

**W SPRAWIE DEFINICJI MOMENTU SKUPIONEGO
DZIAŁAJĄCEGO NA OŚRODEK SPRĘŻYSTY**

ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

Wstęp

Problem definicji momentu skupionego, działającego na ośrodek sprężysty, nie jest dostatecznie jasno postawiony w znanej autorowi literaturze. W mechanice budowli określa się moment skupiony jako pojedynczy dipol [1] i taka definicja w przypadku układów prętowych jest zupełnie wystarczająca. Nie rozstrzyga to jednak problemu postawionego w tytule.

W monografii S. TIMOSHENKI i J. N. GOODIERA [2] na jednym z rysunków (str. 114) przedstawiono dwa dipole skierowane wzajemnie prostopadle i działające względem wspólnej osi. Autorzy stwierdzają, że takie obciążenie odpowiada działaniu momentu skupionego, nie wyjaśniają jednak sprawy bliżej. W szczególności nie wiadomo, dlaczego właśnie taki sposób realizacji momentu skupionego jest poprawny.

O tym, że problem nie jest dostatecznie wyjaśniony, przekonuje monografia J. S. UFLIANDA [3] (str. 34–35). Autor, rozwiązując problem pasma tarczowego z utwierdzonymi brzegami, wprowadza obciążenie w postaci pojedynczego dipola, który uważa za równoważny momentowi skupionemu. UFLIAND przenosi więc wprost pojęcie sformułowane w mechanice układów prętowych do mechaniki ośrodka ciągłego,

Powstaje pytanie, czy oba wyżej cytowane sposoby realizacji momentu skupionego są równoważne (jakkolwiek są równoważne statycznie), czy w ogóle sposób realizacji momentu skupionego ma wpływ na wynik, a jeżeli tak, to jaka definicja jest poprawna?

Problem działania momentu skupionego na ośrodek sprężysty ma znaczenie nie tylko teoretyczne, dlatego wydaje się celowe dać odpowiedź na postawione pytanie.

W pracy zostanie rozważona kwestia realizacji momentu skupionego uczonego w obszarze płaskiego ośrodka sprężystego oraz na jego brzegu.

1. Moment skupiony działający w obszarze tarczy

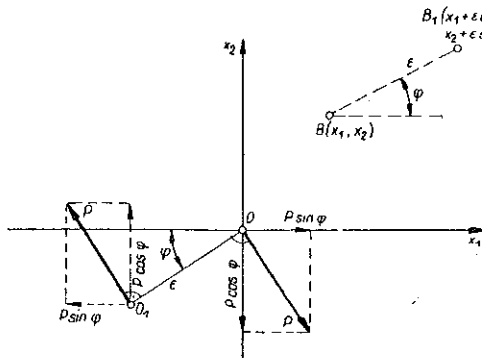
Rozważamy płaski ośrodek sprężysty, np. tarczę nieograniczoną. Oznaczmy przez $f(x_1, x_2)$ dowolną składową stanu naprężenia lub przemieszczenia, tzn.

$$(1.1) \quad f = \{\sigma_{ij}, u_i\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Przyjmijmy dalej, że znane nam są funkcje $f^{(k)}(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) takie, że

$$(1.2) \quad f(x_1, x_2) = f^{(k)}(x_1, x_2),$$

gdy na ośrodek sprężysty działa jednostkowa siła skupiona, uciepiona w początku ortokartezjańskiego układu współrzędnych i skierowana wzdłuż dodatniej osi x_k .



Rys. 1

Funkcje $f^{(k)}$ można więc określić jako funkcje wpływowo.

Weźmy pod uwagę parę dwóch sił P działających na ramieniu ε nachylonym pod kątem φ do osi x_1 (rys. 1). Jedna z sił pary jest uciepiona w punkcie O stanowiącym początek układu współrzędnych, druga w punkcie O_1 o współrzędnych $(-\varepsilon \cos \varphi, -\varepsilon \sin \varphi)$.

