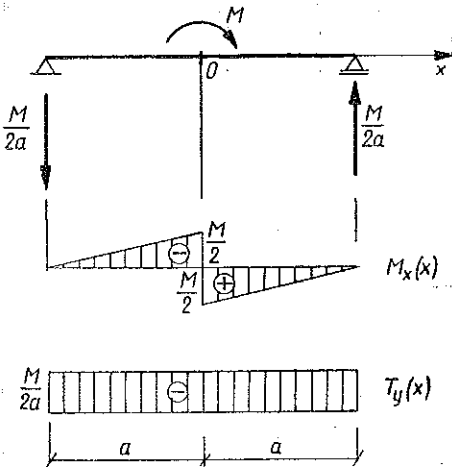


Rys. 33

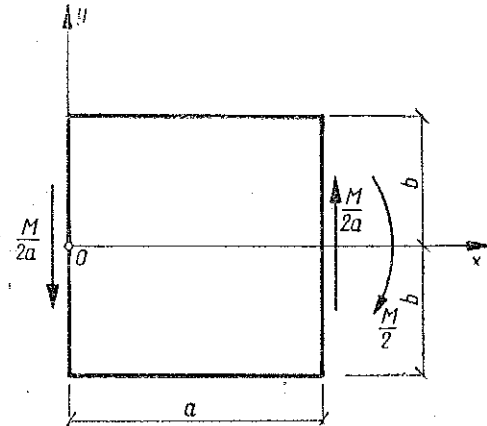
$$(2.78) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^R = \frac{3M}{4a^2} \lambda^2 \xi \eta, & \sigma_x^E &= 0, \\ \sigma_y &= \sigma_y^R = \sigma_y^E = 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^R = \frac{3M}{8a^2} \lambda (1 - \eta^2), & \tau_{xy}^E &= 0, \end{aligned}$$

wobec czego rezultaty uzyskane metodami teorii wytrzymałości materiałów są poprawne.

W analogiczny sposób zbadać można stan odkształceń.



Rys. 34

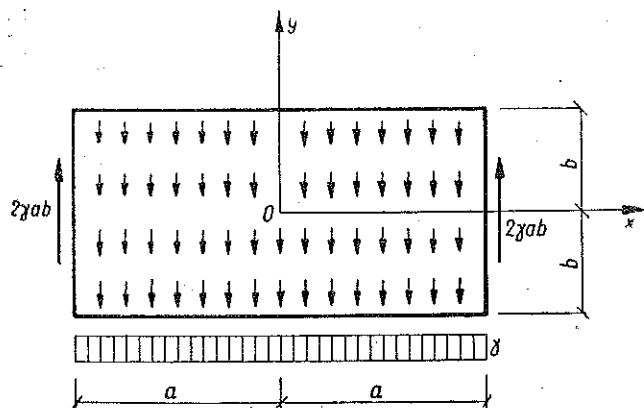


Rys. 35

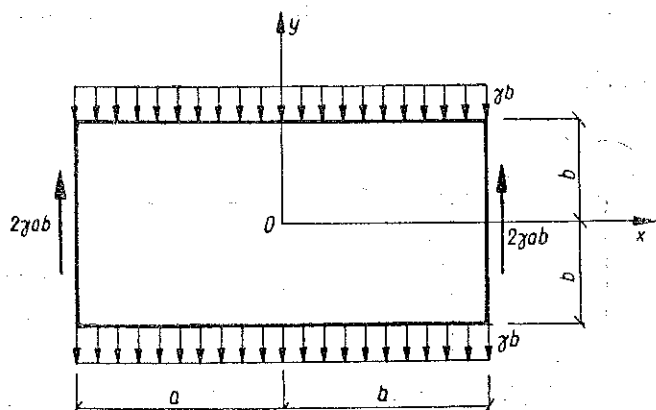
Zauważmy, że przeprowadzone rozważania nie uwzględniają faktu, że obciążenie działać mogło na górną lub dolną powierzchnię belki — w obu przypadkach rezultaty są te same.

W podobny sposób zbadać można przypadek obciążenia siłą skupioną styczną do górnej lub dolnej powierzchni belki. Wynikiem takiego obciążenia jest ściskanie mimośrodowe w odpowiednim przekroju poprzecznym.

2.6. Obciążenie siłami masowymi. Aby przedstawić problem w sposób jednolity, weźmiemy pod uwagę kilka elementarnych przypadków obciążenia siłami masowymi.



Rys. 36



Rys. 37

Zbadamy przypadek belki podpartej swobodnie, obciążonej własnym ciężarem (rys. 36). Niech ciężar na jednostkę długości wynosi  $\gamma$ .

Sily masowe spełniają warunek (1.23), zatem funkcja Airy'ego będzie również biharmoniczna. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie jest identyczne

z zagadnieniem występującym w przypadku obciążenia pokazanego na rys. 37, opracowanym w p. 2.2.

Stan naprężeń będzie zatem następujący:

$$(2.79) \quad \begin{aligned} \sigma_x^R &= -\frac{3\gamma b}{2} \lambda^2 (1 - \xi^2) \eta, & \sigma_x^E &= \gamma b \left( \frac{3}{5} - \eta^2 \right) \eta, \\ \sigma_x^R &= 0, & \sigma_y^E &= \sigma_y = -\frac{\gamma b}{2} (1 - \eta^2) \eta, \\ \tau_{xy}^R &= \tau_{xy} = \frac{3\gamma b}{2} \lambda (1 - \eta^2) \xi, & \tau_{xy}^E &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymane wyrażenia mają postać analogiczną do wyrażen występujących w przypadku belki podpartej swobodnie, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia. Naprężenia normalne  $\sigma_y$  zmieniają się wzdłuż przekroju, tak jak pokazano na rys. 38.

Dla podparcia swobodnego w środkach końcowych przekrojów belki ( $u = 0$ ,  $v = 0$  dla  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ ) znajdujemy przemieszczenia

$$(2.80) \quad \begin{aligned} E \frac{u}{a} &= \frac{\gamma b}{2} \left[ \frac{6}{5} + \nu - \lambda^2 (3 - \xi^2) - (2 + \nu) \eta^2 \right] \xi \eta, \\ E \frac{v}{b} &= \frac{\gamma b}{4} \left[ 3\nu \lambda^2 (1 - \xi^2) - \left( 1 + \frac{6}{5} \nu \right) + \left( \frac{1}{2} + \nu \right) \eta^2 \right] \eta^2 - \\ &\quad - \frac{3\gamma b}{4} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[ \frac{\lambda^2}{6} (5 - \xi^2) + \frac{8}{5} + 3\nu \right]. \end{aligned}$$

Równaniem warstwy środkowej jest

$$(2.81) \quad E \frac{v(\xi, 0)}{b} = -\frac{3\gamma b}{4} \lambda^2 (1 - \xi^2) \left[ \frac{\lambda^2}{6} (5 - \xi^2) + \frac{8}{5} + 3\nu \right],$$

a maksymalne ugięcie wynosi

$$(2.82) \quad f = -v(0, 0) = \frac{3\gamma b^2}{4E} \lambda^2 \left( \frac{5\lambda^2}{6} + \frac{8}{5} + 3\nu \right).$$

