

DRGANIA SWOBODNE BELKI
PRZY SŁABO NIELINIOWYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

K. PISZCZEK, L. SOBEJKO (KRAKÓW)

Wstęp

W pracy [1] podano sposób obliczania częstości drgań własnych belki przy jednym nieliniowym warunku brzegowym. W niniejszym opracowaniu przedstawiono sposób obliczania częstości drgań swobodnych w przypadku ogólniejszym, mianowicie gdy dwa spośród czterech warunków brzegowych sprężystego zamocowania końców belki zawierają wyrazy nieliniowe. Jak wynika z pracy, metoda ta może mieć zastosowanie również w przypadku większej liczby warunków nieliniowych.

1. Rozwiązanie ogólne zagadnienia

Równanie różniczkowe drgań swobodnych belki o stałym przekroju ma w ujęciu liniowym postać

$$(1.1) \quad EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

gdzie E oznacza moduł Younga, J moment bezwładności pola przekroju, m masę jednostki długości, $u(x, t)$ przemieszczenie poprzeczne punktu linii środkowej belki o współrzędnej x w chwili t .

Równaniu różniczkowemu (1.1) przyporządkujemy następujące warunki brzegowe, z których dwa są nieliniowe:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} EJ u_{xx}(0, t) - h_1 u_x(0, t) &= 0, \\ EJ u_{xxx}(0, t) + c_1 u(0, t) &= 0, \\ EJ u_{xx}(l, t) + h_2 u_x(l, t) + \varepsilon \gamma_1 [u_x(l, t)]^3 &= 0, \\ EJ u_{xxx}(l, t) - c_2 u(l, t) - \varepsilon \gamma_2 [u(l, t)]^3 &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe niech mają postać ogólną

$$(1.3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

W powyższych wyrażeniach przyjęliśmy następujące oznaczenia: $u_x = \partial u / \partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, $u_{xxx} = \partial^3 u / \partial x^3$, $u_t = \partial u / \partial t$; l oznacza długość belki, ε bezwymiarowy mały parametr, γ_1 oraz γ_2 stałe współczynniki, h_1 , h_2 , c_1 i c_2 współczynniki sprężystego zamocowania.

Rozdzielając zmienne w równaniu (1.1) napiszemy rozwiązanie w postaci

$$(1.4) \quad U(x, t) = X(x) T(t),$$

gdzie $X(x)$ jest funkcją tylko położenia x , $T(t)$ tylko czasu t . Po wstawieniu (1.4) do równania (1.1) i podzieleniu całości przez XT otrzymujemy dwa równania różniczkowe:

$$(1.5) \quad X^{(4)} - \lambda^4 X = 0, \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0,$$

przy czym między ω i λ zachodzi związek

$$(1.6) \quad \omega^2 = \frac{\lambda^4 EJ}{m}.$$

Rozwiązanie ogólne równania (1.5)₁ dla dowolnej wartości λ jako parametru ma postać

$$(1.7) \quad X(x, \lambda) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x.$$

W przypadku liniowych warunków brzegowych ($\varepsilon = 0$) stałe C_2 , C_3 i C_4 wyrazimy za pomocą stałej C_1 , przy czym dla istnienia rozwiązań niezerowych parametr λ powinien spełniać równanie charakterystyczne

$$(1.8) \quad F(\lambda_n) = 0.$$

Pierwiastki równania (1.8) $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) i związek (1.6) dają ciąg częstości drgań własnych

$$(1.9) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^4 EJ}{m}}.$$

W przypadku słabo nieliniowych warunków brzegowych ($\varepsilon \neq 0$) częstości kątowne mało będą się różnić od wartości podanych w (1.9). Oznaczmy przez $X_1(x, \lambda)$ funkcję (1.7) spełniającą równanie (1.5) i warunki brzegowe (1.2)₁, (1.2)₂ i (1.4) przy $\gamma_2 = 0$. Na podstawie powyższych trzech warunków wyrazimy stałe C_2 , C_3 i C_4 występujące w rozwiązaniu (1.7) przez stałą C_1 . Mamy więc

$$(1.10) \quad X_1(x, \lambda) = C_{11} f_1(x, \lambda),$$

gdzie C_{11} przedstawia inaczej napisaną stałą C_1 . Niech następnie $X_2(x, \lambda)$ oznacza funkcję (1.7) spełniającą równanie (1.5)₁ i warunki brzegowe (1.2)₁, (1.2)₂, i (1.2)₃ przy $\gamma_1 = 0$. Znowu na podstawie powyższych trzech warunków wyrazimy stałe C_2 , C_3 i C_4 występujące w rozwiązaniu (1.7) przez stałą C_1 . Obecnie mamy

$$(1.11) \quad X_2(x, \lambda) = C_{12} f_2(x, \lambda),$$

gdzie C_{12} przedstawia nową stałą. Na podstawie (1.5)₁ i (1.6) stwierdzamy, że funkcja

$$(1.12) \quad U(x, t) = T[f_1(x, \lambda) + f_2(x, \lambda)]$$

spełnia równanie (1.1) i warunki brzegowe (1.2)₁ oraz (1.2)₂ przy każdej wartości λ takiej, że zachodzi związek (1.6), gdzie ω jest częstością kątowną funkcji $T(t)$.

