

STEFAN ZAHORSKI

**DOŚWIADCZALNE BADANIA
NIEKTÓRYCH WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH GUMY**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CCXX**

TOM X · ZESZYT 1 · ROK 1962

SPIS TREŚCI

1. Próbki gumowe	193
2. Urządzenia do badań i metoda pomiaru	195
3. Podstawowe zależności teoretyczne	196
4. Statystyczne opracowanie wyników doświadczeń	197
5. Doświadczalne badanie płaskiego ścinania	199
6. Doświadczalne badanie prostego rozciągania	201
7. Dodatek. Proste rozciąganie	205

Praca obejmuje doświadczalną weryfikację pewnych zależności teoretycznych uzyskanych dla przypadków pseudopłaskiego ścinania i prostego rozciągania w założeniu, że materiał (guma) charakteryzuje się potencjałem sprężystości omówionym w pracy [1]. Potencjał ten otrzymano na drodze rozważań termodynamicznych w oparciu o pracę [2].

Przeprowadzone doświadczenia miały odpowiedzieć na pytanie, w jakim stopniu przyjęta postać potencjału sprężystości i postulowane schematy odkształcenia odpowiadają rzeczywistemu zachowaniu się próbek gumowych oraz jakie są orientacyjne wartości stałych materiałowych charakteryzujących badane gatunki gumy.

Należy nadmienić, że doświadczenia tego typu zostały przeprowadzone po raz pierwszy. Znane w literaturze przedmiotu badania doświadczalne, m.in. L. TRELOARA, [3], R. S. RIVLINA i A. N. GENTA, [4] i [5], W. L. BIDERMANA, [6], A. ISHIHARY, N. HASHITSUME i M. TATIBANY, [2], obejmują na ogół pewne specjalne gatunki kauczuku i gumy oraz ograniczają się przeważnie do prostszych postaci potencjału sprężystości. Na przykład R. S. RIVLIN bada własności mechaniczne materiału Mooneya na podstawie próby skręcania, [5], zaś L. TRELOAR na podstawie prób jednoosiowego i dwuosiowego rozciągania oraz czystego ścinania, [3].

Przedstawione w pracy badania doświadczalne ze względu na swój skromny charakter nie pretendują do miana obszernych i wyczerpujących zagadnienie; są one raczej wstępnym krokiem i wskazują na możliwości otwierające się w tej dziedzinie.

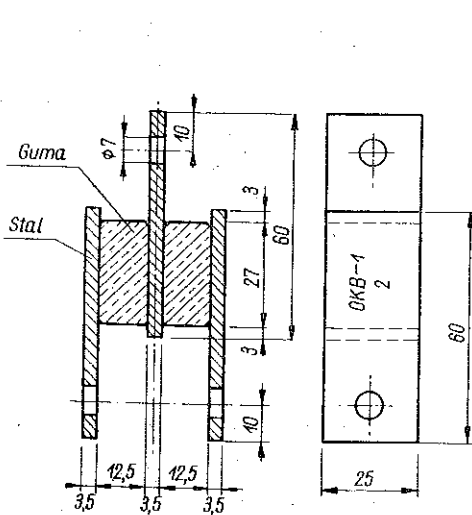
1. Próbkki gumowe

Badaniom doświadczalnym na płaskie ścinanie i proste rozciąganie poddano trzy rodzaje gumy technicznej używanej w przemyśle polskim. Przy wyborze gatunków gumy zwrócono głównie uwagę na twardość gumy wyrażoną w stopniach Shore'a i dobre, stosunkowo trwałe, własności sprężyste. Nie bez znaczenia, zwłaszcza przy próbach na ścinanie, był fakt, czy dany gatunek gumy pozwala uzyskiwać dobre połączenia z metalem. Ponieważ badania trwały pewien okres czasu, istotną rolę odgrywała dobra odporność gumy na zmiany temperatury, wilgotności powietrza itp. czynników.

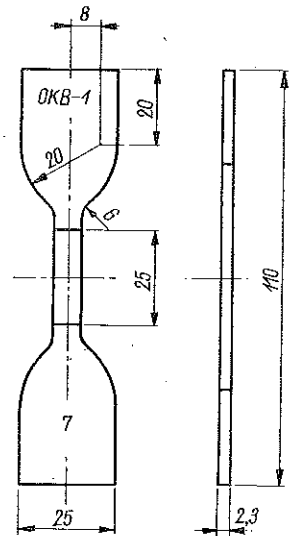
Wybrano trzy następujące gatunki gumy: OKA-1 (twardość 50-51° Sh), OKB-1 (twardość 55-56° Sh), OKD-1 (twardość 73-74° Sh). W tablicy 1 podano skład odpowiednich mieszanek gumowych, czas walcowania, temperaturę i czas wulkanizacji. Wytrzymałość na rozciąganie przy szybkościach odkształcenia rów-

Tablica 1

Składniki w częściach wag	Guma			Czas walcowania w min.
	OKA-1	OKB-1	OKD-1	
Kauczuk naturalny I gat.	10	100	100	6
Stearyna	1	1,5	1,5	1
Tlenek cynku	5	5	5	2
Merkapto	1	1	1,2	3
Thiuram	0,1	0,1	0,1	
Sadza Furnal	—	25	75	5
Siarka	2	2	2	3
Temperatura wałców 50-60°C				20
Czas wulkanizacji w min 3at. 143°C	5	5	15	—
Wytrzymałość w kG/cm ² przy 500 mm/min	~307	~300	~219	—
Wytrzymałość w kG/cm ² przy 5 mm/min	~107	188-223	152-185	—
Wydłużenie w % przy 5 mm/min	~592	552-580	300-340	—



Rys. 1



Rys. 2

nych 500 mm/min i 5 mm/min oraz maksymalne wydłużenia zamieszczono również w tablicy 1.