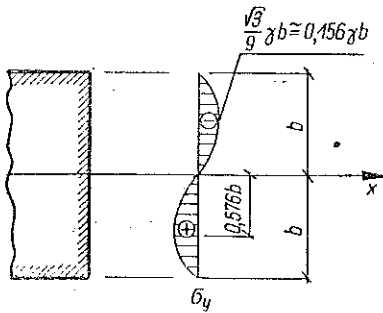
Ugięcie znalezione na gruncie teorii wytrzymałości materiałów będzie takie samo, jak w przypadku belki swobodnie podpartej, poddanej działaniu równoważnego obciążenia rozłożonego równomiernie

$$(2.83) \quad f_R = \frac{\gamma b^2}{E} \lambda^2 \left[ \frac{5}{8} \lambda^2 + 1,2 (1 + \nu) \right].$$

Zatem

$$(2.84) \quad f_E = 1,05 \nu \frac{\gamma b^2}{E} \lambda^2.$$

Zauważmy, że, w odróżnieniu od przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego na górnej powierzchni belki, ugięcie rzeczywiste jest tu większe niż obliczone metodami teorii wytrzymałości (podobnie jak np. w przypadku równomiernego obciążenia dolnej powierzchni belki). Wynika to z faktu, że przy obciążeniu górnej



Rys. 38

powierzchni belki do odkształcenia wywołanego tym obciążeniem dochodzi jeszcze pewne odkształcenie liniowe w kierunku osi  $Oy$ . Jednakże również w tym przypadku poprawkę uzyskaną metodami teorii sprężystości można pominąć.

Rzeczywiście, w przypadku np. betonu ( $\nu = 1/6$ ) mamy dla  $\lambda = 5$

$$(2.85) \quad f_E = 0,010 f,$$

a dla  $\lambda = 2$

$$(2.85') \quad f_E = 0,043 f.$$

Inne przypadki obciążenia zbadać można w sposób analogiczny.

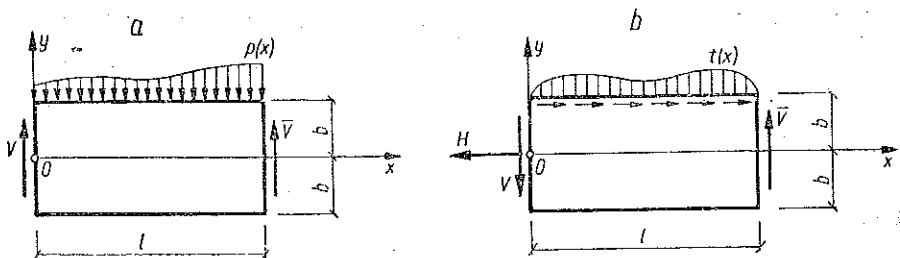
### 3. Belka prosta podparta swobodnie. Rozwiązania oparte na rozwinięciach w szereg nieskończony

W tej części pracy za pomocą rozwinięć w szereg Fouriera zbadamy belkę podpartą swobodnie, poddaną działaniu dowolnego obciążenia. Wykorzystamy tu oznaczenia wprowadzone w «Dodatku».

**3.1. Obciążenie dowolne.** Rozpatrzmy belkę podpartą swobodnie, poddaną działaniu dowolnego obciążenia, przy czym wyróżniać będziemy obciążenie normalne (rys. 39a) i obciążenie styczne (rys. 39b). Przyjmować będziemy, że obciążona jest górna powierzchnia belki. Przypadek obciążenia dolnej powierzchni belki zbadać można w sposób całkowicie analogiczny. Układ współrzędnych wybierzmy tak jak na rysunku.

Przyjmijmy

$$(3.1) \quad \lambda = \frac{l}{2b}.$$



Rys. 39

Niech swobodnie podparta belka o długości  $l$  poddana będzie działaniu obciążenia normalnego (rys. 40).

$$(3.2) \quad p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x,$$

gdzie

$$(3.3) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym okresem jest  $L_x = 2l$ .

Całkowite obciążenie belki wynosi

$$(3.4) \quad P = 2 \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

a reakcje można zapisać w postaci

$$(3.5) \quad \bar{V} = \sum_n (-1)^n \frac{a_n}{\gamma_n}, \quad V = - \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n}.$$

Siła poprzeczna oraz moment zginający określone są wzorami

$$(3.6) \quad T_y(x) = - \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n} \cos \gamma_n x,$$

$$M_x(x) = - \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n^2} \sin \gamma_n x,$$

przy czym przyjęto, że stałe całkowania są równe zeru, ponieważ w przekrojach podparcia momenty zginające są zerami, a siły poprzeczne określone są przez (3.5).

Zatem na gruncie teorii wytrzymałości stan naprężeń otrzymujemy w postaci

$$(3.7) \quad \sigma_x^R = \frac{6}{\pi^2} \lambda^2 \eta \sum_n \frac{a_n}{n^2} \sin \gamma_n x,$$

$$\sigma_y^R = 0,$$

$$\tau_{xy}^R = \frac{3}{2\pi} \lambda (1 - \eta^2) \sum_n \frac{a_n}{n} \cos \gamma_n x.$$

Stosując metodę O. Mohra i przyjmując, że moment zginający wyraża się wzorem analogicznym do (3.5), znajdujemy obrót przekrojów podparcia

$$(3.8) \quad EI\bar{\theta} = \sum_n (-1)^n \frac{a_n}{\gamma_n^3},$$

$$EI\theta = \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n^3}.$$

Wychodząc ze wzorów (3.6) uzyskamy wzory na obrót i przemieszczenia wzdłuż osi  $Oy$  ze stałymi równymi zero [bowiem przemieszczenia w przekrojach podparcia znikają, a obroty określone są przez (3.8)]:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} E\theta(x) &= \frac{12}{\pi^3} \lambda^3 \sum_n \frac{a_n}{n^3} \cos \gamma_n x, \\ E \frac{v_M(x)}{b} &= \frac{24}{\pi^4} \lambda^4 \sum_n \frac{a_n}{n^4} \sin \gamma_n x. \end{aligned}$$

W przypadku tym ugięcie w środku długości belki (bardzo bliskie ugięciu maksymalnemu, a równe ugięciu maksymalnemu przy obciążeniu symetrycznym względem środka długości belki) określone jest przez

$$(3.10) \quad f_M = -\frac{l^4}{\pi^4 EI} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n^4}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Wpływ siły poprzecznej przedstawić można w postaci

$$(3.11) \quad E \frac{v_T(x)}{b} = \frac{4,8(1+\nu)}{\pi^2} \lambda^2 \sum_n \frac{a_n}{n^2} \sin \gamma_n x,$$

gdzie stałe całkowania przyjęto równe zero, ponieważ przemieszczenie  $v$  jest zerem na podporach.