W przypadku $\varepsilon = 0$ funkcja (1.12) dla $\lambda = \lambda_n$ spełnia wszystkie warunki brzegowe (1.2) i równanie (1.1), przy czym ze względu na to, że

$$(1.13) \quad f_1(x, \lambda_n) \equiv f_2(x, \lambda_n),$$

ma ona postać

$$(1.14) \quad u(x, t) = 2f(x, \lambda_n) T_1(t).$$

Przechodząc do przybliżonego rozwiązania zagadnienia nieliniowego funkcje $f_1(x, \lambda)$ oraz $f_2(x, \lambda)$ przedstawimy w postaci szeregu Taylora w otoczeniu obranego jednego z pierwiastków λ_n równania charakterystycznego (1.8). W ten sposób ograniczymy się do obliczenia częstości drgań własnych zagadnienia nieliniowego, odpowiadającej temu właśnie pierwiastkowi (dalej przyjmiemy $n = 1$). Pomijamy wpływ na obliczoną częstość drgań pozostałych harmonicznych. W wyniku rozłożenia w szereg mamy

$$(1.15) \quad \begin{aligned} f_1(x, \lambda) &= f_1(x, \lambda_n) + \left[\frac{df_1}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} (\lambda - \lambda_n) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 f_1}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=\lambda_n} (\lambda - \lambda_n)^2 + \dots, \\ f_2(x, \lambda) &= f_2(x, \lambda_n) + \left[\frac{df_2}{d\lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} (\lambda - \lambda_n) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 f_2}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=\lambda_n} (\lambda - \lambda_n)^2 + \dots, \end{aligned}$$

przy czym ma miejsce związek (1.13). Niech

$$(1.16) \quad \lambda = \lambda_n + \varepsilon \beta_{1n} + \varepsilon^2 \beta_{2n} + \dots,$$

gdzie β_{1n}, β_{2n} , przedstawiają stałe, które mamy wyznaczyć. Jeśli rozwinięcie (1.16) uwzględnimy w (1.15) i te ostatnie wyrażenia uporządkujemy według rosnących potęg parametru, to otrzymamy

$$(1.17) \quad \begin{aligned} f_1(x, \lambda) &= \varphi_{01}(x, \lambda_n) + \varphi_{11}(x, \lambda_n) \varepsilon + \varphi_{21}(x, \lambda_n) \varepsilon^2 + \dots, \\ f_2(x, \lambda) &= \varphi_{02}(x, \lambda_n) + \varphi_{12}(x, \lambda_n) \varepsilon + \varphi_{22}(x, \lambda_n) \varepsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

przy czym

$$(1.18) \quad \varphi_{01}(x, \lambda_n) = \varphi_{02}(x, \lambda_n) \equiv f(x, \lambda_n).$$

W celu uwidocznienia wpływu poszczególnych nieliniowości na częstość drgań własnych wprowadzimy następujące zależności funkcyjne:

$$(1.19) \quad \delta_1 = \delta(\gamma_1) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \gamma_1 \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } \gamma_1 = 0; \end{cases}$$

oraz

$$(1.20) \quad \delta_2 = \delta(\gamma_2) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \gamma_2 \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Przy powyższych oznaczeniach suma występująca w (1.12) przyjmie postać

$$(1.21) \quad \begin{aligned} f_1(x, \lambda) + f_2(x, \lambda) &= \delta_1 f_1(x, \lambda) + \delta_2 f_2(x, \lambda) = \\ &= \varphi_0(x, \lambda_n) + \varphi_1(x, \lambda_n) \varepsilon + \varphi_2(x, \lambda_n) \varepsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \varphi_0(x, \lambda_n) &= \delta_1 f_1(x, \lambda_n) + \delta_2 f_2(x, \lambda_n), \\ \varphi_1(x, \lambda_n) &= \delta_1 \varphi_{11}(x, \lambda_n) + \delta_2 \varphi_{12}(x, \lambda_n), \\ \varphi_2(x, \lambda_n) &= \delta_1 \varphi_{21}(x, \lambda_n) + \delta_2 \varphi_{22}(x, \lambda_n). \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie funkcji (1.25) z otrzymanego wyniku ogólnego można będzie otrzymać przypadki szczególne dla poszczególnych nieliniowości oddzielnie.

Zagadnienie przedstawione równaniem (1.1) przy warunkach brzegowych (1.2) jest równoważne zagadnieniu wariacyjnemu związanemu z zasadą Hamiltona. Energia potencjalna rozważanego układu wynosi

$$(1.23) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l EJ (u_{xx})^2 dx + \frac{1}{2} h_1 [u_x(0, t)]^2 + \frac{1}{2} c_1 [u(0, t)]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} h_2 [u_x(l, t)]^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma_1 [u_x(l, t)]^4 + \frac{1}{2} c_2 [u(l, t)]^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \gamma_2 [u(l, t)]^4, \end{aligned}$$

energia kinetyczna zaś wyraża się za pomocą wzoru

$$(1.24) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^l m [u_t(x, t)]^2 dx.$$