Próbki badane na płaskie ścinanie wykonano w postaci płaskich łączników, w których dwie części gumowe posiadały wymiary 27×25×12,5 mm (rys. 1). Płytki metalowe zaopatrzone w otwory do mocowania wykonano z blachy stalowej po obróbce mechanicznej poddano piaskowaniu w celu uzyskania lepszej przy-

czepności gumy do metalu. Wulkanizację przeprowadzono w specjalnej formie, którą po wstawieniu płytek i pokryciu ich powierzchnii klejami działającymi na zasadzie dyfuzyjnej napełniano uprzednio przygotowaną przewalcowaną masą gumową. Optimum wulkanizacji podano również w tablicy 1. Próbkę wyjmowano z formy po całkowitym ostygnięciu, oczyszczano i przechowywano w otwartym miejscu.

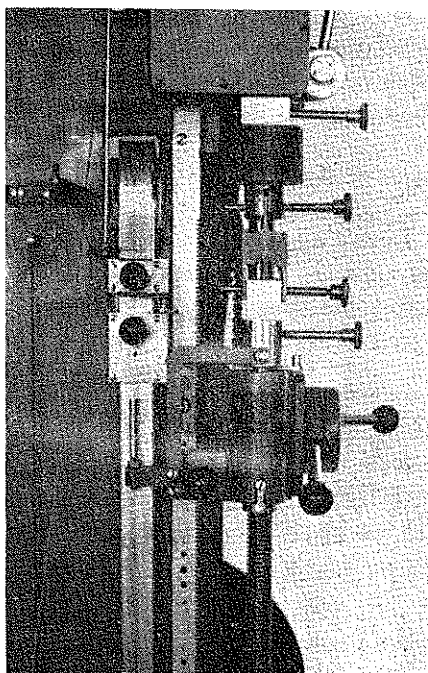
Łącznie wykonano dwanaście próbek na ścinanie, po cztery dla każdego rodzaju gumy. Właściwym badaniom poddano dziewięć próbek po trzy w każdej grupie materiału. Pozostałe trzy próbki służyły do sprawdzania wytrzymałości połączenia guma-metal oraz określenia właściwego zakresu odkształcania.

Próbki badane na jednoosiowe rozciąganie wykonano w postaci płaskich wiosełek o wymiarach znormalizowanych podanych na rys. 2. Próbkę te wycinano za pomocą specjalnego wykrojnika z płaskich płytek wulkanizowanej uprzednio gumy.

Łącznie wykonano dwadzieścia cztery próbki na rozciąganie, po osiem dla każdego rodzaju gumy. Właściwym badaniom poddano po trzy lub cztery próbki w każdej grupie materiału. Pozostałe próbki służyły do określenia zakresu odkształcania właściwego ze względu na odkształcenia trwałe i relaksację naprężenia.

2. Urządzenia do badań i metoda pomiaru

Próby na ścinanie i rozciąganie przeprowadzono na zrywarce firmy Louis Schopper. Zrywarka posiada napęd elektryczny lub ręczny za pośrednictwem śruby pociągowej poruszającej dolny suport wraz z uchwytem. Górny uchwyt połączony jest z systemem dźwigni obciążanych specjalnymi ciężarami tarczowymi. Trzy skale *A*, *B* i *C* umożliwiają pomiar siły obciążającej odpowiednio w zakresach: od 0 do 50 kG z dokładnością 0,1 kG, od 0 do 100 kG z dokładnością 0,2 kG, od 0 do 250 kG z dokładnością 0,5 kG. Elektryczny napęd zrywarki pozwala regulować prędkość odkształcania od 50 mm/min do 500 mm/min, a ruchoma pionowa skala wraz ze wskaźnikami pozwala odczytywać całkowite wydłużenia próbek w chwili zerwania. Regulację dźwigni i ustawienie skali na zerze uzyskuje się za pomocą małego przesuwne go ciężarka znajdującego się w górnej części urządzenia. Zerowe wskazania skali należy sprawdzić po każdej kolejnej próbie.



Rys. 3

Badane próbki mocowane są w specjalnych przyrządach widocznych na rys. 3, połączonych z górnym i dolnym uchwytem za pośrednictwem stożkowych sworzni. Przyrząd do badania próbek na ścinanie posiada specjalne wycięcia, w które wchodzi metalowe części próbki zapewniając w ten sposób ustawienie próbki w osi obciążania i zachowując odległości pomiędzy poszczególnymi płytkami metalowymi. Do badania na rozciąganie używano przyrządu zaopatrzonego w szczęki zaciskowe, umożliwiającego swobodne ustawianie się próbki wzdłuż osi obciążania.

Pomiary przeprowadzano za pomocą suwmiarki z noniusem dającym dokładność rzędu 0,1 mm. Przy próbach na ścinanie mierzono odległość między dwiema poziomymi płaszczyznami przyrządu mocującego. Różnica dwóch kolejnych pomiarów określa względne przemieszczenie w_0 części środkowej próbki względem części bocznych. Każdy pomiar przeprowadzano po upływie 1 min. od zakończenia obciążania.

Należy dodać, że próbki na rozciąganie ze względu na małe wymiary poprzeczne są stosunkowo czułe na niejednorodność struktury mieszanki gumowej i mikroskopijne uszkodzenia powierzchni. Istotne zatem znaczenie posiadają charakterystyki zbudowane w oparciu o średnie wyniki pewnej ilości prób.