Wielkość dowolnej składowej stanu naprężenia lub przemieszczenia będzie równa

$$(1.3) \quad f(x_1, x_2) = P \sin \varphi f^{(1)}(x_1, x_2) - P \cos \varphi f^{(2)}(x_1, x_2) - \\ - P \sin \varphi f^{(1)}(x_1 + \varepsilon \cos \varphi, x_2 + \varepsilon \sin \varphi) + P \cos \varphi f^{(2)}(x_1 + \varepsilon \cos \varphi, x_2 + \varepsilon \sin \varphi).$$

Po przejściu do granicy, gdy

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ i } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\varepsilon = M,$$

równanie (1.3) określi działanie pojedynczego dipola na płaski ośrodek sprężysty. Uwzględniając oznaczenia na rys. 1 oraz (1.3) otrzymamy

$$(1.4) \quad f(B) = -M \sin \varphi \lim_{B_1 \rightarrow B} \frac{f^{(1)}(B_1) - f^{(1)}(B)}{BB_1} + \\ + M \cos \varphi \lim_{B_1 \rightarrow B} \frac{f^{(2)}(B_1) - f^{(2)}(B)}{BB_1}.$$

Granice występujące po prawej stronie równania (1.4) wyznaczają pochodne kierunkowe funkcji $f^{(k)}$ w punkcie $B(x_1, x_2)$ i w kierunku ε określonym kątem φ :

$$\lim_{B_1 \rightarrow B} \frac{f^{(k)}(B_1) - f^{(k)}(B)}{BB_1} = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_1} \cos \varphi + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_2} \sin \varphi = f_{,i}^{(k)} a_i.$$

Wprowadzono oznaczenia: $a_1 = \cos \varphi$, $a_2 = \sin \varphi$. Ostatecznie otrzymuje się wzór

$$(1.5) \quad f = M(a_1 f_{,i}^{(2)} a_i - a_2 f_{,i}^{(1)} a_i).$$

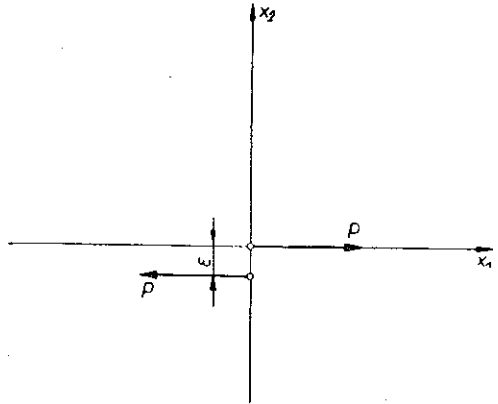
Z równania (1.5) wynika, że funkcja $f(x_1, x_2)$ jest zależna od skierowania pojedynczego dipola. W przypadku szczególnym, gdy $\varphi = 0$, mamy

$$(1.6) \quad f = Mf_{,1}^{(2)},$$

a gdy $\varphi = \pi/2$

$$(1.7) \quad f = -Mf_{,2}^{(1)}.$$

Wykażemy dalej na przykładzie, że stan naprężenia i przemieszczenia, spowodowany działaniem pojedynczego dipola, nie jest kołowo-symetryczny. Wyjaśnijmy, że symetria obrotowa jest postulatem, który powinien spełniać moment skupiony, działający na nieograniczoną, jednorodną i izotropową płaszczyznę sprężystą. W pozostałych przypadkach (np. gdy moment skupiony działa na płaszczyznę anizotropową lub w pobliżu brzegu półpłaszczyzny) postulat ten musimy osłabić, żądając jedynie kołowej symetrii stanu naprężenia w otoczeniu punktu przyłożenia momentu skupionego.



Rys. 2

Rozpatrzmy działanie pojedynczego dipola na tarczę nieograniczoną. Przyłożmy dipol w początku układu współrzędnych i skierujmy go zgodnie z rys. 2. Mamy więc $\varphi = \pi/2$ i korzystamy ze wzoru (1.7). Funkcje $f^{(1)}$ mają postać [4]:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4\pi x_k x_k} \left\{ (1-\nu) [\delta_{ij} x_1 - (1-\delta_{ij}) x_2] - 4\delta_{1i} \delta_{1j} x_1 - \right. \\ \left. - 2(1+\nu) [(1-\delta_{ij}) x_1 + (-1)^i \delta_{ij} x_2] \frac{x_1 x_2}{x_k x_k} \right\},$$

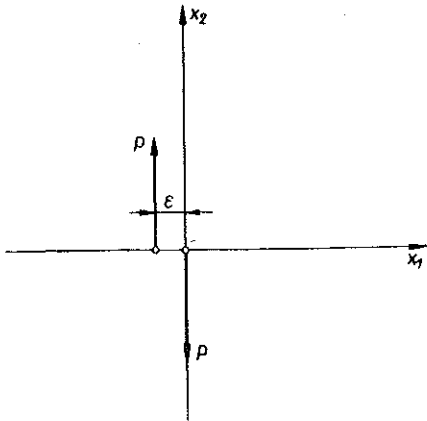
$$u_i^{(1)} = \frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(1+\nu) \frac{x_1 x_i}{x_k x_k} + (3-\nu) \delta_{1i} \ln \frac{L}{\sqrt{x_k x_k}} \right].$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych względem x_2 , zgodnie ze wzorem (1.7), otrzymuje się