Równanie różniczkowe dla funkcji $T(t)$ zagadnienia nieliniowego otrzymamy z zasady

$$(1.25) \quad \int_{t_1}^{t_2} (E - U) dt = \text{extremum}$$

i ma ono postać

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{dT_1} \right) - \frac{dW}{dT_1} = 0,$$

gdzie $W = E - U$ przedstawia potencjał kinetyczny, $T = T(t)$ zaś jest szukaną funkcją czasu, którą należy przyjąć zamiast $T(t)$ we wzorze (1.12). Tak przyjętą postać rozwiązania (1.12) wstawiamy do wyrażeń (1.23) i (1.24) przy uwzględnieniu rozwinięcia (1.21). Wyrażenie (1.26) daje równanie różniczkowe nieliniowe dla szukanej funkcji czasu $T(t)$. Po wykonaniu potrzebnych obliczeń równanie to napiszemy w postaci

$$(1.27) \quad \ddot{T}_1 (E_0 + E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + \dots) + T_1 (U_0 + U_1 \varepsilon + U_2 \varepsilon^2 + \dots) + \\ + T_1^3 (U_1^* \varepsilon + U_2^* \varepsilon^2 + \dots) = 0,$$

gdzie E_i , U_i i U_i^* ($i = 1, 2, \dots$) zależą od β_{jn} występujących w rozwinięciu (1.16) oraz współczynników nieliniowości γ_1 i γ_2 . Występują tam również funkcje (1.19)

i (1.20). Łatwo sprawdzić, że dla $\varepsilon = 0$ mamy z (1.27) równanie (1.5)₂ ($T_1 \equiv T$), przy czym

$$(1.28) \quad \frac{U_0}{E_0} = \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{\lambda_n^4 EJ}{m}.$$

Dla przypadku nieliniowego ($\varepsilon \neq 0$) przedstawimy częstość drgań własnych w postaci szeregu według potęg małego parametru:

$$(1.29) \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots,$$

gdzie należy obliczyć $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Stałe te wyznaczymy z warunków okresowości poszukiwanego rozwiązania. Przyjmując słuszność związku (1.6) również w przypadku nieliniowym z przedstawionych rozwinięć (1.16) i (1.29) otrzymujemy zależności wynikające z przyrównania wyrażen stojących przy tych samych potęgach parametru ε :

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{EJ}{m} \lambda_n^4, \\ 2\omega_0 \alpha_1 &= 4\lambda_n^3 \beta_{1n}, \\ \alpha_1^2 + 2\omega_0 \alpha_2 &= 4\lambda_n^3 \beta_{2n} + 6\lambda_n^2 \beta_{1n}^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Pierwsza równość w związkach (1.30) jest inaczej napisanym wyrażeniem (1.6) przy uwzględnieniu (1.28). Z pozostałych związków łatwo wyrazimy β_{in} za pomocą α_j , mianowicie (ograniczamy się do ε^2):

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \beta_{1n} &= \frac{\omega_0}{2\lambda_n^3} \alpha_1, \\ \beta_{2n} &= \left(\frac{1}{4\lambda_n^3} - \frac{3}{8} \frac{\omega_0^2}{\lambda_n^7} \right) \alpha_1^2 + \frac{\omega_0}{2\lambda_n^3} \alpha_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie na β_{jn} należy wstawić do E_i, U_i i U_i^* równania (1.27), przez co związki te zależą będą od szukanych współczynników α_i . Rozwiązania równania (1.27) szukać będziemy w postaci rozwinięcia w szereg

$$(1.32) \quad T_1(t) = q_0 + q_1 \varepsilon + q_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

gdzie q_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) są nieznanymi funkcjami czasu.

Po wstawieniu (1.32) do (1.27), zastosowaniu transformacji zmiennej niezależnej postaci

$$(1.33) \quad \omega t = \tau$$

wprowadzeniu rozwinięcia (1.29) i przyrównaniu do zera współczynników przy tych samych potęgach parametru ε mamy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_0 + q_0 &= 0, \\
 \ddot{q}_1 + q_1 &= - \left(2\omega_0 \alpha_1 \frac{E_0}{U_0} + \omega_0^2 \frac{E_1}{U_0} \right) \ddot{q}_0 - \frac{U_1}{U_0} q_0 - \frac{U_1^*}{U_0} q_0^3, \\
 \ddot{q}_2 + q_2 &= - \left((2\omega_0 \alpha_2 + \alpha_1^2) \frac{E_0}{U_0} + 2\omega_0 \alpha_1 \frac{E_1}{U_0} + \omega_0^2 \frac{E_2}{U_0} \right) \ddot{q}_0 - \\
 &\quad - \left(2\omega_0 \alpha_1 \frac{E_0}{U_0} + \omega_0^2 \frac{E_1}{U_0} \right) \ddot{q}_1 - \frac{U_2}{U_0} q_0 - \frac{U_1}{U_0} q_1 - 3 \frac{U_1^*}{U_0} q_0^2 q_1 - \frac{U_2^*}{U_0} q_0^3, \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