3. Podstawowe zależności teoretyczne

Rozważając przypadek pseudopłaskiego ścinania (por. [7]) materiału charakteryzującego się potencjałem sprężystości (7.4), omówionym w pracy [1], otrzymamy następujący związek między siłą jednostkową S (na jednostkę wysokości) i przemieszczeniem części środkowej próbki w_0 :

$$(3.1) \quad S = \frac{2l}{a} (C_1 + C_2 + 6C_3) w_0 + 4C_3 \frac{l}{a^3} w_0^3 = \alpha w_0 + \beta w_0^3,$$

przy czym

$$(3.2) \quad \alpha = \frac{2l}{a} (C_1 + C_2 + 6C_3), \quad \beta = 4C_3 \frac{l}{a^3}.$$

We wzorach powyższych C_1 , C_2 i C_3 oznaczają charakterystyczne stałe materiałowe, l całkowitą podwójną szerokość próbki, a niezmienną w procesie odkształcenia grubość warstwy gumowej. Mnożąc siłę S przez wysokość próbki otrzymamy całkowitą siłę ścinającą P .

Dla przypadku prostego rozciągania otrzymujemy związek między naprężeniem umownym σ^* (odniesionym do pola przekroju początkowego) i współczynnikiem wydłużenia λ (stosunek długości elementu po odkształceniu do długości tego elementu przed odkształceniem) w następującej postaci (por. dodatek)

$$(3.3) \quad \sigma^* = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 4C_3 \left(\lambda^3 + 1 - \frac{2}{\lambda^3} \right).$$

Jeśli oznaczymy

$$(3.4) \quad \xi = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad \eta = \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right), \quad \zeta = \left(\lambda^3 + 1 - \frac{2}{\lambda^3} \right), \quad G = 2(C_1 + C_2),$$

to zamiast (3.3) otrzymamy

$$(3.5) \quad \sigma^* = 2C_1(\xi - \eta) + G\eta + 4C_3\zeta.$$

Porównywanie dwóch zupełnie różnych stanów odkształcenia (płaskie ścinanie i proste rozciąganie) wymaga ustalenia kryteriów porównawczych dla odpowiednich odkształceń.

Za wielkość charakterystyczną dla przypadku prostego płaskiego ścinania przyjmujemy $\operatorname{tg} \gamma \approx w_0/a$. Można pokazać, że proste ścinanie jest równoważne czystemu ścinaniu plus dodatkowy obrót (por. [8]). Otrzymamy

$$(3.6) \quad \operatorname{tg} \gamma = \lambda - \frac{1}{\lambda},$$

jeśli przez λ będziemy rozumieć charakterystyczny dla czystego ścinania współczynnik wydłużenia, mianowicie

$$(3.7) \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Dla prostego rozciągania (por. dodatek)

$$(3.8) \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Jeśli przyjmiemy, że zakres rozciągania określony współczynnikiem λ jest równoważny zakresowi czystego ścinania określonemu tym samym współczynnikiem λ , to zależność (3.6) może stanowić kryterium porównawcze między prostym płaskim ścinaniem i prostym rozciąganiem.

W myśl (3.6) dla $\lambda = 2$ (100% wydłużenia) $\operatorname{tg} \gamma = 1,5$, czyli $w_0 = 1,88$ cm (dla $a = 1,25$ cm); dla $\lambda = 3$ (200% wydłużenia) $\operatorname{tg} \gamma = 2,66$, czyli $w_0 = 3,33$ cm itp.

4. Statystyczne opracowanie wyników doświadczeń

Mając do dyspozycji otrzymane z doświadczenia wielkości Y_i w zależności od x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) będziemy poszukiwali takiej funkcji χ (lub znając postać funkcji χ — odpowiednich jej współczynników), żeby wielkości Y_i spełniały «jak najlepiej» zależność

$$(4.1) \quad y = \chi(x).$$

Innymi słowy, chcemy tak dobrać nadzieje matematyczne $\mathcal{E} Y_i = \chi(x_i)$, żeby wielkości Y_i z największym prawdopodobieństwem przybierały wartości y_i zgodne z (4.1).

Jeśli założymy, że rezultaty doświadczenia Y_i otrzymane dla argumentów x_i obarczone są błędami przypadkowymi, podlegającymi rozkładowi normalnemu (Gaussa) z jednakowym średnim odchyleniem kwadratowym $s_i = s$ (wszystkie pomiary dokonywane są w ten sam sposób przy użyciu tych samych przyrządów), to łączne prawdopodobieństwo, że wyniki pomiarów będą «najmniej» odchyłać się od krzywej (4.1), wyniesie (por. [9] i [10])

$$(4.2) \quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} [y_i - \chi(x_i)]^2\right\} = \frac{n}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \chi(x_i)]^2\right\}.$$

Aby (4.2) osiągało maksimum, trzeba żeby

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n [y_i - \chi(x_i)]^2 = \min.$$

Ostatnia zależność stanowi matematyczne sformułowanie metody «najmniejszych kwadratów», przy której suma kwadratów odchyłeń punktów doświadczalnych od otrzymanej w wyniku wygładzonej krzywej tworzy minimum.

Jeśli postać funkcji $\chi(x)$ jest znana, bądź wynika z pewnych teoretycznych przesłanek, a poszukujemy jedynie współczynników tej funkcji $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, to traktując χ jako funkcję argumentu x i współczynników $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, możemy warunek (4.3) zapisać w postaci równoważnego układu równań algebraicznych, z którego wyznaczymy współczynniki $\alpha, \beta, \gamma, \dots$,

$$(4.4) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - \chi(x_i, \alpha, \beta, \dots)] \left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\right)_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \chi(x_i, \alpha, \beta, \dots)] \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\right)_i = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Dla funkcji χ zgodnej z zależnością (3.1) układ równań (4.4) sprowadzi się do dwóch równań na współczynniki α i β :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n S_i w_{0i} - \alpha \sum_{i=1}^n w_{0i}^2 - \beta \sum_{i=1}^n w_{0i}^4 = 0, \\ \sum_{i=1}^n S_i w_{0i}^3 - \alpha \sum_{i=1}^n w_{0i}^4 - \beta \sum_{i=1}^n w_{0i}^6 = 0. \end{cases}$$