$$(1.8) \quad \sigma_{ij} = \frac{M}{2\pi (x_k x_k)^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} [2\delta_{ij} x_1 x_2 + (1-\delta_{ij})(x_1^2 - x_2^2)] - 4\delta_{1i} \delta_{1j} x_1 x_2 + \right. \\ \left. + (1+\nu) [2(-1)^i \delta_{ij} x_2 (x_1^2 - x_2^2) + (1-\delta_{ij}) x_1 (x_1^2 - 3x_2^2)] \frac{x_1}{x_k x_k} \right\},$$

$$u_i = \frac{M}{x_k x_k} \frac{1+\nu}{4\pi E} \left\{ (3-\nu) \delta_{1i} x_2 + (1+\nu) [2\delta_{1i} x_1 x_2 - \delta_{i2} (x_1^2 - x_2^2)] \frac{x_1}{x_k x_k} \right\},$$

lub w układzie współrzędnych biegunowych



Rys. 3

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{M}{2\pi} (1+\nu) \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \\
 (1.9) \quad \sigma_{r\theta} &= \frac{M}{4\pi} \frac{1}{r^2} [(3+\nu) - 2(1+\nu) \sin^2 \theta], \\
 u_r &= \frac{M}{2\pi} \frac{1+\nu}{E} \frac{\sin 2\theta}{r}, \\
 u_\theta &= -\frac{M}{4\pi} \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} [(3-\nu) - \\
 &\quad - 2(1-\nu) \cos^2 \theta].
 \end{aligned}$$

Z równań (1.9) wyraźnie widać, że stan naprężenia i przemieszczenia nie jest kołowo-symetryczny.

Nadajmy teraz dipolowi skierowanie zgodnie z rys. 3. Stan naprężenia i przemieszczenia wyznaczmy wzorem (1.6). Funkcje $f^{(2)}$ mają teraz postać:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{4\pi x_k x_k} \left\{ (1-\nu) [\delta_{ij} x_2 - (1-\delta_{ij}) x_1] - 4\delta_{i2} \delta_{j2} x_2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+\nu) [(-1)^i \delta_{ij} x_1 - (1-\delta_{ij}) x_2] \frac{x_1 x_2}{x_k x_k} \right\}, \\
 u_i^{(2)} &= \frac{1+\nu}{4\pi E} \left[(1+\nu) \frac{x_i x_2}{x_k x_k} + (3-\nu) \delta_{i2} \ln \sqrt{\frac{L}{x_k x_k}} \right].
 \end{aligned}$$

Składowe stanu naprężenia i przemieszczenia, zgodnie ze wzorem (1.6), są równe

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= -\frac{M}{2\pi (x_k x_k)^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} [2\delta_{ij} x_1 x_2 - (1-\delta_{ij}) (x_1^2 - x_2^2)] - \right. \\
 (1.10) \quad &\quad \left. - 4\delta_{i2} \delta_{j2} x_1 x_2 + (1+\nu) [2(-1)^i \delta_{ij} x_1 (x_1^2 - x_2^2) - \right. \\
 &\quad \left. - (1-\delta_{ij}) x_2 (3x_1^2 - x_2^2)] \frac{x_2}{x_k x_k} \right\}, \\
 u_i &= -\frac{M}{x_k x_k} \frac{1+\nu}{4\pi E} \left\{ (3-\nu) \delta_{i2} x_1 + (1+\nu) [2\delta_{i2} x_1 x_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{i1} (x_1^2 - x_2^2)] \frac{x_2}{x_k x_k} \right\}.
 \end{aligned}$$

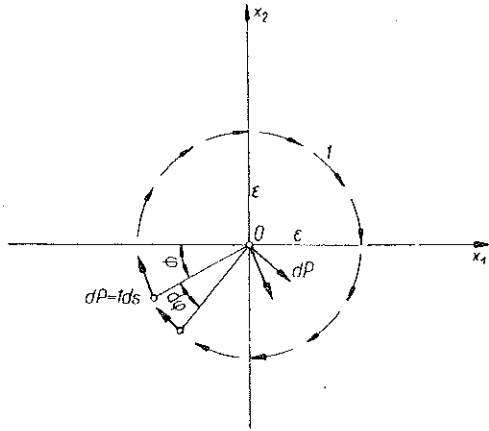
Otrzymany stan naprężenia i przemieszczenia jest różny od określonego równaniami (1.8). We współrzędnych biegunowych otrzymuje się wzory podobne do (1.9), należy w nich tylko podstawić $\theta \pm \pi/2$ zamiast θ .