W pierwszym równaniu układu (1.34) wykorzystano zależność (1.28). Rozwiązaniem pierwszego równania układu (1.34) jest funkcja

$$q_0(\tau) = A_0 \cos \tau + B_0 \sin \tau,
 \tag{1.35}$$

gdzie A_0 oraz B_0 są stałymi, które należy obliczyć z warunków początkowych. Warunki początkowe (1.3) przyjmujemy w postaci

$$u(x, 0) \equiv \varphi(x), \quad u_t(x, 0) \equiv 0.
 \tag{1.36}$$

Znając ugięcie belki w punkcie o współrzędnej x_0 , to $u(x_0, 0) = \varphi(x_0)$, z postaci rozwiązania (1.12) znajdziemy

$$\varphi(x_0) = T_1(0) [f_1(x_0, \lambda) + f_2(x_0, \lambda)]$$

lub na podstawie (1.21)

$$\varphi(x_0) = T_1(0) [\varphi_0(x_0, \lambda_n) + \varphi_1(x_0, \lambda_n) \varepsilon + \varphi_2(x_0, \lambda_n) \varepsilon^2 + \dots].
 \tag{1.37}$$

Z rozwinięcia (1.32) mamy

$$T_1(0) = q_0(0) + q_1(0) \varepsilon + q_2(0) \varepsilon^2 + \dots$$

Jeśli przyjmujemy

$$q_0(0) = A, \quad q_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,
 \tag{1.38}$$

to stała A spełnia na podstawie (1.37) związek

$$A = \frac{\varphi(x_0)}{\varphi_0(x_0, \lambda_n) + \varphi_1(x_0, \lambda_n) \varepsilon + \varphi_2(x_0, \lambda_n) \varepsilon^2 + \dots}.
 \tag{1.39}$$

Drugi warunek początkowy (1.36) będzie spełniony, jeśli przyjmujemy

$$\dot{q}_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots.
 \tag{1.40}$$

Należy zauważyć, że funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ zależą od parametrów β_{in} , które z kolei są funkcjami α_i . Wyznaczone z warunków okresowości α_i dadzą na pod-

stawie (1.31) β_{jn} , które należy wstawić do (1.39) zachowując w mianowniku tyle składników, z jakim przybliżeniem rozwiązaliśmy zagadnienie. Ponieważ α_i zależą od A w odpowiedniej potędze, otrzymamy w ten sposób równanie algebraiczne dla wyznaczenia tejże stałej A .

Dla rozwiązania (1.35) z warunków początkowych (1.44) oraz (1.40) mamy ($A_0 = A$)

$$(1.41) \quad q_0(\tau) = A \cos(\tau).$$

Po wstawieniu (1.41) do drugiego równania układu (1.34) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(1.42) \quad \ddot{q}_1 + q_1 = a \cos \tau + b \cos 3\tau,$$

gdzie a oraz b przedstawiają współczynniki zależne od A , z których pierwszy zależy dodatkowo od α_1 i β_{1n} . Te dwa parametry związane są pierwszą z zależności (1.31). Z warunku istnienia rozwiązania okresowego mamy

$$(1.43) \quad a = 0,$$

skąd obliczymy parametr α_1 , wyrażając uprzednio β_{1n} przez α_1 . Wobec tego ogólne rozwiązanie równania (1.42) przedstawimy w postaci

$$(1.44) \quad q_1(\tau) = A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau + C \cos 3\tau,$$

gdzie A_1 oraz B_1 są nowymi stałymi, zaś C jest amplitudą drgań wymuszonych odpowiadających wyrazowi $b \cos 3\tau$. Stałe A_1 oraz B_1 wyznaczymy z odpowiednich warunków początkowych (1.38) i (1.40). Następnie, wstawiając tak otrzymane rozwiązanie oraz rozwiązanie (1.41) do trzeciego równania układu (1.34), znowu doprowadzimy do równania różniczkowego ruchu, w którym wystąpi wyraz zawierający $\cos \tau$. Z warunku zerowania się odpowiedniego współczynnika obliczymy α_2 przy wykorzystaniu drugiej zależności (1.31) i stałych obliczonych poprzednio.

Postępując w ten sposób dalej możemy otrzymać rozwiązanie z żadaną dokładnością. Częstość drgań własnych obliczymy ze wzoru (1.29). Ostateczną wartość stałej A wyrazimy ze związku (1.39), jako równania algebraicznego, nieliniowego odpowiedniego stopnia.

2. Przykład w ujęciu ogólnym

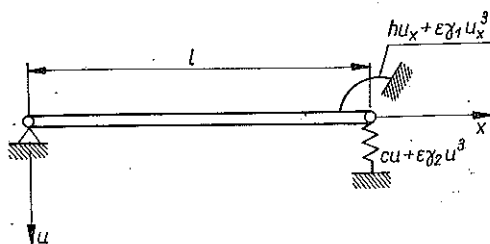
Rozpatrzmy dla przykładu drgania własne belki o stałym polu przekroju, przedstawionej na rys. 1. Drgania własne belki opisane są równaniem (1.1) przy nieliniowych następujących warunkach brzegowych.