Przemieszczenie uzyskane w tym przypadku metodami wytrzymałości materiałów wynosi

$$(3.12) \quad E \frac{v_R(x)}{b} = \frac{4,8(1+\nu)}{\pi^2} \lambda^2 \sum_n \frac{a_n}{n^2} \left[ 1 + \frac{5}{\pi^2(1+\nu)} \frac{\lambda^2}{n^2} \right] \sin \gamma_n x,$$

co dla  $\nu = 1/6$  daje

$$(3.13) \quad E \frac{v_R(x)}{b} = 0,568 \lambda^2 \sum_n \frac{a_n}{n^2} \left( 1 + 0,434 \frac{\lambda^2}{n^2} \right) \sin \gamma_n x.$$

Powyższy szereg jest szybko zbieżny i w praktyce wystarczy poprzestać na małej ilości składników.

Ugięcie w środku belki można przedstawić w postaci

$$(3.14) \quad f_R = -\frac{1}{EI} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{\gamma_n^2} \left[ \frac{1}{\gamma_n^2} + 0,8(1+\nu)b^2 \right]$$

lub

$$(3.14') \quad f_R = -\frac{4,8(1+\nu)}{\pi^2 E} \lambda^2 b \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n^2} \left[ 1 + \frac{5}{\pi^2(1+\nu)} \frac{\lambda^2}{n^2} \right].$$

Dla  $\nu = 1/6$  znajdujemy

$$(3.15) \quad f_R = -\frac{0,568}{E} \lambda^2 b \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n^2} \left( 1 + 0,434 \frac{\lambda^2}{n^2} \right).$$

Przemieszczenie w kierunku osi  $0x$  wynosi

$$(3.13') \quad E \frac{u_R}{l} = -\frac{6}{\pi^3} \lambda^2 \eta \sum_n \frac{a_n}{n^3} \cos \gamma_n x$$

i znika w środkach przekrojów końcowych (teoretyczne punkty podparcia).

Przy użyciu metod teorii sprężystości oraz przy następujących warunkach brzegowych

$$(3.16) \quad \begin{array}{lll} \sigma_y = p(x), & \tau_{yx} = 0 & \text{dla } y = b, \\ \sigma_y = 0, & \tau_{yx} = 0 & \text{dla } y = -b; \end{array}$$

$$(3.16') \quad \begin{array}{lll} \sigma_x = 0, & T_y = V & \text{dla } x = 0, \\ \sigma_x = 0, & \bar{T}_y = -\bar{V} & \text{dla } x = l, \end{array}$$

funkcję Airy'ego przedstawić możemy w postaci

$$(3.17) \quad F = -\sum_n \frac{a_n}{2\gamma_n^2} \left[ \frac{\Phi_7(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_2(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x.$$

Za pomocą związków różniczkowych (D.5) i (D.5') znajdujemy stan naprężeń

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \sum_n a_n \left[ \frac{\Phi_9(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_4(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} \sum_n a_n \left[ \frac{\Phi_7(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_2(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2} \sum_n a_n \left[ \frac{\Phi_8(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_3(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \cos \gamma_n x, \end{aligned}$$

co odpowiada rezultatowi uzyskanym powyżej.

Stan odkształceń określony będzie przez

$$(3.19) \quad \begin{aligned} E \frac{u - (-\omega_0 y + u_0)}{l} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left[ \frac{\Phi_{9-7}(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{4-2}(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \cos \gamma_n x, \\ E \frac{v - (\omega_0 x + v_0)}{b} &= \frac{\lambda}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \left[ \frac{\Phi_{6-8}(\gamma_n y)}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{1-3}(\gamma_n y)}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \end{aligned}$$

przy czym ruch ciała sztywnego jest określony warunkami podparcia.

W przypadku podparcia swobodnego w środkach przekrojów końcowych

$$(3.20) \quad \begin{array}{lll} u = 0, & v = 0, & \text{gdy } x = 0, \quad y = 0; \\ v = 0, & & \text{gdy } x = l, \quad y = 0, \end{array}$$

znajdujemy

$$(3.21) \quad \omega_0 = v_0 = 0, \\ u_0 = \frac{l}{2\pi E} \sum_n \frac{a_n}{n} \frac{\Phi_{9-7}(0)}{\chi_2(n\lambda')} = \frac{l}{\pi E} \sum_n \frac{a_n}{n} \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \gamma_n b - (1+\nu) \gamma_n b \operatorname{ch} \gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b}$$

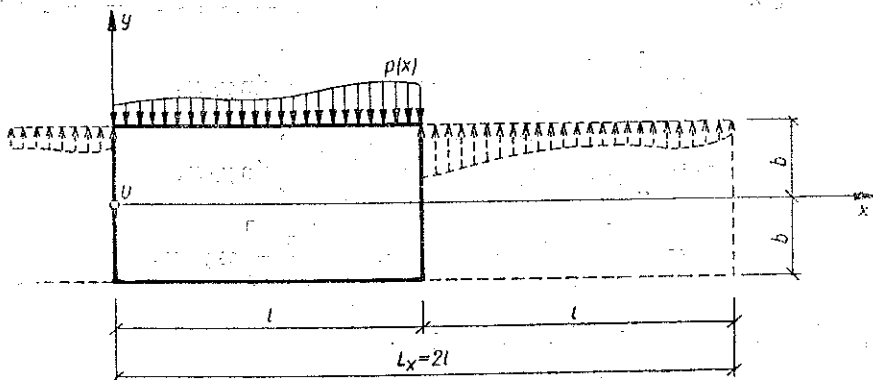
Zauważmy, że przemieszczenie  $u$  nie może znikać w obu punktach podparcia jednocześnie.

Weźmy teraz przypadek swobodnie podpartej belki o długości  $l$  (rys. 41), podanej działaniu obciążenia stycznego

$$(3.22) \quad t(x) = b_0 + \sum_n b_n \cos \gamma_n x,$$

które znikają dla  $x = 0, x = l$ , przy czym podparcie nie wywołuje tarcia, co prowadzi do związków

$$(3.23) \quad b_0 = - \sum_n b_n = - \sum_n (-1)^n b_n.$$



Rys. 40

Stan naprężeń na gruncie teorii wytrzymałości uzyskać można w postaci (przypadek ściskania mimośrodowego):

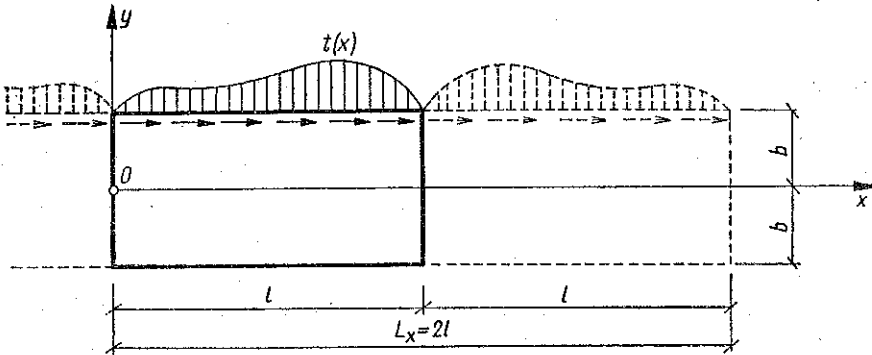
$$(3.24) \quad \sigma_x^R = \lambda (1 - \xi) b_0 - \frac{\lambda}{\pi} (1 + 3\eta) \sum_n \frac{b_n}{n} \sin \gamma_n x, \\ \sigma_y^R = 0, \quad \tau_{xy}^R = \frac{3}{4} b_0 (1 - \eta^2),$$

a przemieszczenia uzyskać można w sposób analogiczny.