Skutek działania dipola jest więc zależny od jego skierowania. Pojedynczemu dipolowi odpowiada niesymetryczny osiowo stan naprężenia i przemieszczenia. Dipol może stanowić pewien szczególny rodzaj obciążenia, nie można jednak utożsamiać go z momentem skupionym.

Poprawna definicja momentu skupionego musi uwzględniać dwa postulaty:
 1) moment skupiony nie może być związany z żadnym wyróżnionym kierunkiem na płaszczyźnie jego działania,

2) odpowiadający jego działaniu stan naprężenia musi być w otoczeniu punktu uczepienia momentu ko'owo-symetryczny względem osi jego działania.

Postulatom tym odpowiada określenie momentu skupionego jako potoku sił stycznych do okręgu równomiernie na nim rozłożonych przy założeniu, że promień okręgu dąży do zera, a suma momentów statycznych tych sił względem środka okręgu ma wartość skończoną równą M (rys. 4).



Rys. 4

Istotnie, zauważmy, że potok sił stycznych do okręgu możemy traktować jako zbiór nieskończenie wielu dipoli $t ds \varepsilon$ (ε jest promieniem koła, $ds = \varepsilon d\varphi$), ponieważ elementy sił $dP = t ds$ uczepione w środku koła O wzajemnie się znoszą dając zerową wypadkową. Tak samo znika wyróżniony kierunek, ponieważ elementarne dipole $tds\varepsilon$ są rozłożone równomiernie na kącie 2π . Postulat lokalnej symetrii osiowej jest spełniony w sposób wyraźnie widoczny.

Elementarny dipol jest równy $dM = dP\varepsilon = t\varepsilon^2 d\varphi$. Dowolną składową stanu naprężenia i przemieszczenia obliczamy za pomocą wzoru (1.5) przyjmując, że

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ i } M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \varepsilon^2 t.$$

Piszemy więc

$$df = dM (a_1 f_{,i}^{(2)} a_i - a_2 f_{,i}^{(1)} a_i) = t\varepsilon^2 (a_1 f_{,i}^{(2)} a_i - a_2 f_{,i}^{(1)} a_i) d\varphi,$$

skąd

$$f = t\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} [f_{,1}^{(2)} \cos^2 \varphi - f_{,2}^{(1)} \sin^2 \varphi + (f_{,2}^{(2)} - f_{,1}^{(1)}) \sin \varphi \cos \varphi] d\varphi = \pi\varepsilon^2 t (f_{,1}^{(2)} - f_{,2}^{(1)})$$

i uwzględniając że $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi\varepsilon^2 t = M/2$, otrzymujemy ostatecznie wzór ogólny określający składowe stanu naprężenia i odkształcenia, spowodowane działaniem momentu skupionego w punkcie O :

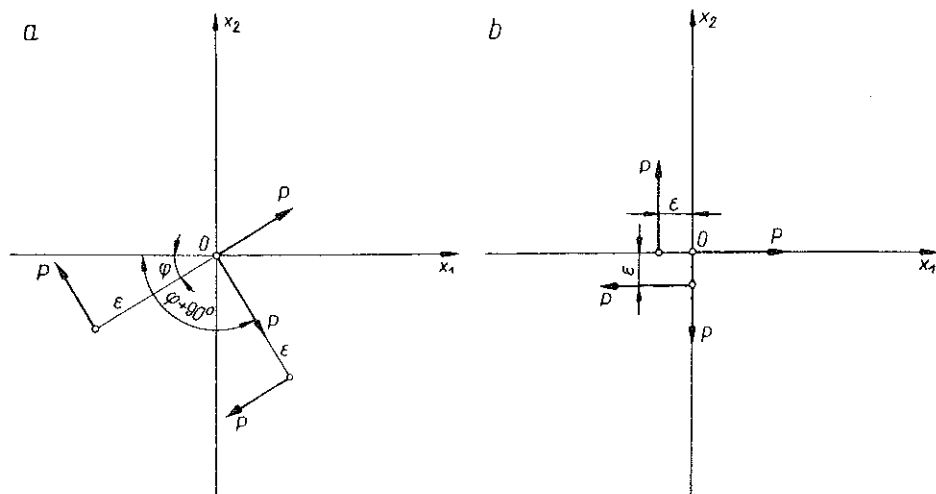
$$(1.11) \quad f = \frac{M}{2} (f_{,1}^{(2)} - f_{,2}^{(1)}).$$

Wykażemy dalej, że określenie momentu skupionego jako dwóch równych dipoli działających w jednym punkcie i skierowanych wzajemnie prostopadłe jest równoważne podanej wyżej definicji momentu skupionego.

