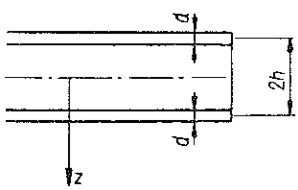
ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 14 (1966)

O PEWNYM ROZWIĄZANIU PŁYTY TRÓJWARSTWOWEJ

RYSZARD GANOWICZ (POZNAŃ)

1. W pracy zajmiemy się nieograniczoną płytą trójwarstwową, na którą działa siła skupiona. W wyniku otrzymamy rozwiązanie osobliwe podobne do rozwiązania osobliwego dla płyty cienkiej.

Rozwiązania tego typu mogą służyć do skonstruowania rozwiązań problemów brzegowych teorii płyt tak samo jak funkcja $u = 1/r$, która jest podstawą rozwiązania równania Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej (czy funkcja $u = \ln r$ w przestrzeni dwuwymiarowej). W zagadnieniach technicznych teorii płyt rozwiązania osobliwe służą do znalezienia powierzchni wpływowych.



Rys. 1

Założymy, że zewnętrzne warstwy płyty są izotropowe i nie posiadają sztywności na zginanie; warstwa środkowa jest nieściśliwa i wykazuje sztywność jedynie na odkształcenia postaciowe w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyty.

2. Równania równowagi różnej postaci dla omawianych płyt trójwarstwowych można znaleźć w literaturze [1–4].

Równania równowagi dla przemieszczeń, dla płyt trójwarstwowych spełniających powyżej podane założenia, mają postać następującą:

$$\nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = -\frac{p}{2G_s h},$$

$$(2.1)\qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi_2 - \frac{\eta}{2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{\eta}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_3 = 0;$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia (rys. 1): $\eta = Edh/G_s(1+\nu)$, E, ν oznaczają stałe materiałowe warstw skrajnych, a $G_s = G_{xz} = G_{yz}$ moduły odkształcenia postaciowego warstwy środkowej.

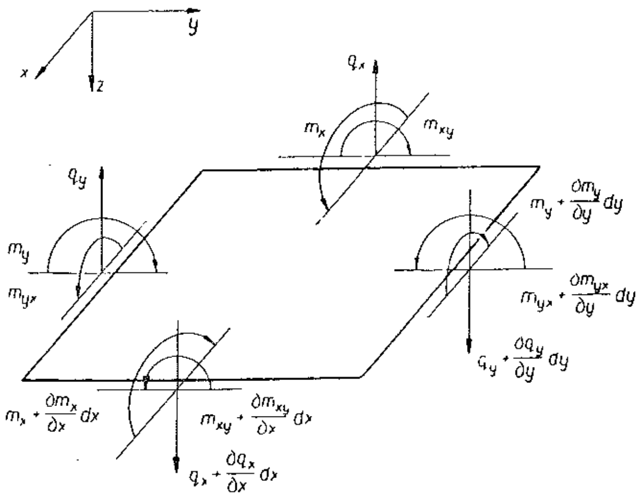
Funkcje $\varphi_i^{(x)}$ określają przemieszczenia w następujący sposób:

$$u = z\varphi_2(x, y), \quad v = z\varphi_3(x, y), \quad \omega = \varphi_1(x, y).$$

Wielkości statyczne wyznaczyć możemy z zależności (rys. 2)

$$\begin{aligned} m_x &= D\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right), \qquad q_x = 2G_s h\left(\varphi_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right),\\ m_y &= D\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\nu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right), \qquad q_y = 2G_s h\left(\varphi_3+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right),\\ m_{xy} &= D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie $D = 2Edh^2/(1-\nu^2)$.