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u_{xx}(0, t) &= 0, \\ EJu_{xx}(l, t) + hu_x(l, t) + \varepsilon\gamma_1 [u_x(l, t)]^3 &= 0, \\ EJu_{xxx}(l, t) - cu(l, t) - \varepsilon\gamma_2 [u(l, t)]^3 &= 0 \end{aligned}$$

i warunkach początkowych (1.3).

Rozwiązanie ogólne równania (1.1) ma postać (1.4) i powinno spełniać warunki (2.1). W przypadku liniowym ($\varepsilon = 0$) dostajemy

$$(2.2) \quad \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ -C_2 \lambda^2 + C_4 \lambda^2 &= 0, \\ EJ(-C_1 \lambda^2 \sin \lambda l + C_3 \lambda^2 \operatorname{sh} \lambda l) + h(C_1 \lambda \cos \lambda l + C_3 \lambda \operatorname{ch} \lambda l) &= 0, \\ EJ(-C_1 \lambda^3 \cos \lambda l + C_3 \lambda^3 \operatorname{ch} \lambda l) - c(C_1 \sin \lambda l + C_3 \operatorname{sh} \lambda l) &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Z równań (2.2)₁ i (2.2)₂ otrzymujemy $C_2 = C_4 = 0$, z (2.2)₃ i (2.2)₄ po wyrugowaniu stałej C_3 i z warunku $C_1 \neq 0$ dostajemy równanie charakterystyczne

$$(2.3) \quad \frac{k_1 \operatorname{tg}(\lambda l) + \lambda^3}{k_2 - \lambda \operatorname{tg}(\lambda l)} = \frac{k_1 \operatorname{th}(\lambda l) - \lambda^3}{k_2 + \lambda \operatorname{th}(\lambda l)},$$

gdzie

$$k_1 = \frac{c}{EJ}, \quad k_2 = \frac{h}{EJ}.$$

Funkcja (1.15) spełniająca warunki brzegowe (2.2)₁, (2.2)₂ i (2.2)₄ ma postać

$$(2.4) \quad f_1(x, \lambda) = \sin(\lambda x) + g_{11} \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Podobnie funkcja (1.11) spełniająca warunki brzegowe (2.2)₁, (2.2)₂ i (2.2)₃ ma postać

$$(2.5) \quad f_2(x, l) = \sin(\lambda x) + g_{12} \operatorname{sh}(\lambda x),$$

gdzie

$$(2.6) \quad g_{11} = \frac{\lambda^3 \cos(\lambda l) + k_1 \sin(\lambda l)}{\lambda^3 \operatorname{ch}(\lambda l) - k_1 \operatorname{sh}(\lambda l)}, \quad g_{12} = \frac{\lambda \sin(\lambda l) - k_2 \cos(\lambda l)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda l) + k_2 \operatorname{ch}(\lambda l)}.$$

Po rozwinięciu funkcji (2.4) i (2.5) w szereg Taylora w otoczeniu λ_n otrzymujemy

$$(2.7) \quad f_1(x, \lambda) = f_1(x, \lambda_n) + [x \cos(\lambda_n x) + g_{21} \operatorname{sh}(\lambda_n x) + x g_{11} \operatorname{ch}(\lambda_n x)] (\lambda - \lambda_n) + \dots$$

oraz

$$(2.8) \quad f_2(x, \lambda) = f_2(x, \lambda_n) + [x \cos(\lambda_n x) + g_{22} \operatorname{sh}(\lambda_n x) + x g_{12} \operatorname{ch}(\lambda_n x)] (\lambda - \lambda_n) + \dots,$$

gdzie

$$(2.9) \quad \begin{aligned} g_{21} = dg_{11}/d\lambda &= [2k_1 l \lambda^3 \cos \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + k_1^2 l (\operatorname{ch} \lambda l \sin \lambda l - \cos \lambda l \operatorname{sh} \lambda l) - \\ &\quad - 3k_1 \lambda^2 (\cos \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + \sin \lambda l \operatorname{sh} \lambda l) - \\ &\quad - \lambda^6 l (\sin \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + \operatorname{sh} \lambda l \cos \lambda l)] / [\lambda^3 \operatorname{ch}(\lambda l) - k_1 \operatorname{sh}(\lambda l)]^2, \\ g_{22} = dg_{12}/d\lambda &= [k_2 (\sin \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + \cos \lambda l \operatorname{sh} \lambda l) + \\ &\quad + \lambda^2 l (\cos \lambda l \operatorname{sh} \lambda l - \operatorname{ch} \lambda l \sin \lambda l) + 2k_2 \lambda l \cos \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + \\ &\quad + k_2^2 l (\sin \lambda l \operatorname{ch} \lambda l + \operatorname{sh} \lambda l \cos \lambda l)] / (\lambda \operatorname{sh} \lambda l + k_2 \operatorname{ch} \lambda l)^2. \end{aligned}$$