Niech w punkcie O stanowiącym początek układu współrzędnych działają dwa dipole o zgodnych kierunkach obrotu, każdy o wartości $M/2$. Skierowanie jednego z nich niech będzie określone kątem φ , drugiego — kątem ψ . Wówczas na podstawie równania (1.5) mamy

$$f = \frac{M}{2} [f_{,1}^{(2)} (\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi) - f_{,2}^{(1)} (\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi) + (f_{,2}^{(2)} - f_{,1}^{(1)}) (\sin \varphi \cos \varphi + \sin \psi \cos \psi)].$$

Jeżeli $\psi = \varphi + \pi/2, \varphi + 3\pi/2, \dots$, tzn. jeżeli dipole są skierowane wzajemnie prostopadle (rys. 5a), to jak łatwo zauważyć, powyższy wzór przechodzi we wzór (1.11).



Rys. 5

Ponieważ wynik jest teraz niezależny od kąta φ , najwygodniej jest przyjąć układ dwóch dipoli zgodnie z rys. 5b (i jednocześnie zgodnie z [2]).

Dla nieograniczonej płaszczyzny sprężystej obciążonej w początku układu współrzędnych momentem skupionym zgodnie ze wzorem (1.11) otrzymuje się

$$(1.12) \quad \sigma_{ij} = \frac{M}{2\pi (x_k x_k)^2} [2(-1)^i \delta_{ij} x_1 x_2 + (1 - \delta_{ij})(x_1^2 - x_2^2)],$$

$$u_i = \frac{M}{x_k x_k} \frac{1+\nu}{2\pi E} (\delta_{1i} x_2 - \delta_{i2} x_1)$$

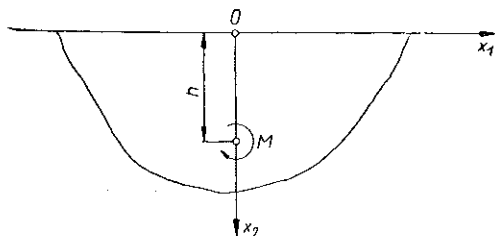
lub w układzie współrzędnych biegunowych

$$(1.13) \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2},$$

$$u_r = 0, \quad u_\theta = -\frac{M}{2\pi r} \frac{1+\nu}{E}.$$

2. Moment skupiony działający na brzegu tarczy

Pozostaje jeszcze otwarta kwestia określenia momentu skupionego, działającego na brzegu tarczy. Aby ją rozstrzygnąć, wyjdziemy z ustalonej już definicji, która — trzeba to podkreślić — została sformułowana dla momentu skupionego, działającego wewnątrz obszaru tarczy. Rozważmy więc działanie momentu skupionego, uczepionego w odległości h od brzegu półpłaszczyzny sprężystej (rys. 6). Przypadek szczególny działania momentu skupionego na brzegu uzyskamy przyjmując w wyniku $h = 0$. Wzory końcowe pozwolą na wyciągnięcie właściwych wniosków.



Rys. 6

Rozwiązanie postawionego zadania złożymy z dwóch części: 1 — osobliwej, dotyczącej działania momentu na tarczę nieograniczoną (σ'_{ij} , u'_i); 2 — regularnej (σ''_{ij} , u''_i). Nałożenie części regularnej na część osobliwą rozwiązania pozwoli spełnić warunki na brzegu: $\sigma_{i2}(x_1, 0) = 0$.

Część osobliwa ma postać [por. (1.12)]:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= -\frac{M}{2\pi R_1^4} \{2(-1)^i \delta_{ij} x_1 (x_2 - h) + (1 - \delta_{ij}) [x_1^2 - (x_2 - h)^2]\}, \\ (2.1) \quad u'_i &= -\frac{M}{R_1^2} \frac{1+\nu}{2\pi E} [\delta_{1i} (x_2 - h) - \delta_{i2} x_1], \\ R_1 &= \sqrt{x_1^2 + (x_2 - h)^2}. \end{aligned}$$

Część regularną rozwiązania można uzyskać za pomocą funkcji Neubera i Papkowicza, które w płaskim zagadnieniu teorii sprężystości (płaski stan naprężenia) określają przemieszczenia następująco:

$$(2.2) \quad 2Gu_i = -F_{,i} + \frac{4}{1+\nu} \Phi_i, \quad F = \Phi_0 + x_i \Phi_i.$$