Jeśli podzielimy wielkości stojące pod znakami sum przez n , to otrzymamy ostatecznie układ dwóch równań, którego współczynnikami są «momenty statystyczne» (por. [10]), mianowicie

$$(4.6) \quad \begin{cases} a_{1,1}^*(S, w_0) - \alpha a_2^*(w_0) - \beta a_4^*(w_0) = 0, \\ a_{1,3}^*(S, w_0) - \alpha a_4^*(w_0) - \beta a_6^*(w_0) = 0. \end{cases}$$

Układ (4.6) posiada jednoznaczne rozwiązanie, o ile

$$(4.7) \quad \Delta = \alpha_2^*(w_0) \alpha_6^*(w_0) - \alpha_4^{*2}(w_0) \neq 0.$$

Znajomość współczynników α i β jest równoważna znajomości stałej C_3 i sumy $C_1 + C_2$ [por. (3.2)]. Jeśli natomiast chcemy określić dodatkowo stałą C_1 (lub C_2), to musimy wykorzystać uzyskaną dla prostego rozciągania zależność (3.5). Układ równań (4.4) sprowadzi się teraz do jednego równania

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^n [\sigma_i^* - 2C_1(\xi_i - \eta_i) - G\eta_i - 4C_3 \zeta_i](\xi_i - \eta_i) = 0,$$

z którego otrzymamy

$$(4.9) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2\sum(\xi_i - \eta_i)^2} [G\sum(\xi_i - \eta_i)\eta_i - 4C_3\sum(\xi_i - \eta_i)\zeta_i - \sum\sigma_i^*(\xi_i - \eta_i)], \\ C_2 = \frac{1}{2}G - C_1. \end{cases}$$

Badania na płaskie ścinanie pozwalają zgodnie z metodą «najmniejszych kwadratów» dobrać takie wartości $C_1 + C_2$ i C_3 , żeby krzywe teoretyczne określone wzorem (3.1) odpowiadały najbardziej prawdopodobnym przebiegom punktów doświadczalnych. Badania na proste rozciąganie można traktować jako dodatkową weryfikację doświadczalną, pozwalającą przez właściwy dobór stałej C_1 (przy znanych z próby na ścinanie stałych $C_1 + C_2$ i C_3) określić najbardziej prawdopodobny teoretyczny [zgodnie z (3.3)] przebieg krzywych rozciągania.

5. Doświadczalne badanie płaskiego ścinania

Wielkość mierzonego maksymalnego przemieszczenia w_0 ustalono zgodnie z prostym rozciąganiem [wzór (3.6)] w przybliżeniu na 1,5 cm dla gumy OKD-1, 3 cm dla gumy OKB-1, 1 cm dla gumy OKA-1. Ostatnia wielkość (1 cm) wynikała z wytrzymałości połączenia guma-metal.

Odpowiednie zakresy obciążenia wyniosły: 180 kG dla OKD-1, 210 kG dla OKB-1 oraz 27 kG dla OKA-1. We wszystkich badanych przypadkach odkształcenia trwale (po zdjęciu obciążenia) nie przekroczyły 2 do 3% przemieszczenia w_0 , tj. maksimum wynosiło 0,09 cm.

W tablicy 2 podano przykładowo liczbowe wyniki pomiarów dla próbki nr 3 wykonanej z gumy OKB-1. W tablicy tej zamieszczono również odpowiednie momenty statystyczne oraz wynikające z równań (4.6) i zależności (3.2) stałe $C_1 + C_2$ i C_3 . Tego rodzaju tablice-metryki sporządzono dla wszystkich pozostałych próbek.

Na rysunku 4 dokonano zestawienia wszystkich wyników otrzymanych z prób na ścinanie dla trzech badanych gatunków gumy. Krzywe ciągle zbudowano w oparciu o zależność (3.1) przyjmując do obliczeń średnie wartości stałych $C_1 + C_2$ i C_3 .

Linie proste przerywane są liniami stycznymi do krzywych ścinania w początku układu, tj. w punkcie $w_0 = 0$; odpowiadają one przypadkowi materiału Mooneya (dla $C_3 \equiv 0$). Mniej więcej do przemieszczenia $w_0 = 1,0$ cm ($\text{tg } \gamma = 0,8$) charakterystyki ścinania można uważać za linie proste zgodne ze wzorem M. Mooneya, [3], [por. wzór (3.1) dla $C_3 \equiv 0$]. Na rysunku 5 powtórzono wyniki dla gumy OKA-1 w nieco większej skali.

Tablica 2

OKB-1			Ścinanie. Nr próbek 2,5×2,7×1,25 cm.						3
<i>i</i>	Sila <i>P</i> kG	<i>S_i</i> kG/cm	Pomiar cm	<i>w_{0i}</i> cm	² <i>w_{0i}</i>	⁴ <i>w_{0i}</i>	⁶ <i>w_{0i}</i>	<i>S_iw_{0i}</i>	<i>S_iw_{0i}³</i>
0	0	0	4,42	0	0	0	0	0	0
1	10	1,85	4,64	0,22	0,05	0,00	0,00	0,41	0,02
2	20	3,70	4,78	0,36	0,13	0,02	0,00	1,33	0,19
3	30	5,56	4,93	0,51	0,26	0,07	0,02	2,84	0,72
4	40	7,41	5,09	0,67	0,45	0,20	0,09	4,97	2,22
5	50	9,26	5,28	0,86	0,74	0,55	0,41	7,96	5,93
6	60	11,12	5,44	1,02	1,04	1,08	1,12	11,34	11,79
7	70	12,97	5,63	1,21	1,46	2,13	3,13	15,69	22,96
8	80	14,82	5,81	1,39	1,93	3,73	7,18	20,60	39,72
9	90	16,67	5,97	1,55	2,40	5,76	13,84	25,84	62,01
10	100	18,51	6,14	1,72	2,96	8,76	25,91	31,84	94,22
11	110	20,38	6,30	1,88	3,53	12,46	44,09	38,31	135,32
12	120	22,23	6,45	2,03	4,12	16,97	69,89	45,13	185,84
13	130	24,09	6,62	2,20	4,84	23,43	113,42	53,00	256,56
14	140	25,92	6,75	2,33	5,43	29,49	159,77	60,39	327,89
15	150	27,79	6,89	2,47	6,10	37,21	227,11	68,64	418,80
16	160	29,63	7,04	2,62	6,86	47,06	322,92	77,63	532,45
17	170	31,50	7,16	2,74	7,51	56,40	423,54	86,31	648,27
18	180	33,32	7,28	2,86	8,18	66,91	547,56	95,30	779,69
19	190	35,20	7,42	3,00	9,00	81,00	729,00	105,60	950,40
20	200	37,02	7,50	3,08	8,49	90,06	854,39	114,02	1082,10
21	210	38,90	7,63	3,21	10,30	106,09	1092,96	124,87	1286,03
<i>n</i> =21			Σ		86,78	589,38	4636,35	992,02	6843,13