Uwzględniając (1.16)–(2.21) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= \delta_1 [\sin(\lambda_n x) + g_{11} \operatorname{sh}(\lambda_n x)] + \delta_2 [\sin(\lambda_n x) + g_{12} \operatorname{sh}(\lambda_n x)], \\ \varphi_1 &= \delta_1 \beta_{1n} [x \cos(\lambda_n x) + g_{21} \operatorname{sh}(\lambda_n x) + g_{11} x \operatorname{ch}(\lambda_n x)] + \\ &\quad + \delta_2 \beta_{1n} [x \cos(\lambda_n x) + g_{22} \operatorname{sh}(\lambda_n x) + g_{21} x \operatorname{sh}(\lambda_n x)], \end{aligned}$$

gdzie $\delta_1 \neq 0$ i $\delta_2 \neq 0$ pozwalają uwzględnić wpływ poszczególnych nieliniowości. Energia potencjalna rozważanego układu określona za pomocą wzoru (1.23) po uwzględnieniu (1.12) i (1.21) daje

$$(2.11) \quad U = \frac{1}{2} T^2 (U_0 + U_1 \varepsilon + U_2 \varepsilon^2 + \dots) + \frac{1}{4} T^4 (U_1^* \varepsilon + U_2^* \varepsilon^2 + \dots),$$

gdzie

$$(2.12) \quad \begin{aligned} U_0 &= EJ \int_0^l \varphi_{0xx}^2 dx + h\varphi_{0x}^2 + c\varphi_0^2, \\ U_1 &= 2EJ \int_0^l \varphi_{0xx} \varphi_{1xx} dx + 2h\varphi_{0x} \varphi_{1x} + 2c\varphi_0 \varphi_1, \\ U_1^* &= (\gamma_1 \varphi_{0x}^4 + \gamma_2 \varphi_0^4) \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wielkości z gwiazdką związane są z wyrazami nieliniowymi, a $\varphi_{0x} = \partial\varphi_0/\partial x$ itd. U_2 i U_2^* nie występują, gdyż uwzględniamy tylko pierwsze przybliżenie. Energia kinetyczna rozważanego układu określona jest za pomocą wzoru (1.24); po uwzględnieniu (1.12) i (1.21) znajdziemy

$$(2.13) \quad E = \frac{1}{2} \dot{T}^2 (E_0 + E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + \dots),$$

gdzie

$$(2.14) \quad E_0 = \int_0^l m\varphi_0^2 dx, \quad E_1 = 2 \int_0^l m\varphi_0 \varphi_1 dx \text{ itd.}$$

Korzystając z (2.10) oraz wyliczając pierwszą i drugą pochodną tych funkcji względem zmiennej x , otrzymujemy po scałkowaniu (2.12)₁:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} U_0 &= EJ\lambda_n^4 \delta_1^2 \left[\frac{1}{2} l - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n l - 2g_{11} \frac{1}{2\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + g_{11}^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \right] + 2EJ\lambda_n^4 \delta_1 \delta_2 \left[\frac{1}{2} l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n l - (g_{11} + g_{12}) \frac{1}{2\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + \right. \\ &\quad \left. + g_{11} g_{12} \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \right] + EJ\lambda_n^4 \delta_2^2 \left[\frac{1}{2} l - \frac{1}{4\lambda_n} \sin \lambda_n l - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2g_{11} \frac{1}{2\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + g_{12}^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \Big] + \\
 & \quad + h\delta_1^2 (\lambda_n \cos \lambda_n l + g_{11} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n l)^2 + 2h \delta_1 \delta_2 [\lambda_n^2 \cos^2 \lambda_n l + \\
 & \quad + (g_{11} + g_{12}) \lambda_n^2 \cos \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l + g_{11} g_{12} \lambda_n^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_n l] + h\delta_2^2 (\lambda_n \cos \lambda_n l + \\
 & \quad + g_{12} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n l)^2 + c\delta_1^2 (\sin \lambda_n l + g_{11} \operatorname{sh} \lambda_n l)^2 + \\
 & \quad + 2c\delta_1 \delta_2 (\sin \lambda_n l + g_{11} \operatorname{sh} \lambda_n l)^2 + \delta_2^2 (\sin \lambda_n l + g_{12} \operatorname{sh} \lambda_n l)^2, \\
 (2.15) \quad E_0 = m\delta_1^2 & \left[\left(\frac{1}{2} l - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n l \right) + 2g_{11} \frac{1}{2\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \right. \\
 \text{t.e. d.1} \quad & \left. - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + g_{11}^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \right] + 2m \delta_1 \delta_2 \left[\frac{1}{2} l - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n l + (g_{11} + g_{12}) \left(\frac{1}{2\lambda_n} \right) (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + \right. \\
 & \quad \left. + g_{11} g_{12} \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \right] + m\delta_2^2 \left[\frac{1}{2} l - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n l + \right. \\
 & \quad \left. + 2g_{12} \frac{1}{2\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n l \sin \lambda_n l - \operatorname{sh} \lambda_n l \cos \lambda_n l) + g_{12}^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n l \operatorname{ch} \lambda_n l - \frac{1}{2} l \right) \right].
 \end{aligned}$$

Wyrażeń (2.12)₂ i (2.14)₂ nie podano. Występują w nich podobne funkcje trygonometryczno-hyperboliczne tych samych parametrów $\lambda_n l$. Nowymi wielkościami są g_{21} , g_{22} i β_{1n} . W p. 3 wypisano je dla konkretnych wartości określających obrany model belki.