Funkcje Φ_0 , Φ_1 i Φ_2 są funkcjami harmonicznymi. Jedna z nich może być dowolna, przyjmujemy więc $\Phi_1 \equiv 0$, natomiast pozostałe przedstawiamy za pomocą całek Fouriera

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \Phi_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda x_2} \sin \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda x_2} \sin \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

Obliczamy naprężenia σ_{22} i σ_{12} na brzegu $x_2 = 0$, przy czym część osobiwą rozwijamy w całki Fouriera

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma'_{22}(x_1, 0) &= \frac{M}{\pi} \frac{x_1 h}{(x_1^2 + h^2)^2} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda h} \sin \lambda x_1 d\lambda; \\ \sigma'_{12}(x_1, 0) &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x_1^2 - h^2}{(x_1^2 + h^2)^2} = \frac{M}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda h} \cos \lambda x_1 d\lambda. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe $\sigma_{i2}(x_1, 0) = \sigma'_{i2}(x_1, 0) + \sigma''_{i2}(x_1, 0) = 0$ prowadzą do układu równań

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A(\lambda) + \frac{2}{1+\nu} B(\lambda) &= \frac{M}{2\sqrt{2\pi}} \lambda e^{-\lambda h}, \\ A(\lambda) + \frac{1-\nu}{1+\nu} B(\lambda) &= -\frac{M}{2\sqrt{2\pi}} \lambda e^{-\lambda h}, \end{aligned}$$

z którego obliczamy funkcje parametrowe

$$(2.6) \quad A(\lambda) = -\frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{M}{2\sqrt{2\pi}} \lambda e^{-\lambda h}, \quad B(\lambda) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \lambda e^{-\lambda h}.$$

Otrzymaną w postaci całkowej część regularną rozwiązania można zapisać w postaci zamkniętej [5]. Suma części osobiwej i regularnej daje ostatecznie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= -\frac{M}{2\pi} \left\{ 2x_1 \left[(-1)^i \delta_{ij} \left(\frac{x_2 - h}{R_1^4} - \frac{2x_2 [x_1^2 - 3(x_2 + h)^2]}{R_2^6} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\delta_{ij} + 2\delta_{1i} \delta_{1j}) \frac{x_2 + h}{R_2^4} \right] + (1 - \delta_{ij}) \left[\frac{x_1^2 - (x_2 - h)^2}{R_1^4} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x_1^2 - (x_2 + h)^2}{R_2^4} + \frac{4x_2(x_2 + h) [3x_1^2 - (x_2 + h)^2]}{R_2^6} \right] \right\}, \\ u_i &= \frac{M}{2\pi} \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{\delta_{i2} x_1 - \delta_{1i} (x_2 - h)}{R_1^2} + \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\delta_{i2} x_1 + \delta_{1i} (x_2 + h)}{R_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + [2\delta_{i2} x_1 (x_2 + h) + \delta_{1i} (x_1^2 - (x_2 + h)^2)] \frac{2x_2}{R_2^4} \right\}, \\ R_2 &= \sqrt{x_1^2 + (x_2 + h)^2}. \end{aligned}$$

Przyjmując $h = 0$ w (2.7) otrzymujemy naprężenia i przemieszczenia spowodowane działaniem momentu skupionego na brzegu tarczy półnieograniczonej

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= -\frac{2M}{\pi} \frac{x_2}{(x_k x_k)^3} \left\{ 2x_1 [\delta_{1i} \delta_{1j} x_1^2 + (3\delta_{i2} \delta_{j2} - \delta_{ij}) x_2^2] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \delta_{ij}) x_2 (3x_1^2 - x_2^2) \right\}, \\ u_i &= \frac{2M}{\pi E} \frac{x_1^2 + [2\delta_{i2} + (-1)^i \nu] x_2^2}{(x_k x_k)^2} (\delta_{i2} x_1 + \delta_{1i} x_2). \end{aligned}$$

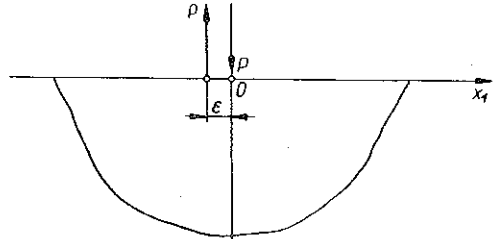
We współrzędnych biegunowych wzory (2.8) mają postać

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2M \sin 2\theta}{\pi r^2}, & \sigma_{\theta\theta} &= 0, & \sigma_{r\theta} &= -\frac{2M \sin^2 \theta}{\pi r^2}, \\ u_r &= \frac{2M \sin 2\theta}{\pi E r}, & u_\theta &= \frac{2M \cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta}{\pi E r}. \end{aligned}$$