Rys. 2

Zastosujemy do układu równań (2.1) nieskończoną podwójną transformację Fouriera:

$$N^*(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} N(\xi,\zeta)\, e^{i(\alpha\xi+\beta\zeta)}\, d\xi\, d\zeta, \tag{2.3}$$

$$N(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} N^*(\alpha,\beta)\, e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta. \tag{2.4}$$

Po wykonaniu jej otrzymamy

$$\begin{aligned} &-(\alpha^2+\beta^2)\varphi_1^* - i\alpha\varphi_2^* - i\beta\varphi_3^* = -\frac{p^*}{2G_s h},\\ &-i\alpha\varphi_1^* + \left(1+\frac{\eta}{1-\nu}\alpha^2+\frac{\eta}{2}\beta^2\right)\varphi_2^* + \frac{\eta}{2}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha\beta\varphi_3^* = 0,\\ &-i\beta\varphi_1^* + \frac{\eta}{2}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha\beta\varphi_2^* + \left(1+\frac{\eta}{1-\nu}\beta^2+\frac{\eta}{2}\alpha^2\right)\varphi_3^* = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Stąd łatwo wyznaczyć transformaty φ_1^*, φ_2^*, φ_3^*.

Następnie wstawiając te transformaty do wzoru (2.4) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^*(1-\nu)}{2G_s h\eta} \frac{1+\frac{\eta}{1-\nu}(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\
\varphi_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^* i\alpha(1-\nu)}{2G_s h\eta} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \qquad (2.6)\\
\varphi_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^* i\beta(1-\nu)}{2G_s h\eta} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}
$$

Przyjmiemy teraz do rozwiązania dla obciążenia $p=\delta(x)\,\delta(y)$, co odpowiada sile skupionej $P=1$, działającej w początku układu współrzędnych. Wtedy $p^*=1/2\pi$.

Rozwiązanie zagadnienia uzyskamy w postaci wyraźnej, jeżeli potrafimy wyznaczyć wartości następujących całek:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\
J_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \qquad (2.7)\\
J_3 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\
J_4 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}
$$

Całki powyższe jako całki niewłaściwe są rozbieżne; nie można im także przypisać wartości w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

W celu przypisania wartości całkom (2.7) skorzystamy z określenia części skończonej całki rozbieżnej.

W tym celu oprzemy się na definicji podanej przez W. Nowackiego [5], który część skończoną całki rozbieżnej

$$
\int_a^b f(\alpha)\, d\alpha \qquad (2.8)
$$

określa następująco:

Niech $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(\alpha)\, d\alpha$ dla $\varepsilon>0$ będzie całką zbieżną; zakładając, że $f(\alpha)=g(\alpha)+$ $+h(\alpha)$, $G'(\alpha)=g(\alpha)$ i to, że całka $\int_a^b h(\alpha)\, d\alpha$ jest zbieżna, część skończoną całki rozbieżnej definiować będziemy w sposób następujący:

$$pf\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = G(b) + \int_a^b h(\alpha)\,d\alpha, \tag{2.9}$$

(litery *pf* są skrótem terminu angielskiego «the finite part»).

Dodajmy, że część skończoną w myśl tej definicji otrzymać możemy przez formalne wielokrotne całkowanie przez części całki (2.8), przy czym pomijamy nieskończone części związane z dolną granicą całkowania.

Wspomnieć należy, że pojęcie części skończonej całki rozbieżnej pierwszy wprowadził HADAMARD [6]. Później szereg autorów korzystało z tego pojęcia przypisując w ten sposób całkom rozbieżnym określone wartości [7].

Przykładowo wykorzystamy pojęcie części skończonej do obliczenia całki J_1:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta = \tag{2.10}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y} \frac{\cos\alpha x - i\sin\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha\,d\beta = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y}\,d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha .$$

Biorąc pod uwagę, że [8]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{4|\beta^3|}(1+x|\beta|)\,e^{-x|\beta|} \tag{2.11}$$

otrzymamy

$$J_1 = \pi re \int_0^{\infty} \frac{1+x\beta}{\beta^3} e^{-\beta z}\,d\beta, \qquad z = x+iy. \tag{2.12}$$

Stąd

$$pf\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^3}\,d\beta = -\frac{1}{2} z^2 (C+\ln z), \tag{2.13}$$

$$pf\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^2}\,d\beta = z(C+\ln z). \tag{2.14}$$