Przy wykorzystaniu metod teorii sprężystości dochodzimy do funkcji Airy'ego w postaci

$$(3.25) \quad F = \frac{\lambda}{2} b_0 y^2 - \frac{b_0}{2} xy - \frac{b_0}{4b} xy^2 - \sum_n \frac{b_n}{2\gamma_n^2} \left[ \frac{\Phi_3(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_8(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x.$$



Rys. 41

Stan naprężeń określony jest przez

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(1-\xi)b_0 + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[ \frac{\Phi_5(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{10}(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[ \frac{\Phi_3(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_8(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (1+\eta)b_0 + \frac{1}{2} \sum_n b_n \left[ \frac{\Phi_4(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_9(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \cos \gamma_n x, \end{aligned}$$

a stan odkształceń można przedstawić w postaci

$$(3.27) \quad \begin{aligned} E \frac{u - (-\omega_0 y + u_0)}{l} &= \frac{b_0}{2} \lambda \xi (2 - \xi) + \frac{1}{2} (1 + \nu) \lambda' \eta b_0 + \frac{1}{8} (2 + \nu) \lambda \eta^2 b_0 - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \left[ \frac{\Phi_{5-3}(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{10-8}(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \cos \gamma_n x, \\ E \frac{v - (\omega_0 x + v_0)}{b} &= -\nu b_0 \lambda (1 - \xi) \eta - \\ &\quad - \frac{\lambda}{\pi} \sum_n \frac{b_n}{n} \left[ \frac{\Phi_{2-4}(\gamma_n y)}{\varphi_2(n\lambda')} + \frac{\Phi_{7-9}(\gamma_n y)}{\kappa_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x, \end{aligned}$$

przy czym warunki podparcia określają ruch ciała sztywnego.

W rozważanym przypadku podparcia (podparcie swobodne w środkach przekrojów końcowych) otrzymujemy wobec (3.20) stałe:

$$(3.28) \quad v_0 = \omega_0 = 0, \\ u_0 = \frac{l}{2\pi E} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{\Phi_{5-3}(0)}{\varphi_2(n\lambda')} = -\frac{l}{\pi E} \sum_n \frac{b_n}{n} \frac{2 \operatorname{ch} \gamma_n b - (1+\nu) \gamma_n b \operatorname{sh} \gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b}.$$

Tak jak poprzednio przemieszczenie  $u$  nie może znikać jednocześnie w obu punktach podparcia.

3.2. Stan naprężeń i odkształceń w belce podpartej swobodnie. Poniżej przeprowadzimy ilościowe i jakościowe badania rezultatów uzyskanych dla stanu naprężeń i odkształceń belki prostej swobodnie podpartej, poddanej działaniu dowolnego obciążenia. Ograniczymy się jednak do obciążeń normalnych.

Obciążenie normalne  $\sigma_x$  znika na brzegach  $x=0$ ,  $x=l$ . W przekroju prostopadłym  $x = \text{const}$  naprężenie to zmienia się w sposób liniowy (przy założeniach teorii wytrzymałości materiałów) lub też w sposób bardziej skomplikowany, określony pewną krzywą (metody teorii sprężystości).

Dla warstwy środkowej (przeciwnie niż w teorii wytrzymałości, w której warstwa ta pokrywa się z warstwą obojętną) mamy

$$(3.29) \quad \sigma_x(x, 0) = \frac{1}{2} \sum_n a_n \frac{\Phi_9(0)}{\chi_2(n\lambda')} \sin \gamma_n x = \sum_n a_n \frac{\operatorname{sh} \gamma_n b - \gamma_n b \operatorname{ch} \gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x.$$

Warstwa obojętna będzie na ogół wypadła poniżej warstwy środkowej, co można sprawdzić na różnych przykładach.

Maksymalne i minimalne naprężenia w warstwach brzegowych określone są przez

$$(3.30) \quad \sigma_x(x, b) = \frac{1}{2} \sum_n a_n \left[ \frac{\kappa_2(n\lambda')}{\chi_2(n\lambda')} + \frac{\varphi_2(n\lambda')}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x = \\ = p(x) - \sum_n a_n \frac{2\gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x + \sum_n a_n \frac{2\gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b - 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x, \\ \sigma_x(x, -b) = \frac{1}{2} \sum_n a_n \left[ \frac{\kappa_2(n\lambda')}{\chi_2(n\lambda')} - \frac{\varphi_2(n\lambda')}{\psi_2(n\lambda')} \right] \sin \gamma_n x = \\ = - \sum_n a_n \frac{2\gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x - \sum_n a_n \frac{2\gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b - 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x,$$

przy czym występujące tu szeregi są szybko zbieżne. Biorąc pod uwagę początkowe wyrazy tych szeregów możemy napisać (dla przekroju środkowego  $x = l/2$  i dla

$\lambda = 2$ , co jest graniczną wartością tych  $\lambda$ , przy których można stosować elementarne metody rachunkowe w teorii sprężystości)

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \sigma_x \left( \frac{l}{2}, b \right) &= 2,742 a_1 - 1,160 a_3 + 1,015 a_5 - 1,001 a_7 + 1,000 a_9 - \dots, \\ \sigma_x \left( \frac{l}{2}, -b \right) &= -2,554 a_1 + 0,588 a_3 - 0,047 a_5 + \\ &\quad + 0,012 a_7 - 0,004 a_9 + 0,001 a_{11} - \dots \end{aligned}$$

Metody wytrzymałości materiałów dają

$$(3.31') \quad \sigma_x^R \left( \frac{l}{2}, \pm b \right) = \pm (2,418 a_1 - 0,269 a_3 + 0,097 a_5 - 0,050 a_7 + \\ + 0,030 a_9 - 0,020 a_{11} + \dots).$$

W przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie

$$(3.32) \quad p(x) = -\frac{4p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \gamma_n x,$$

mamy

$$(3.33) \quad \sigma_x \left( \frac{l}{2}, b \right) = -3,16 p, \quad \sigma_x \left( \frac{l}{2}, -b \right) = 3,02 p,$$

$$(3.33') \quad \sigma_x^R \left( \frac{l}{2}, \pm b \right) = \mp 3,00 p.$$

Wyniki uzyskane powyżej metodami wytrzymałości materiałów pokrywają się się z wynikami p. 2.2. uzyskanymi tymi metodami. Metodami elementarnymi teorii sprężystości (wielomiany biharmoniczne) uzyskaliśmy

$$(3.33'') \quad \sigma_x \left( \frac{l}{2}, \pm b \right) = \mp 3,20 p.$$

Zauważmy, że poprawniejsze wyniki uzyskane metodami szeregów Fouriera są zawarte pomiędzy wynikami teorii wytrzymałości materiałów a wynikami uzyskanymi za pomocą elementarnych metod teorii sprężystości. W p. 2.2. wykazaliśmy, że poprawkę uzyskaną za pomocą tych ostatnich metod można praktycznie pominąć, tym bardziej więc pominąć można poprawkę uzyskaną powyżej za pomocą metod dokładniejszych (metody te są dokładniejsze, ponieważ na przekrojach  $x = 0$ ,  $x = l$  nakłada się tu poprawne warunki brzegowe na naprężenia normalne  $\sigma_x$ ).