Taki sam wynik otrzymuje się obciążając brzeg tarczy pojedynczym dipolem skierowanym prostopadle do brzegu (rys. 7). W tym przypadku posługujemy się wzorem

$$(2.10) \quad f = -Mf_1^{(2)},$$

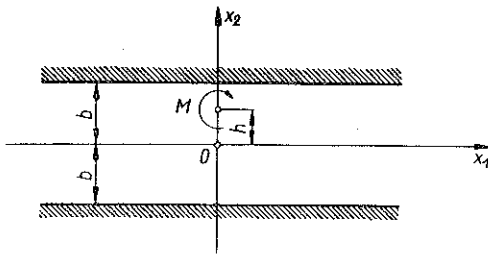
w którym $f^{(2)}$ jest funkcją określającą dowolną składową stanu naprężenia lub przemieszczenia spowodowaną siłą jednostkową przyłożoną do punktu O brzegu tarczy i działającą wzdłuż dodatniego kierunku osi x_2 (zadanie Flamanta).



Rys. 7

3. Przykład

UFLIAND [3], jakkolwiek pisze wyraźnie o momencie skupionym, w istocie rozwiązuje problem pasma tarczowego utwierdzonego na brzegach i obciążonego w środku szerokości pojedynczym dipolem skierowanym wzdłuż osi x_1 .



Rys. 8

Rozwiązemy to zadanie realizując moment skupiony zgodnie z ustaleniami zawartymi w niniejszej pracy. Zadanie uogólnimy przyjmując punkt przyłożenia momentu skupionego w odległości h od osi x_1 (rys. 8); $-b < h < b$, $-\infty < x_1 < \infty$, $-b \leq x_2 \leq b$.

Rozwiązanie składamy z dwóch części: osobliwej (σ'_{ij}, u'_i) oraz regularnej (σ''_{ij}, u''_i). Mamy więc

$$(3.1) \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}, \quad u_i = u'_i + u''_i.$$

Część osobliwa wynika wprost z (1.12), natomiast część regularną budujemy posługując się funkcjami Neubera i Papkowicza, które przedstawiamy całkami Fouriera

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda x_2 + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda x_2] \sin \lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \Phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [C(\lambda) \operatorname{ch} \lambda x_2 + D(\lambda) \operatorname{sh} \lambda x_2] \sin \lambda x_1 d\lambda. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 2Gu_1'' &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(A + \lambda x_2 C) \operatorname{ch} \lambda x_2 + (B + \lambda x_2 D) \operatorname{sh} \lambda x_2] \cos \lambda x_1 d\lambda, \\
 (3.3) \quad 2Gu_2'' &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [(A - \kappa D + \lambda x_2 C) \operatorname{sh} \lambda x_2 + (B - \kappa C + \lambda x_2 D) \operatorname{ch} \lambda x_2] \times \\
 &\quad \times \sin \lambda x_1 d\lambda, \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równań brzegowych

$$(3.4) \quad u_i(x_1, \pm b) = u_i'(x_1, \pm b) + u_i''(x_1, \pm b) = 0$$

wartości $u_i'(x_1, \pm b)$ rozwiniętych w całki Fouriera

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad 2Gu_1'(x_1, \pm b) &= \pm \frac{M}{2\pi} \frac{b \mp h}{x_1^2 + (b \mp h)^2} = \pm \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(b \mp h)} \cos \lambda x_1 d\lambda, \\
 2Gu_2'(x_1, \pm b) &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + (b \mp h)^2} = -\frac{M}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(b \mp h)} \sin \lambda x_1 d\lambda
 \end{aligned}$$

oraz wartości $u_i''(x_1, \pm b)$ zgodnie ze wzorami (3.3) otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \operatorname{ch} \lambda b A + \operatorname{sh} \lambda b B + \lambda b \operatorname{ch} \lambda b \cdot C + \lambda b \operatorname{sh} \lambda b D &= \frac{M}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda(b-h)}, \\
 \operatorname{ch} \lambda b A - \operatorname{sh} \lambda b B - \lambda b \operatorname{ch} \lambda b \cdot C + \lambda b \operatorname{sh} \lambda b D &= -\frac{M}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda(b+h)}, \\
 \operatorname{sh} \lambda b A + \operatorname{ch} \lambda b B - (\kappa \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b \operatorname{sh} \lambda b) C - \\
 &\quad - (\kappa \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b \operatorname{ch} \lambda b) D = -\frac{M}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda(b-h)}, \\
 \operatorname{sh} \lambda b A - \operatorname{ch} \lambda b B + (\kappa \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b \operatorname{sh} \lambda b) C - \\
 &\quad - (\kappa \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b \operatorname{ch} \lambda b) D = \frac{M}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda(b+h)}.
 \end{aligned}$$