$$a_2^*(w_0) = 4,13, a_4^*(w_0) = 28,07, a_6^*(w_0) = 220,78,$$

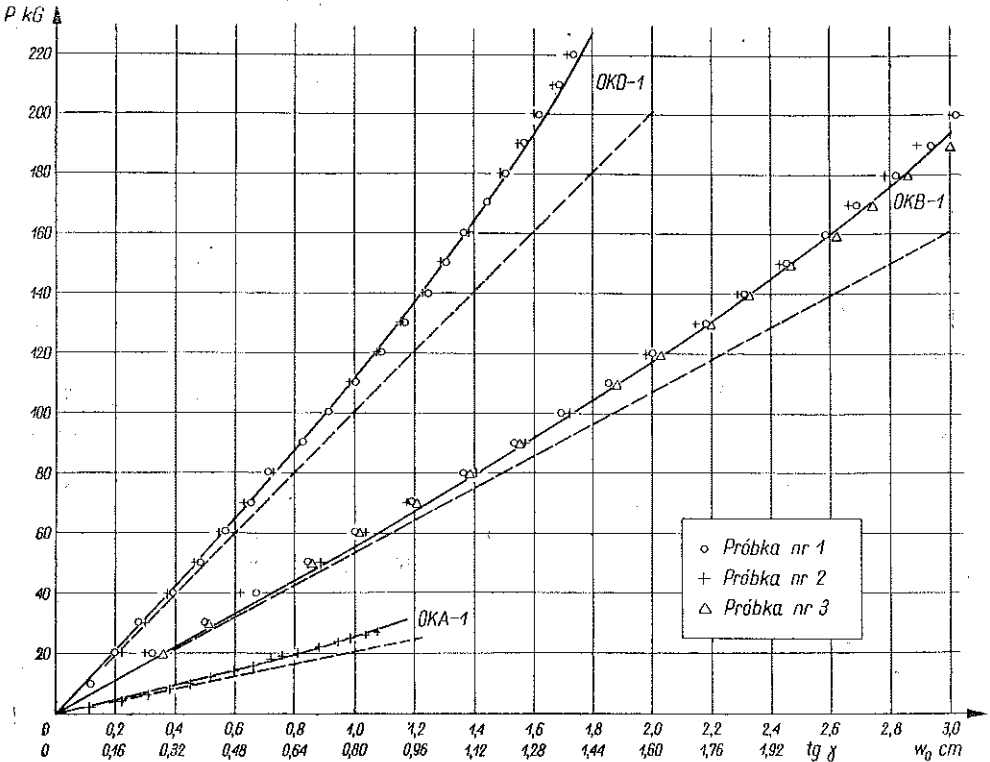
$$a_{1,1}^*(S, w_0) = 47,24, a_{1,3}^*(S, w_0) = 325,86,$$

$$C_1 + C_2 = 2,23 \pm 0,01, C_3 = 0,03 \pm 0,01.$$

Należy jeszcze dodać, że przy obliczeniach nie wzięto pod uwagę wyników dla próbek OKA-1 Nr 1, OKA-1 Nr 3 oraz OKD-1 Nr 3; próbki te uległy wcześniejszemu zniszczeniu (oddzielenie się części gumowych od metalowych) nie osiągając ustalonych wielkości odkształceń.

6. Doświadczalne badanie prostego rozciągania

Jak już wspomniano w p. 1, do badań na proste rozciąganie użyto od 3 do 4 próbek każdego gatunku gumy. Pozostałe próbki pozwoliły na drodze kolejnych prób ustalić współczynniki wydłużenia, przy których odkształcenia trwałe (po zdjęciu obciążenia) nie przekroczyły 2% odcinka pomiarowego (tj. około 0,05 cm) lub 1% maksymalnego wydłużenia. Równocześnie zwrócono uwagę, żeby ustalone maksymalne współczynniki wydłużenia nie wywoływały dostrzegalnego spadku obciążenia (relaksacja naprężeń), obserwowanego po upływie pewnego czasu przy dostatecznie dużym odkształceniu.



Rys. 4

Badane ostatecznie zakresy odkształcenia odpowiadały procesowi praktycznie sprężystemu i odwracalnemu.

Maksymalne współczynniki wydłużenia wyniosły $\lambda = 2$ dla gumy OKD-1 oraz $\lambda = 3$ dla gumy OKB-1 i OKA-1, zaś odpowiednie zakresy obciążenia 5 kG dla OKD-1, 3 kG dla OKB-1 oraz 1,5 kG dla OKA-1. Wielkości λ odpowiadają w myśl (3.6) wielkościom dla prób na ścinanie.