Naprężenie normalne  $\sigma_y$  znika na przekrojach  $x = 0$ ,  $x = l$ . Wynik ten nie jest poprawny i uzyskuje się go dzięki temu, że odpowiednia funkcja ma nieciągłość pierwszego rodzaju na tych przekrojach i suma szeregu jest równa średniej arytmetycznej granic prawostronnej i lewostronnej funkcji, która jest antysymetryczna względem tych przekrojów. W przekroju normalnym  $x = \text{const}$  (podobnie jak

określiliśmy to w p. 2.2)  $\sigma_y$  zmienia się w sposób nieliniowy i maleje, co do wartości bezwzględnej, od maksymalnej wartości  $p(x)$  do zera. Dla warstwy środkowej znajdziemy

$$(3.34) \quad \sigma_y(x, 0) = \frac{1}{2} \sum_n a_n \frac{\Phi_7(0)}{\chi_2(n\lambda')} \sin \gamma_n x = \sum_n a_n \frac{\text{sh } \gamma_n b + \gamma_n b \text{ ch } \gamma_n b}{\text{sh } 2\gamma_n b - 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x.$$

Naprężenie styczne  $\tau_{xy}$  znika na górnym i dolnym brzegu belki i wartość bliska maksymalnej osiąga w warstwie środkowej ( $y = 0$ ), dla której mamy

$$(3.35) \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\frac{1}{2} \sum_n a_n \frac{\Phi_3(0)}{\psi_2(n\lambda')} \cos \gamma_n x = \\ = \sum_n a_n \frac{\gamma_n b \text{ sh } \gamma_n b}{\text{sh } 2\gamma_n b - 2\gamma_n b} \cos \gamma_n x.$$

Dla  $\lambda = 2$  w przekroju podpory  $x = 0$  otrzymujemy

$$(3.36) \quad \tau_{xy}(0, 0) = 0,930 a_1 + 0,429 a_2 + 0,243 a_3 + 0,138 a_4 + 0,077 a_5 + 0,042 a_6 + \\ + 0,023 a_7 + 0,012 a_8 + \dots,$$

$$(3.36') \quad \tau_{xy}^R(0, 0) = 0,955 a_1 + 0,478 a_2 + 0,317 a_3 + 0,238 a_4 + 0,191 a_5 + 0,159 a_6 + \\ + 0,136 a_7 + 0,120 a_8 + \dots$$

W przypadku obciążenia rozłożonego równomiernie (3.32) znajdujemy

$$(3.37) \quad \tau_{xy}(0, 0) = -1,35 p, \quad \tau_{xy}^R(0, 0) = -1,50 p.$$

Zatem metody teorii wytrzymałości dają naprężenia styczne w przybliżeniu o 10% większe niż odpowiednie naprężenia obliczone na gruncie teorii sprężystości.

Jeśli chodzi o stan odkształceń belki, to przede wszystkim rozważymy przemieszczenie  $v$  w przypadku swobodnego podparcia w środkach końcowych przekrojów belki — co zostało przeprowadzone przez autora w pracach [33] i [34]. Ta składowa przemieszczenia znika na końcowych przekrojach  $x = 0$  i  $x = l$ , ponieważ odpowiednia funkcja, wobec periodyczności, ma w tych przekrojach nieciągłość pierwszego rodzaju. Podobnie jak w przypadku  $\sigma_y$  rozwinięcie w szereg nie odpowiada dokładnie zjawiskom fizycznym zachodzącym w pobliżu końców.

Równaniem odkształconej warstwy środkowej ( $y = 0$ ) będzie

$$(3.38) \quad E \frac{v(x, 0)}{b} = \frac{\lambda}{\pi} \sum_n \frac{a_n}{n} \frac{\Phi_{1-3}(0)}{\Psi_2(n\lambda')} \sin \gamma_n x = \\ = \sum_n \frac{a_n}{\gamma_n} \frac{2 \text{ ch } \gamma_n b + (1 + \nu) \gamma_n b \text{ sh } \gamma_n b}{\text{sh } 2\gamma_n b - 2\gamma_n b} \sin \gamma_n x.$$

Dla zbrojonego betonu otrzymamy w środku belki ugięcie

$$(3.39) \quad f = -\frac{l}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n} \frac{\frac{0,318}{n} + 0,891 \lambda' \operatorname{th} 1,571 n \lambda'}{\frac{\operatorname{sh} 1,571 n \lambda'}{n} \operatorname{ch} 1,571 n \lambda'};$$

szereg ten jest szybko zbieżny.

Przy  $\lambda = 2$  na gruncie teorii sprężystości uzyskamy

$$(3.40) \quad f = -\frac{l}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n} \frac{\frac{0,318}{n} + 0,145 \operatorname{th} 0,785 n}{\frac{\operatorname{sh} 0,785 n}{n} \operatorname{ch} 0,785 n},$$

natomiast metody wytrzymałości materiałów dają

$$(3.40') \quad f_R = -0,586 \frac{l}{E} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n}{n^2} \left(1 + \frac{1,736}{n^2}\right).$$

Biorąc pod uwagę początkowe wyrazy obu rozwinięć możemy napisać

$$(3.41) \quad E \frac{f}{l} = -1,496 a_1 + 0,052 a_3 - 0,008 a_5 + 0,002 a_7 - 0,000 a_9 + \dots,$$

$$(3.41') \quad E \frac{f_R}{l} = -1,554 a_1 + 0,075 a_3 - 0,024 a_5 + 0,012 a_7 - 0,007 a_9 + \dots$$

Wzory (3.41) i (3.41') dowodzą, że różnica jest bardzo mała. Dla lepszego jej określenia należy obliczyć ugięcie w kilku przypadkach szczególnych.

Dla równomiernie rozłożonego obciążenia (3.32) otrzymujemy

$$(3.42) \quad f = 1,885 \frac{pl}{E}, \quad f_R = 1,953 \frac{pl}{E},$$

zatem błąd, jaki dają metody teorii wytrzymałości materiałów, wynosi

$$(3.43) \quad \frac{1,953 - 1,885}{1,885} = 0,036 \approx 3,5\%.$$

Dla obciążenia o rozkładzie trójkątnym, którego rozwinięciem w szereg jest

$$(3.44) \quad p(x) = -\frac{8\bar{p}}{\pi^2} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n^2} \sin \gamma_n x,$$

mamy

$$(3.45) \quad f = 1,219 \frac{pl}{E}, \quad f_R = 1,267 \frac{pl}{E}.$$

zatem błąd jest rzędu

$$(3.46) \quad \frac{1,267 - 1,219}{1,219} = 0,038 \approx 4,0\%.$$

Obciążenie skupione działające w środku długości belki można zapisać w postaci

$$(3.47) \quad p(x) = -\frac{2P}{l} \sum_n (-1)^{(n-1)/2} \sin \gamma_n x,$$

zatem ugięcia wynoszą

$$(3.48) \quad f = 3,116 \frac{P}{E}, \quad f_R = 3,344 \frac{P}{E}$$

i błąd określony jest przez

$$(3.49) \quad \frac{3,344 - 3,116}{3,116} = 0,073 = 7,5\%.$$

Opierając się na wynikach uzyskanych dla rozpatrzonych powyżej przypadków obciążenia (przypadki te znacznie różnią się między sobą, a przypadek siły skupionej jest najniegodniejszy dla ścisłych obliczeń) możemy twierdzić, że dla belek o przekroju prostokątnym, dla których  $\lambda \geq 2$ , rachunek oparty na metodach teorii wytrzymałości materiałów daje wyniki z technicznego punktu widzenia wystarczająco dokładne zarówno dla stanu naprężeń, jak i stanu odkształceń.