Postępując dalej według wskazań p. 1 otrzymujemy współczynniki równania (1.42):

$$(2.16) \quad a = A \left(2\omega_0 \alpha_1 \frac{E_1}{U_0} + \omega_0^2 \frac{E_1}{U_0} - \frac{U_1}{U_0} - \frac{3}{4} \frac{U_1^*}{U_0} A^2 \right), \quad b = -\frac{1}{4} \frac{U_1^*}{U_0} A^3.$$

Wykorzystując związek (1.31) $\beta_{1n} = \omega_0 \alpha_1 / 2\lambda_n^3$ oraz warunek istnienia okresowej funkcji $q_1(\tau)$, co jest równoważne $a = 0$, otrzymujemy równanie, z którego możemy obliczyć α_1 .

Współczynniki rozwiązania (1.44) są następujące:

$$(2.17) \quad A_1 = -\frac{1}{32} \frac{U_1^*}{U_0} A^3, \quad B_1 = 0, \quad C = \frac{1}{32} \frac{U_1^*}{U_0} A^3.$$

Zatem pierwsze przybliżenie szeregu (1.32)

$$(2.18) \quad T_1(\tau) = A \cos \tau + (A_1 \cos \tau + c \cos 3\tau) \varepsilon,$$

a (1.29) daje

$$(2.19) \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \alpha_1.$$

3. Przykład liczbowy. Wnioski

Przeprowadźmy obliczenia szczegółowe dla belki o długości $l = 2$ m o przekroju prostokątnym, szerokości $b = 10$ cm oraz wysokości $h = 0,5$ cm. Belka jest wykonana ze stali węglowej o ciężarze właściwym $78,5$ kG/dcm³ i module sprężystości $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm. Przyjmujemy współczynniki sprężystego podparcia $c = 196,25$ kG/m oraz $h = 4906,2$ kGm. Przy takich założeniach masa belki $m = 0,04$ kGsek.²/m², sztywność na zginanie $EJ = 21,87$ kGm², wartości współczynników zaś określonych w p. 1 wynoszą $k_1 = 9,0547$ m³ i $k_2 = 226,37$ m⁻¹.

Równanie charakterystyczne (2.3) można po prostych przekształceniach przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \operatorname{tg}(\lambda l) = \frac{\left(\frac{k_1 k_2}{\lambda} - \lambda^3\right) \operatorname{th} \lambda l - 2k_2 \lambda^2}{\frac{k_1 k_2}{\lambda} + 2k_1 \operatorname{th}(\lambda l) - \lambda^3}$$

Równanie to rozwiązane metodą wykreślno-analityczną i znaleziono pierwsze dwa pierwiastki:

$$(3.2) \quad \lambda_1 = 1,608 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad \lambda_2 = 2,538 \text{ [m}^{-1}\text{]}.$$

Wstawiając do wzorów (2.6)₁, (2.6)₂, (2.9)₁ i (2.9)₂ $\lambda_n = \lambda_1$ dostajemy

$$(3.3) \quad g_{11} = g_{12} = 7,93 \cdot 10^{-2}, \quad g_{21} = 0,3814 \text{ [m]}, \quad g_{22} = 0,1713 \text{ [m]}.$$

Dla tych wartości znajdziemy kolejne:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} U_0 &= EJ(\delta_1^2 4,74 + \delta_1 \delta_2 9,48 + \delta_2^2 4,74) + h(\delta_1^2 1,4 + \delta_1 \delta_2 2,8 + \delta_2^2 1,4) 10^{-4} + \\ &\quad + c(\delta_1^2 0,83 + \delta_1 \delta_2 1,66 + \delta_2^2 0,83) \text{ [kGm]}, \\ U_1 &= EJ\beta_1(\delta_1^2 19,10 + \delta_1 \delta_2 36,92 + \delta_2^2 17,82) + 2h\beta_1(-\delta_1^2 0,122 - \\ &\quad - \delta_1 \delta_2 0,121 + \delta_2^2 0,004) + 2c\beta_1(\delta_1^2 4,32 + \delta_1 \delta_2 2,33 - \delta_2^2 1,99) \text{ [kGm]}, \\ U_1^* &= \gamma_1(\delta_1 + \delta_2)^4 1,4 \cdot 10^{-8} + \gamma_2(\delta_1 + \delta_2)^4 0,69 \text{ [kGm]}, \\ E_0 &= m(\delta_1^2 1,84 + \delta_1 \delta_2 3,68 + \delta_2^2 1,84) \text{ [kGm sek.}^2\text{]}, \\ E_1 &= m\beta_1(\delta_1^2 5,47 + \delta_1 \delta_2 2,85 + \delta_2^2 2,61) \text{ [kGm sek.}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Tak napisane wyrazy energii potencjalnej i kinetycznej pozwalają ocenić liczbowo wpływ nieliniowości na ich wartości [por. (1.19) i (1.20)]. W przypadku obu sprężyn nieliniowych, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, znajdziemy:

$$(3.5) \quad U_0 = 1071 \text{ [kGm]}, \quad U_1 = \beta_1 \times 1099 \text{ [kGm]}, \quad U_1^* = \gamma_1 \cdot 22,4 \times 10^{-8} + \\ + \gamma_2 \cdot 11,04 \text{ [kGm]},$$

$$E_0 = 0,295 \text{ [kGm sek.}^2\text{]}, \quad E_1 = \beta_1 \times 0,228 \text{ [kGm sek.}^2\text{]}.$$

Z (1.28) obliczymy $\omega_0 = 60,3$ [1/sek.].