Tablica 3

OKB-1			Rozciąganie (wyniki średnie)						
i	Siła kG	Pomiar cm	σ^* kG/cm ²	Wydł. cm	λ	$(\xi_i - \eta_i)^2$	$\sigma^*(\xi_i - \eta_i)$	$\eta_i(\xi_i - \eta_i)$	$\zeta_i(\xi_i - \eta_i)$
1	0	2,44	0	0	1	0	0	0	0
2	0,2	2,90	1,33	0,46	1,19	0,01	0,11	0,03	0,12
3	0,5	3,31	3,33	0,87	1,36	0,05	0,73	0,13	0,60
4	0,7	3,60	4,67	1,16	1,48	0,11	1,54	0,23	1,20
5	1,0	4,19	6,67	1,75	1,72	0,34	3,87	0,46	3,30
6	1,4	4,97	9,33	2,53	2,04	0,83	8,49	0,81	8,44
7	1,5	5,33	10,00	2,89	2,18	1,15	10,70	0,96	11,94
8	1,6	5,51	10,67	3,07	2,26	1,32	12,27	1,05	14,23
9	1,8	5,86	12,00	3,42	2,40	1,69	15,60	1,21	19,08
10	2,0	6,06	13,33	3,62	2,48	1,93	18,53	1,29	22,39
11	2,2	6,37	14,67	3,93	2,61	2,31	22,30	1,43	28,35
12	2,4	6,61	16,00	4,17	2,71	2,62	25,92	1,54	33,68
$n = 12$					Σ	12,36	120,06	9,14	143,33
						dla $C_1 + C_2 = 2,19,$	$C_1 = 2,08,$	$C_2 = 0,11,$	
						$C_1 + C_2 = 2,35,$	$C_1 = 2,20,$	$C_2 = 0,15.$	

W tablicy 3 podano przykładowo średnie wyniki dla gumy OKB-1 i odpowiednie wartości stałych C_1 i C_2 obliczone według zależności (4.9).

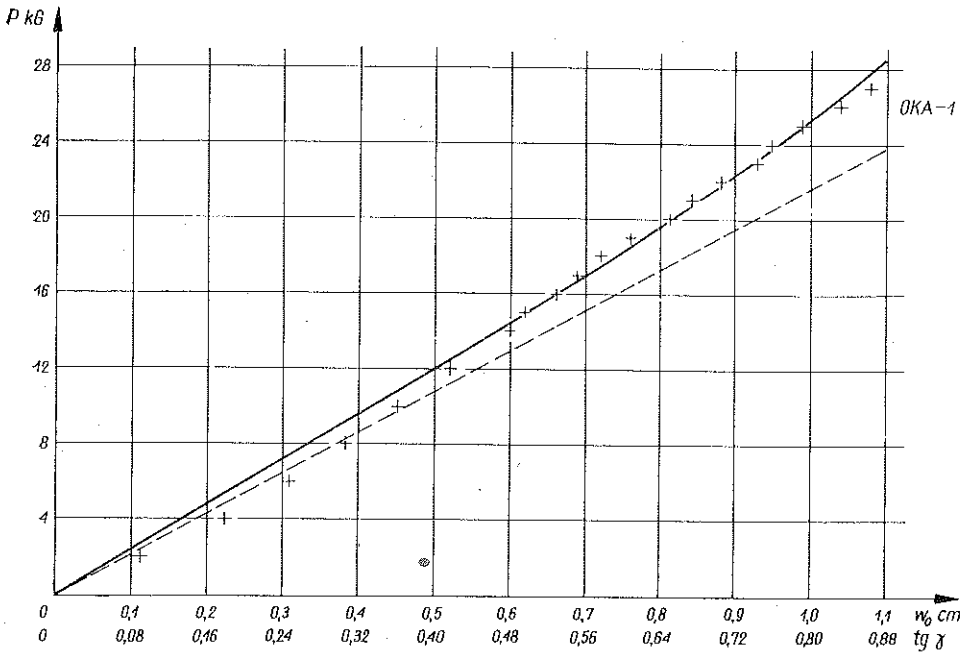
Na rysunku 6 dokonano zestawienia wyników otrzymanych z prób na rozciąganie. Krzywe ciągle zbudowano w oparciu o zależność (3.3), przyjmując do obliczeń

Tablica 4

Próbka	Nr	$C_1 + C_2$	C_3	śred. śred.		C_1	C_2	C_3
				$C_1 + C_2$	C_3			
OKA-1	1	—	—					
	2	0,73	0,07	0,73	0,07	0,64	0,09	0,07
	3	—	—					
OKB-1	1	2,35	0,04					
	2	2,19	0,05	2,27	0,04	2,14	0,13	0,04
	3	2,23	0,03					
OKD-1	1	3,72	0,20					
	2	3,32	0,25	3,52	0,23	3,52	0,00	0,23
	3	—	—					

średnie wielkości stałych C_1, C_2 i C_3 — uzyskane z prób na ścinanie i rozciąganie. Tablica 4 podaje ostateczne wartości C_1, C_2 i C_3 obliczone z dokładnością do 0,01 kG/cm². Krzywe przerywane zbudowano dla przypadku materiału Mooneya w założeniu, że stałe C_1 i C_2 ($C_3 \equiv 0$) są ustalone na podstawie prób na ścinanie; a odpowiednie proste najlepiej oddają przebieg charakterystyk ścinania (por. rys. 4),

Krzywe ciągłe znacznie lepiej pasują do rozkładu punktów doświadczalnych niż krzywe przerywane; te ostatnie różnią się istotnie od krzywych ciągłych, zwłaszcza dla większych wydłużeń. Mniej więcej do 30—40% wydłużenia ($\lambda = 1,3—1,4$), krzywe Mooneya nie różnią się praktycznie od krzywych teoretycznych, zbudowanych według wzoru (3.3) dla ogólniejszej postaci potencjału sprężystości, podanego w pracy [1]. W miarę wzrostu wydłużenia różnice stają się tym większe, im więcej odpowiednia stała C_3 różni się od zera.