Stąd wyliczamy funkcje parametrowe:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad A(\lambda) &= \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h, \\
 B(\lambda) &= \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h, \\
 C(\lambda) &= \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{ch} \lambda h}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b}, \quad D(\lambda) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sh} \lambda h}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b}.
 \end{aligned}$$

Część regularną rozwiązania określają wzory:

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11} &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b + \kappa_1) \operatorname{sh} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda + \\
 &+ \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b + \kappa_1) \operatorname{ch} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{sh} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda, \\
 \sigma''_{22} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b - \kappa_1) \operatorname{sh} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda - \\
 &- \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b - \kappa_1) \operatorname{ch} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{sh} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda, \\
 \sigma''_{12} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b - \kappa_2) \operatorname{ch} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{sh} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h \cos \lambda x_1 \lambda d\lambda + \\
 (3.8) \quad &- \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b - \kappa_2) \operatorname{sh} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h \cos \lambda x_1 \lambda d\lambda, \\
 2Gu''_1 &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b - \lambda b) \operatorname{sh} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h \cos \lambda x_1 \lambda d\lambda - \\
 &- \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b - \lambda b) \operatorname{ch} \lambda x_2 + \lambda x_2 \operatorname{sh} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h \cos \lambda x_1 \lambda d\lambda, \\
 2Gu''_2 &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda b + \lambda b) \operatorname{ch} \lambda x_2 - \lambda x_2 \operatorname{sh} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b + 2\lambda b} \operatorname{ch} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda + \\
 &+ \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda b + \lambda b) \operatorname{sh} \lambda x_2 - \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_2}{\kappa \operatorname{sh} 2\lambda b - 2\lambda b} \operatorname{sh} \lambda h \sin \lambda x_1 \lambda d\lambda, \\
 \kappa_1 &= \frac{2\nu}{1+\nu}, \quad \kappa_2 = \frac{1-\nu}{1+\nu}.
 \end{aligned}$$

4. Wnioski

Podsumowując rozważania stwierdzamy, że dipol i moment skupiony są pojęciami różnymi. Działanie momentu skupionego w obszarze tarczy sprężystej jest równoważne działaniu dwóch równych dipoli uczepionych w jednym punkcie i skierowanych wzajemnie prostopadłe. Natomiast działaniu momentu skupionego na brzeg tarczy odpowiada pojedynczy dipol skierowany prostopadłe do brzegu.

Nasze rozważania prowadziliśmy dla ośrodka płaskiego. Wnioski możemy jednak przenieść na ośrodek trójwymiarowy. Do takiego uogólnienia upoważnia nas fakt,

że moment skupiony związany jest zawsze z pewną płaszczyzną. Układ współrzędnych możemy tak dobrać, aby moment działał np. w płaszczyźnie $x_1 O x_2$. Wówczas wzory (1.11) i (2.10) pozostają w mocy, a jedynie funkcja f i funkcje $f^{(k)}$ będą funkcjami trzech zmiennych (x_1, x_2, x_3) .

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. 1, PWN, Warszawa 1957.
2. S. ТИМОШЕНКО, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
3. Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1963.
4. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.
5. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Москва-Ленинград 1951.

Резюме

К ВОПРОСУ ДЕФИНИЦИИ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕГО НА УПРУГУЮ СРЕДУ

Доказывается, что результат воздействия одинарного диполя зависит от его направления. Констатируется, что нельзя отождествлять сосредоточенный момент с диполем, как это делают некоторые авторы. Предлагается правильная дефиниция сосредоточенного момента, действующего в области плоской упругой среды, а также на ее краю.

В качестве примера дается решение для полосы с заземленными краями, нагруженной сосредоточенным моментом.

Summary

SOME REMARKS ON THE DEFINITION OF A CONCENTRATED MOMENT ACTING ON AN ELASTIC MEDIUM

It is demonstrated in the present paper that the effect of action of a single dipole depends on its orientation. It is found that a concentrated moment cannot be identified with a dipole, as is done by some authors. The paper brings a correct definition of a concentrated moment acting in the region of a plane elastic body and on its edge. As an example is obtained the solution of the problem of a panel strip with clamped edges, loaded by a concentrated moment.

KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 listopada 1965 r.