Wstawiając do (1.12) otrzymane wartości mamy

$$(3.6) \quad \beta_1 = 7,25 a_1,$$

a wykorzystując ten związek w (2.16) ($a = 0$) mamy

$$(3.7) \quad a_1 = 3,9 \times 10^{-2} (\gamma_1 \times 22,4 \times 10^{-8} + \gamma_2 \times 11,04) A^2 \text{ [1/sek.]}$$

Zasadnicza częstość drgań własnych wyrazi się na podstawie (2.19) za pomocą wzoru

$$(3.8) \quad \omega_1 = 60,3 + \varepsilon A^2 \times 3,9 \times 10^{-2} (\gamma_1 \times 22,4 \times 10^{-8} + \gamma_2 \times 11,04) \text{ [1/sek.]}$$

Z powyższego widać, że w przypadku charakterystyki o dużej sztywności części liniowej wpływ wyrazu nieliniowego ($\gamma_1 \neq 0$) jest bardzo mały. W przypadku małej sztywności części liniowej ($\gamma_2 \neq 0$) wpływ wyrazu nieliniowego jest istotny.

Ze związków (3.4) łatwo otrzymamy częstość podstawową drgań własnych dla przypadków oddzielnych nieliniowości. Przyjmując bowiem $\delta_1 = 0$ mamy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} U_0 &= 267,2 \text{ [kGm]}, & U_1 &= \beta_1 \times 352,1 \text{ [kGm]}, & U_1^* &= \gamma_2 \cdot 0,69 \text{ [kGm]}, \\ E_0 &= 0,0736 \text{ [kGm sek.}^2\text{]}, & E_1 &= \beta_1 \times 0,104 \text{ [kGm}^3\text{sek.}^2\text{]}; \end{aligned}$$

ω_0 i (3.6) pozostaje bez zmiany.

Na podstawie związku (2.16) mamy

$$(3.10) \quad a_1 = 2,89 \times A^2 \gamma_2 \times 10^{-3} \text{ [1/sek.]}$$

oraz na podstawie (2.28) jest

$$(3.11) \quad \omega_1 = 60,3 + \varepsilon A^2 2,89 \times 10^{-3} \gamma_2 \text{ [1/sek.]}$$

Wzór powyższy podaje częstość drgań własnych przy uwzględnieniu nieliniowości w sprężystym podparciu.

Z tych samych związków (3.4)–(3.8) otrzymujemy dla $\delta_2 = 0$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} U_0 &= 267,2 \text{ [kGm]}, & U_1 &= \beta_1 \times 916 \text{ [kGm]}, & U_1^* &= 1,4 \times 10^{-8} \gamma_1 \text{ [kGm]}, \\ E_0 &= 0,0736 \text{ [kGm sek.}^2\text{]}, & E_1 &= \beta_1 \times 0,2188 \text{ [kGm sek.}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Na podstawie związku (2.16) znajdziemy

$$(3.13) \quad a_1 = 1,22 \times 10^{-11} A^2 \gamma_1 \text{ [1/sek.]}$$

Podobnie jak poprzednio na podstawie (2.19) otrzymamy

$$(3.14) \quad \omega_1 = 60,3 + \varepsilon \times 1,22 \times 10^{-11} A^2 \gamma_1 \text{ [1/sek.]}$$

Powyższy związek podaje częstość drgań własnych przy uwzględnieniu nieliniowości w sprężystym utwierdzeniu. Jak widać z (3.8) i (3.14) obydwie charakterystyki nieliniowe działają w sposób sprzężony.

Ze wzoru (3.8) nie można otrzymać jako przypadków szczególnych (np. dla $\gamma_1 = 0$ lub $\gamma_2 = 0$) związków (3.11) lub (3.14).

Jak w zagadnieniach nieliniowych, nie ma tu miejsca zasada superpozycji.

Literatura cytowana w tekście

1. K. PISZCZEK, R. WOJDANOWSKA, *Drgania własne belki sprężyste podpartej przy jednym warunku brzegowym słabo nieliniowym* (w druku).

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ
ПРИ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В работе дается способ определения частот свободных колебаний в более общем случае, а именно, когда два из четырех условий упругого защемления концов балки заключают нелинейные члены. Как это вытекает из работы, предлагаемый метод может найти применение также в случае большого числа нелинейных условий.

Summary

NATURAL VIBRATION OF A BEAM WITH WEAKLY
NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

This paper gives a method for computing the natural frequency of a beam with one nonlinear boundary condition. The present paper brings a description of a computation method of the natural frequency in the more general case, in which two of the four boundary conditions (of elastic clamping at both ends) contain nonlinear terms. It is found that the same method may be applied in the case of more nonlinear conditions.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 sierpnia 1964 r.