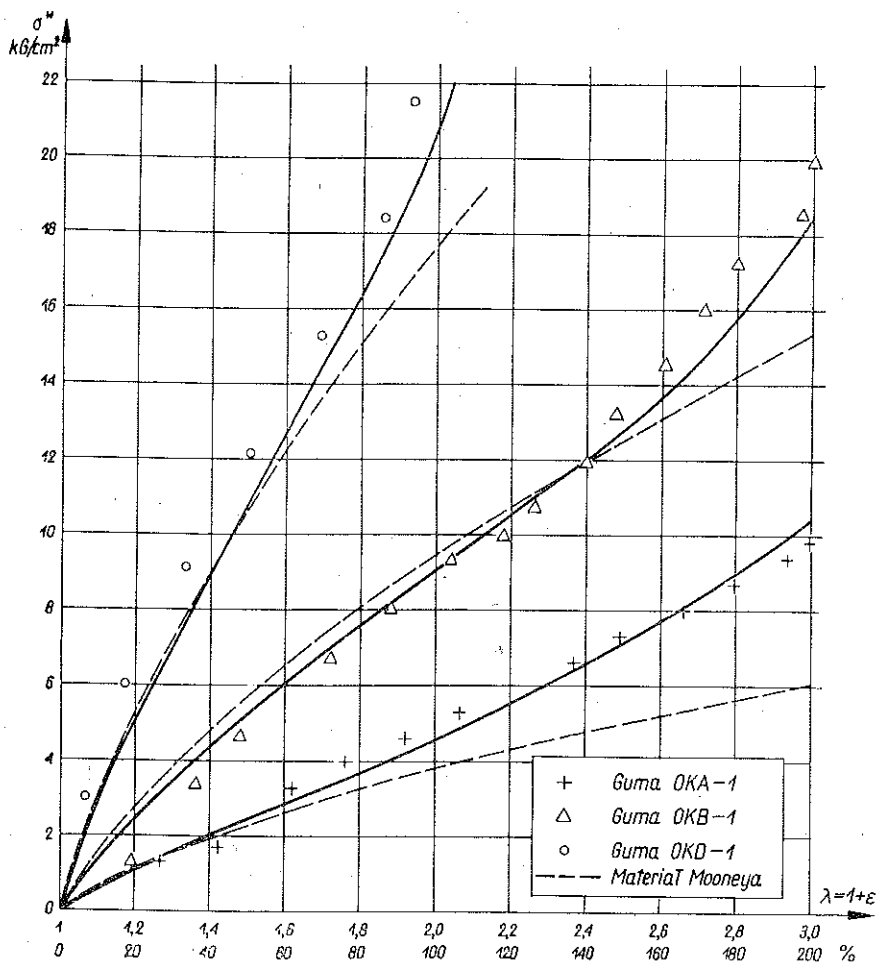
R s. 5

Jak widać z rys. 6, tylko dla gumy OKD-1 krzywa teoretyczna przebiega nieco poniżej linii wyznaczonej przez punkty doświadczalne, zachowując przy tym pełne podobieństwo. Należy sądzić, że w tym przypadku mamy do czynienia z błędem systematycznym wynikającym z samego sposobu mocowania próbki. Otóż guma OKD-1 jest stosunkowo «sztywna» i jak można przypuszczać próbka-wioselko mocowana w zaciskach wstępnie wygina się wymagając do wyprostowania pewnego niewielkiego obciążenia rzędu 0,15 kG (około 1 kG/cm².) Ta ostatnia wartość pokrywa się mniej więcej z dokładnością podziałki skali A zrywarki Schoppera.

Reasumując otrzymane wyniki można podać następujące wnioski:

1. Przeprowadzone badania doświadczalne dla dwóch zupełnie różnych stanów odkształcenia (płaskie ścinanie i proste rozciąganie) potwierdzają dobrą zgodność charakterystyk teoretycznych z doświadczalnymi w stosunkowo dużym zakresie odkształceń, niejednokrotnie większym niż w praktycznych zastosowaniach.

2. Wyniki doświadczeń wykazują, że wyprowadzona przez autora postać potencjału sprężystości, zawierająca trzy stałe charakteryzujące własności mechaniczne gumy (por. [1] lub dodatek, wzór (7.4)), dobrze oddaje rzeczywiste własności materiału w zakresie dużych odkształceń sprężystych.



Rys. 6

3. Wyniki doświadczeń potwierdzają stosowalność wzoru M. Mooneya (por. [3]) w zakresie niezbyt dużych odkształceń.

4. Przyjęty w przypadku płaskiego ścinania teoretyczny schemat odkształcenia (por. [7]) odpowiada dobrze rzeczywistemu schematowi odkształcenia próbek ścinanych.

7. Dodatek. Proste rozciąganie

Ogólne związki dla prostego rozciągania zostały podane m.in. w pracach [2] i [6]. W niniejszym dodatku wyprowadzono wzór (3.3), tj. zależność między «umownym naprężeniem» σ^* i współczynnikiem wydłużenia λ .

W ciele *nieodkształconym* przyjmujemy nieruchomy układ współrzędnych kartezjańskich $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

W ciele *odkształconym* współrzędne punktu P , który przed odkształceniem zajmował położenie $P_0(x, y, z)$, można zapisać w postaci

$$(7.1) \quad y^1 = \lambda x, \quad y^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} y, \quad y^3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} z,$$

jeśli przez λ rozumiemy współczynnik wydłużenia w kierunku osi $x^1 = x$. Kowariantny i kontrawariantny tensor metryczny przybiorą postać

$$(7.2) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że warunek nieściśliwości jest tożsamościowo spełniony, ponieważ $\det(G_{ij}) = 1$.