Gdyby za teoretyczne punkty podparcia przyjąć punkty  $(x = 0, y = -b)$ ,  $(x = l, y = -b)$ , to należałoby do ugięcia  $f$  otrzymanego metodami teorii sprężystości dodać dodatkowe przemieszczenie w kierunku  $Oy$  występujące w przekrojach podparcia. Zatem błąd dotyczący stanu odkształceń jest w dalszym ciągu dość mały; można twierdzić, że nie przekracza 5% (jeśli brać pod uwagę wpływ sił poprzecznych). Zatem naprężenie normalne  $\sigma_y$ , które nie jest brane pod uwagę w teorii wytrzymałości materiałów, ma bardzo mały wpływ na odkształcenia belki.

#### Dodatek

Wprowadzimy następujące funkcje:

$$(D.1) \quad \begin{aligned} \Theta_1(\partial\pi\zeta) &= \frac{\partial\pi}{\text{ch } \partial\pi} [(2 + \partial\pi \text{ th } \partial\pi) \text{ ch } \partial\pi\zeta - \partial\pi\zeta \text{ sh } \partial\pi\zeta], \\ \Theta_2(\partial\pi\zeta) &= \frac{\partial\pi}{\text{ch } \partial\pi} [(1 + \partial\pi \text{ th } \partial\pi) \text{ sh } \partial\pi\zeta - \partial\pi\zeta \text{ ch } \partial\pi\zeta], \\ \Theta_3(\partial\pi\zeta) &= -\frac{\partial\pi}{\text{ch } \partial\pi} (\partial\pi \text{ th } \partial\pi \text{ ch } \partial\pi\zeta - \partial\pi\zeta \text{ sh } \partial\pi\zeta), \\ \Theta_4(\partial\pi\zeta) &= \frac{\partial\pi}{\text{ch } \partial\pi} [(1 - \partial\pi \text{ th } \partial\pi) \text{ sh } \partial\pi\zeta + \partial\pi\zeta \text{ ch } \partial\pi\zeta], \\ \Theta_5(\partial\pi\zeta) &= -\frac{\partial\pi}{\text{ch } \partial\pi} [(2 - \partial\pi \text{ th } \partial\pi) \text{ ch } \partial\pi\zeta + \partial\pi\zeta \text{ sh } \partial\pi\zeta]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_6(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh} \vartheta\pi} [(2 + \vartheta\pi \operatorname{cth} \vartheta\pi) \operatorname{sh} \vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch} \vartheta\pi\zeta], \\
 \Theta_7(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh} \vartheta\pi} [(1 + \vartheta\pi \operatorname{cth} \vartheta\pi) \operatorname{ch} \vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh} \vartheta\pi\zeta], \\
 \text{(D.1')} \quad \Theta_8(\vartheta\pi\zeta) &= -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh} \vartheta\pi} (\vartheta\pi \operatorname{cth} \vartheta\pi \operatorname{sh} \vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch} \vartheta\pi\zeta), \\
 \Theta_9(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh} \vartheta\pi} [(1 - \vartheta\pi \operatorname{cth} \vartheta\pi) \operatorname{ch} \vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh} \vartheta\pi\zeta], \\
 \Theta_{10}(\vartheta\pi\zeta) &= -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh} \vartheta\pi} [(2 - \vartheta\pi \operatorname{cth} \vartheta\pi) \operatorname{sh} \vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch} \vartheta\pi\zeta].
 \end{aligned}$$

Niech  $\xi, \eta$  będą bezwymiarowymi współrzędnymi

$$\text{(D.2)} \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

Będziemy pisali

$$\begin{aligned}
 \text{(D.3)} \quad \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Phi_i(\gamma_n y) \quad \text{dla} \quad \vartheta = \frac{n}{2} \lambda', \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \zeta = \eta, \\
 \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Psi_i(a_n y) \quad \text{dla} \quad \vartheta = \frac{n}{4} \lambda', \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad \zeta = \eta
 \end{aligned}$$

Wprowadza się również oznaczenia

$$\text{(D.4)} \quad \Theta_{i-j}(\vartheta\pi\zeta) = \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) - \nu \Theta_j(\vartheta\pi\zeta),$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona. Analogicznie dla  $\Phi_{i-j}(\gamma_n y)$  i  $\Psi_{i-j}(a_n y)$ .

Zauważmy, że zachodzą następujące (ułatwiający rachunki) związki różniczkowe

$$\text{(D.5)} \quad \frac{d\Theta_i(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = (-1)^{i+1} \Theta_{i+1}(\vartheta\pi\zeta), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{(D.5')} \quad \frac{d\Theta_j(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = (-1)^j \Theta_{j+1}(\vartheta\pi\zeta), \quad j = 6, 7, 8, 9.$$

Przyjmujemy ponadto oznaczenia

$$\begin{aligned}
 \Theta_4(\vartheta\pi) &= \varphi(\vartheta\pi) = \left( \operatorname{th} \vartheta\pi + \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2 \vartheta\pi} \right) \vartheta\pi, \\
 \Theta_2(\vartheta\pi) &= \psi(\vartheta\pi) = \left( \operatorname{th} \vartheta\pi - \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2 \vartheta\pi} \right) \vartheta\pi, \\
 \text{(D.6)} \quad \Theta_7(\vartheta\pi) &= \chi(\vartheta\pi) = \left( \operatorname{cth} \vartheta\pi + \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2 \vartheta\pi} \right) \vartheta\pi, \\
 \Theta_9(\vartheta\pi) &= \kappa(\vartheta\pi) = \left( \operatorname{cth} \vartheta\pi - \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2 \vartheta\pi} \right) \vartheta\pi.
 \end{aligned}$$

Ponadto przyjmujemy

$$(D.7) \quad \varphi_1(n\lambda') = \left( \operatorname{th} a_n b + \frac{a_n b}{\operatorname{ch}^2 a_n b} \right) a_n b, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$
$$\varphi_2(n\lambda') = \left( \operatorname{th} \gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{ch}^2 \gamma_n b} \right) \gamma_n b, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz analogiczne oznaczenia wprowadzimy dla funkcji  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\varkappa$ .