Możemy więc całce J_1 (2.12) przypisać wartość następującą:

$$pf J_1 = \pi\frac{x^2+y^2}{2}(C+\ln|z|). \tag{2.15}$$

Wartość całek pozostałych (2.7) obliczymy opierając się na równości (2.15) i na wzorach

$$J_3 = -\frac{\partial J_1}{\partial x}, \qquad J_4 = -\frac{\partial J_1}{\partial y}, \qquad J_2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) J. \tag{2.16}$$

We wzorach (2.16) i w dalszych występujących w tej pracy wszystkie całki J_1, J_2, J_3, J_4 należy rozumieć w sensie części skończonej pomimo opuszczenia symbolu *pf*.

W ten sposób otrzymamy

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\pi x \ln\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2} x(1+2C),\\
J_4 &= -\pi y \ln\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2} y(1+2C),\\
J_2 &= -2\pi\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}+1+C\right).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Wykorzystując obliczone powyżej całki i wzory (2.6) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie dla płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną $P = 1$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{16\pi D}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{8\pi G_s h}\left(\ln(x^2+y^2)+2\right),\\
\varphi_2 &= -\frac{1}{8\pi D} x\left(\ln(x^2+y^2)+1\right),\\
\varphi_3 &= -\frac{1}{8\pi D} y\left(\ln(x^2+y^2)+1\right).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

W wyrażeniach powyższych pominięto stałą Eulera C, która nie wpływa na poszukiwane przez nas rozwiązanie osobliwe.

3. Na zakończenie podamy jeszcze przykład rozwiązania osobliwego dla sił wewnętrznych. Po wykorzystaniu związków (2.2) dla $\nu = 0$ znajdziemy:

$$
\begin{aligned}
q_x &= -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad m_{xy} = -\frac{1}{4\pi}\frac{xy}{x^2+y^2},\\
m_x &= -\frac{1}{8\pi}\left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1\right].
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Te ostatnie wyrażenia są identyczne ze znanymi rozwiązaniami osobliwymi dla płyty cienkiej izotropowej. Różnica więc tkwi jedynie w rozwiązaniu osobliwym dla ugięcia w, które dla płyt cienkich jest następujące:

$$
w_0 = \frac{1}{16\pi D}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2). \tag{3.2}
$$

Różni się ono od otrzymanego przez nas ugięcia dla płyty trójwarstwowej o wielkość

$$
\Delta w = \frac{1}{8\pi G_s h}\left(\ln(x^2+y^2)+2\right). \tag{3.3}
$$

Literatura cytowana w tekście

1. Александров, Брюкер, Куршин, Прусаков, *Расчёт трехслойных панелей*, Москва 1960.
2. C. Libove and S. B. Batdorf, *A general small deflection theory for flat sandwich plates*, NACA, No. 899, April 1948.
3. J. Wachowiak, P. Wilde, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Lądow., **1**, **12**, (1966).

4. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych,* Roczn. Wyższej Szkoły Rolniczej w Poznaniu, dodatek 12, 1965.

5. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.

6. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations*, Yale University Press, 1923.

7. H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports.* Arch. Mech. Stos., **10** (1958).

8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1963.

Резюме

О НЕКОТОРОМ РЕШЕНИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

В работе дается решение бесконечной трехслойной пластинки при нагрузке сосредоточенной силой. Это решение сравнивается с известным особым решением для тонких изотропных пластинок.

Что касается рассматриваемой трехслойной пластинки предполагается, что ее внешние слои являются изотропными и не обладают жесткостью на изгиб, а серединый слой воздействует только лишь на поперечные силы.

Summary

A SOLUTION OF THE PROBLEM OF A THREE-LAYER PLATE

This paper is devoted to the solution of the problem of a three-layer (sandwich) plate subjected to a concentrated force. This solution is confronted with the known singular solution for a thin plate.

As regards of the three-layer (sandwich) plate under consideration it is assumed that its outer layers are isotropic and have no flexural rigidity and that the omiddle layer carries shear forces only.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 grudnia 1965 r.