Niezmienniki stanu odkształcenia są następujące:

$$(7.3) \quad I_1 = g^{rs} G_{rs} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad I_2 = g_{rs} G^{rs} I_3 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_3 = 1.$$

Wychodząc z potencjału sprężystości w postaci (por. [1])

$$(7.4) \quad W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9)$$

i uwzględniając że

$$(7.5) \quad \tau^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + p G^{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} g^{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs}) + p G^{ij},$$

otrzymamy następujące składowe fizyczne stanu naprężenia:

$$(7.6) \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \lambda^2 \tau^{11} = 2(C_1 + 2C_3 I_1) \lambda^2 + 4C_2 \lambda + p, \\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{\lambda} \tau^{22} = 2(C_1 + 2C_3 I_1) \frac{1}{\lambda} + 2C_2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0. \end{cases}$$

Warunki równowagi wewnętrznej spełnione są tożsamościowo. Ponieważ dla prostego rozciągania $\sigma_{22} = \sigma_{33} \equiv 0$, toteż

$$(7.7) \quad p = -2(C_1 + 2C_3 I_1) \frac{1}{\lambda} - 2C_2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right),$$

i ostatecznie

$$(7.8) \quad \sigma_{11} = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 4C_3 \left(\lambda^4 + \lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right).$$

Przy badaniach doświadczalnych wygodniej jest jednak odnosić naprężenie do początkowej powierzchni nieodkształconego przekroju. Tak obliczone naprężenie σ^* będziemy nazywać «umownym naprężeniem».

Elementy powierzchni po odkształceniu i przed odkształceniem wynoszą odpowiednio

$$(7.9) \quad dS_i = \sqrt{GG^{ik}} d\theta^j d\theta^k, \quad dS_i^* = \sqrt{gg^{ik}} d\theta^j d\theta^k;$$

otrzymamy zatem (pamiętając że $G = g = 1$, $g^{ij} = \delta_j^i$)

$$(7.10) \quad \sigma_{ii}^* = \sigma_{ii} \frac{dS_i}{dS_i^*} = \sqrt{G^{ii}} \sigma_{ii} \quad (\text{nie sumować!}).$$

Jeśli wykorzystamy (7.8) i weźmiemy pod uwagę (7.2), to «umowne naprężenie» przybierze ostatecznie postać

$$(7.11) \quad \sigma^* = \sigma_{11}^* = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 4C_3 \left(\lambda^3 + 1 - \frac{2}{\lambda^3} \right).$$

W szczególnym przypadku materiału Mooneya (por. [3]), tj. dla $C_3 \equiv 0$, otrzymamy

$$(7.12) \quad \sigma^* = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right).$$

* * *

Autor wyraża podziękowanie Instytutowi Przemysłu Gumowego w Warszawie za wykonanie próbek i udostępnienie urządzeń do przeprowadzenia doświadczeń.

Literatura cytowana w tekście

- [1] S. ŻAHOŃSKI, *A Form of Elastic Potential for Rubber-Like Materials*, Arch. Mech. Stos., 5, 11 (1959), 613-618.
- [2] A. ISHIHARA, N. HASHITSUME, M. TATIBANA, *Statistical Theory of Rubber-Like Elasticity*, J. Chem. Phys., 12, 19 (1951), J. Appl. Phys., 3, 23 (1952), 308-312.
- [3] L. TRELOAR, *The Physics of Rubber-Like Elasticity*, Oxford 1949.
- [4] A. N. GENT, R. S. RIVLIN, *Experiments on the Mechanics of Rubber*, Proc. Phys. Soc., B, 65 (1952), 118-121, 487-501, 645-648.
- [5] R. S. RIVLIN, *Torsion of Rubber Cylinder*, J. Appl. Phys., 18 (1947), 444-449.
- [6] В. Л. Бидерман, *Вопросы расчета резиновых деталей*, Сб. Расчеты на прочность, 3, Москва 1958.

- [7] S. ZANORSKI, *Kołowo-symetryczne i płaskie ścinanie łączników gumowych w świetle nieliniowej teorii sprężystości*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960), 273-291.
- [8] A. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge 1934.
- [9] B. L. VAN DER WAERDEN, *Mathematische Statistik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
- [10] E. C. ВЕНЦЕЛЬ, *Теория веролтностей*, Москва 1958.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕЗИНЫ

В работе приводится экспериментальная проверка теоретических характеристик, полученных для случаев псевдо-плоского сдвига и простого одноосного растяжения, при предположении, что материал (резина) определяется упругим потенциалом в виде обобщающей формулы М. Муни (ср. [1]).

На рисунке 4,5 и 6 сопоставляются экспериментальные результаты для трех сортов резины ОКА-1, ОКВ-1 и ОКД-1 с теоретическими результатами (непрерывные кривые), получая надлежащую согласованность в относительно большом диапазоне упругих деформаций. Используя теоретические зависимости и применяя метод «наименьших квадратов» определяются значения трех постоянных материала C_1 , C_2 и C_3 , характеризующих механические свойства исследуемых сортов резины (табл. 4).

Результаты экспериментов указывают также правильность постулированных схем деформации и подтверждают применимость формулы М. Муни в диапазоне деформаций не превышающих 30-40%.

Summary

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CERTAIN MECHANICAL PROPERTIES OF RUBBER

The paper contains a description of an experimental verification of the theoretical characteristics in the case of pseudoplane shear and simple tension, assuming that the material (rubber) is described by an elastic potential in a form constituting a generalization of the equation of M. Mooney (cf. [1]).

Figs. 4,5 and 6 show the theoretical and experimental results for three rubber types: OKA - 1, OKB - 1, OKD - 1, the theoretical results being represented by the continuous curves. Good agreement is found in a relatively broad range of elastic strain. Making use of the theoretical relations and applying the method of least squares, the values of three material constants C_1 , C_2 and C_3 characterizing the mechanical properties of the rubbers tested (Table 4) are computed.

The test results show also the correctness of the assumed deformation scheme and confirm the applicability of the M. Mooney equation in the range of strains not exceeding 30-40%.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 sierpnia 1961 r.