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] Б. Л. Абрамян, *Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника*, Д.А.Н. Арм. Е.Е.Р., 5, 21 (1955).
- [2] Б. Л. Абрамян, *К плоской задаче теории упругости для прямоугольника*, Прикл. Мат. Мех., 1, 21 (1957), 89.
- [3] G. B. AIRY, *On the Strains in the Interior of Beams*, British. Assoc. Adv. Sci. Rept., 1862.
- [4] G. B. AIRY, *On the Strains in the Interior of Beams*, Phil. Trans., 153 (1863), 49.
- [5] I. BABUŠKA and M. PRAGER, *Reissnerian Algorithms in the Theory of Elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 8, 8 (1960), 411.
- [6] R. BABUŠKOVÁ, *Poznámka k technické teorii ohybu*, Aplikace matematiky, 6, 6 (1961), 463.
- [7] H. BAY, *Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden* Dissertation Stuttgart 1931.
- [8] A. I. CIȘMIGIU, *Despre o clasificare tehnica a grinzilor drepte și a bolților cilindrice*, Ind. constr. și a mat. de constr. 6, 6 (1955), 332.
- [9] Fr. DISCHINGER, *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens*, Abh. Intern. Ver. für Brückenbau u. Hochbau, 1 (1932), 69.
- [10] L. N. G. FILON, *On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load*, Phil. Trans., A, 206 (1903), 63.
- [11] K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, Wien 1959.
- [12] И. И. Гольденблам, *Расчет и конструирование железобетонных балок-стенок*, Стройиздат Наркомстроя, Москва 1940.
- [13] R. GRAN OLSSON, *Über die Grundlagen der Balkenbiegung*, Der Bauing., 27/28, 21 (1940).
- [14] G. GRÜNING, *Beitrag zum Spannungsbild des wandartigen Trägers*, Baupl. u. Bautech., 8, 10 (1956), 335.
- [15] А. Е. Калманок, *К решению задачи о плоском напряженном состоянии прямоугольной пластинки*, Констр. и мат. в городском строительстве, 6 (1950), 70.
- [16] А. Е. Калманок, *Строительная механика пластинок*, Машистройиздат, Москва 1950.
- [17] А. Е. Калманок, *Расчет балок-стенок*, Гостехиздат, Москва 1956.
- [18] А. Е. Калманок, *Расчет пластинок*, Справочное пособие, Москва 1959.
- [19] A. MESNAGER, *Sur l'application de la théorie de l'élasticité au calcul des pièces rectangulaires fléchies*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, 132 (1901), 1475.
- [20] D. MORGENSTERN, *Bernoullische Hypothesen bei Balken- und Plattentheorie*, Z.A.M.M., 39 (1959), 420.
- [21] CHING-YOUAN NEOU, *A Direct Method for Determining Airy Polynomial Stress Functions*, J. Appl. Mech., 3, 24 (1957), 387.
- [22] M. RIBIÈRE, *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles*, Thèse, Paris 1889.
- [23] M. RIBIÈRE, *Sur la flexion des pièces épaisses*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, 126 (1898), 402.



- [24] M. RIBIÈRE, *Sur la résistance des massifs épais*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., Paris, 126 (1898), 1190.
- [25] P. P. TEODORESCU, *Calculul grinzilor pereți cu o singură deschidere în caz general de rezemare și încărcare*, Ed. Min. înv., București, 1955.
- [26] P. P. TEODORESCU, *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*, Com. Acad. R.P.R., 2, 6 (1956), 285.
- [27] P. P. TEODORESCU, *O metodă de aproximare a condițiilor pe contur în cazul problemei plane, a elasticității*, St. și cerc. de mec. apl., 3, 7 (1956), 655; *Sur une méthode d'approximation des conditions aux limites dans le cas du problème plan de la théorie de l'élasticité*, Rev. de Méc. appl., 2, 2 (1957), 237.
- [28] P. P. TEODORESCU, *Asupra calculului grinzilor pereți cu o singură deschidere*, Partea I, St. și cerc. de mec. apl., 1, 8 (1957), 115; Idem, Partea II, Ibid., 2, 8 (1957), 451; *Über die Berechnung wandartiger Träger auf zwei Stützen*, Rev. de Méc. appl., 2, 3 (1958), 125.
- [29] P. P. TEODORESCU, *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forți masice oarecare*, Bul. științ. Acad. R.P.R., Sect. șt. mat.-fiz., 2, 9 (1957), 481; *K плоской задаче теории упругости при произвольных объемных силах*, Rev. de Méc. appl., 3, 3 (1958), 333.
- [30] P. P. TEODORESCU, *Asupra ipotezei secțiunilor plane în rezistența materialelor*, An. Univ. «C. I. Parhon», seria șt. nat., 14, 6 (1957), 41.
- [31] P. P. TEODORESCU, *Considerații în legătură cu aplicarea metodelor elementare de calcul în problema plană a teoriei elasticității*, An. Univ. «C. I. Parhon», seria șt. nat., 6, 16 (1957), 35.
- [32] P. P. TEODORESCU, *Cîteva considerații în legătură cu problema plană a teoriei elasticității*, Bul. Mat. al Soc. de Șt. Mat. Fiz. din R.P.R., 3, 1 (1957), 369; *Quelques considérations concernant le problème plan de la théorie de l'élasticité*, Bull. Math. de la Soc. Sc. Math. Phys. de la R. P. R., 3, 1 (49), (1957), 369.
- [33] P. P. TEODORESCU, *Asupra aplicării metodelor de rezistența materialelor în calculul grinzilor drepte*, An. Univ. «C. I. Parhon», seria șt. nat., 7, 19 (1958), 9.
- [34] P. P. TEODORESCU, *Cîteva considerații în legătură cu calculul grinzilor drepte*, Șt. și cerc. de mec. apl., 1, 7 (1956), 173; *Некоторые соображения по вопросу расчета прямых балок*, Rev. de Méc. appl., 1, 5 (1960), 127.
- [35] S. P. TIMOSHENKO, Phil. Mag., 47 (1924), 1095.
- [36] A. TIMPE, *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion*, Dissertation, Zeitsch. Math. Phys., 52 (1905), 345.
- [37] W. VALENTINI, *Berechnung wandartiger Träger nach dem Zusammensetzverfahren*, Beton u. Stahlbetonbau, 8, 52 (1957), 176.
- [38] П. М. Варвак, *Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок*, И. А. Н. Укр. ССР, Киев, 2 (1952).
- [39] G. WORCH, *Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie*, Bautechnik-Archiv, 5 (1949), 43.
- [40] K. ZWELING, *Biharmonische Polynome*, Berlin 1952.

## Резюме

### ПРОЧНОСТЬ ПРЯМЫХ БАЛОК

#### I. ОБЩИЕ РАССУЖДЕНИЯ. СВОБОДНО ПОДПЕРТАЯ ПРЯМАЯ БАЛКА

Работа носит характер монографии, посвященной вопросам, касающимся прямых балок прямоугольного сечения, причем полученные результаты применяются также, с удовлетворительным приближением, к балкам произвольного сечения (за исключением тонкостенных балок). Работа основанная на различных исследованиях и на результатах полученных автором, имеет целью определить, прежде всего, область применимости методов теории

сопротивления материалов и обзор, с этой точки зрения, приближенных и точных методов теории упругости.

Исходя из рассуждений довольно общего характера, касающихся возможных случаев опирания и нагрузки прямых балок, автор переходит к систематическому обзору исчислительных методов теории сопротивления материалов и теории упругости и проводит исторический обзор этих вопросов.

В первой части статьи автор, при использовании бигармонических полиномов, исследует свободно опертые прямые балки. Прежде всего исследуется простой случай нагрузки, и нагрузки моментами, на концах балки, имеющий значение для всех, далее рассматриваемых случаев. Констатируется, что также другой, очень простой тип нагрузки — чистый изгиб, может привести к интересным проблемам. В этом случае напр. гипотезе, плоских сечений Бернули, удовлетворяется только приближенно. Среди нагрузок, распределенных непрерывно, рассматриваются равномерно распределенная нагрузка, линейно изменяющаяся нагрузка и нагрузка с параболическим распределением. Главное внимание обращается на случай равномерно распределяемой нагрузки, ввиду того, что этот случай признается типическим. Исследовалось, подробно поведение составляющих тензора напряжений и вектора перемещений, в зависимости от отношения  $\lambda$  между длиной балки и высотой ее поперечного сечения, а также от коэффициента Пауссона  $\nu$ . Приводятся многочисленные, интересные для исчислительной практики, сравнительные таблицы, полученных результатов и кроме того производятся тщательные исследования деформированных состояний, в зависимости от действительного способа опирания. Затем, доказывается, что элементарные методы теории упругости (бигармонические полиномы), можно успешно применять к случаям нагрузки, к которым они обычно не применялись, а именно к непрерывно распределенным нагрузкам с *разрывной* касательной (исследуется случай треугольного распределения), к прерывно распределенным нагрузкам) рассматривается случай нагрузки, распределенной равномерно на половине балки), а также к сосредоточенным нагрузкам (случай сосредоточенной силы и момента, действующих на верхнюю или нижнюю поверхность балки). Рассматривается также, для полного представления вопроса, случай нагрузки массовыми силами (случай собственного веса балки).

Простая, свободно опертая балка и подверженная действию произвольной нагрузки исследуется при использовании функций Эри, построенных с помощью тригонометрических рядов. Даются окончательные результаты довольно общего характера, для случая касательной и нормальной нагрузок верхней поверхности балки. Приводятся подробные исследования напряженного и деформированного состояний, при чем специальное внимание обращается на возможность практического использования полученных результатов.

Можно в общем подтвердить, что для прямых свободно опертых балок прямоугольного сечения, для которых  $\lambda \geq 2$ , расчет основанный на методах теории сопротивления материалов дает, с технической точки зрения, удовлетворительно точные результаты (за исключением случаев приведенных выше), как для напряженного так и для деформированного состояний.

## R é s u m é

### SUR LE CALCUL DE RESISTANCE DES POUTRES DROITES.

#### I. CONSIDERATIONS GENERALES. LA POUTRE DROITE SIMPLEMENT APPUYEE

On présente un travail ayant un caractère monographique sur le problème des poutres droites de section rectangulaire, les résultats obtenus pouvant être utilisés, avec une approximation suffisamment bonne, aussi pour les poutres droites de section transversale quelconque (exceptant les poutres à parois minces). L'article, basé sur différentes études de spécialité et sur les résultats de

l'auteur, a pour but spécialement de déterminer les limites d'applicabilité des résultats donnés par la résistance des matériaux et de passer en revue les méthodes plus ou moins approximatives ou exactes qu'on peut utiliser dans la théorie de l'élasticité, en précisant aussi leur limite d'applicabilité.

Après une étude, ayant un caractère général, concernant les cas d'appui et de chargement des poutres droites, on passe systématiquement en revue les méthodes de calcul de la résistance des matériaux et de la théorie de l'élasticité et on entreprend un court historique du problème.

Dans la première partie du travail on étudie la poutre droite simplement appuyée, d'abord à l'aide des polynômes biharmoniques. On commence avec l'un des plus simples cas de chargement: le chargement avec des moments sur les faces de bout, qui intéresse tous les cas de chargement qu'on étudie ultérieurement. On constate que même le plus simple cas de chargement, correspondant à une flexion simple, peut conduire à des problèmes intéressants; par exemple, même dans ce cas, l'hypothèse des sections planes de J. Bernoulli, est vérifiée seulement avec approximation. Dans le cadre des chargements distribués d'une manière continue, on étudie le cas d'une charge uniformément distribuée, le cas d'une charge à variation linéaire et le cas d'une charge à variation parabolique. On insiste surtout au problème d'une charge uniformément distribuée, le problème correspondant étant considéré comme un problème type, en étudiant en détail la variation de chaque composante du tenseur tension et du vecteur déplacement, en fonction du rapport  $\lambda$  entre l'ouverture de la poutre et l'hauteur de la section transversale et le coefficient de contraction transversale de Poisson. On donne différents tableaux comparatifs des résultats obtenus, intéressants pour la pratique du calcul, faisant une étude spéciale de l'état de déformation en fonction du mode réel d'appui de la poutre. On démontre ensuite que les méthodes élémentaires de la théorie de l'élasticité (polynômes biharmoniques) peuvent être utilisées avec succès aussi pour d'autres cas de chargement pour lesquels on ne les emploie pas d'habitude, précisément pour: des chargements distribués avec la tangente discontinue (on étudie le cas d'une charge à variation triangulaire), des chargements distribués discontinus (on considère le cas d'une charge uniformément distribuée actionnant sur la moitié de la poutre) ou des chargements avec des charges concentrées (le cas d'une force concentrée ou le cas d'un moment concentré, actionnant sur l'un des côtés d'en haut ou d'en bas de la poutre). Pour l'unité de présentation du problème, on considère aussi des cas de chargements avec des forces massiques (spécialement la pesanteur propre de la poutre).

La poutre droite simplement appuyée dans le cas d'une charge quelconque est étudiée à l'aide de certaines fonctions de tension du type d'Airy, construites en forme de développements en série trigonométrique. On donne des résultats finals, ayant un caractère général, à l'aide de certaines fonctions introduites par l'auteur dans l'Annexe, pour une charge normale et pour une charge tangentielle sur le côté d'en haut de la poutre. L'étude de l'état de sollicitation de la poutre est entreprise en détail, tant pour l'état de tension, que pour l'état de déformation, en insistant sur la possibilité d'utiliser pratiquement les résultats obtenus.

Généralement on peut affirmer que pour les poutres droites, simplement appuyées, de section transversale rectangulaire, avec  $\lambda \geq 2$ , on peut entreprendre un calcul suffisamment exact du point de vue technique (en exceptant certains problèmes spéciaux, qui ont été mentionnés), en utilisant les méthodes de la résistance des matériaux, tant en ce qui concerne l'état de tension qu'en ce qui concerne l'état de déformation.

ACADEMIA R. P. R.  
INSTITUTUL DE MATEMATICA  
BUCUREȘTI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 kwietnia 1961 r.*