

## OSIOWO-SYMETRYCZNY STAN POKRYTYCZNY PŁYT PIERŚCIENIOWYCH O BRZEGACH SWOBODNYCH W STACJONARNYM POLU TEMPERATUR

CZESŁAW MICKIEWICZ (SZCZECIN)

### 1. Wstęp

W wielu dziedzinach współczesnej techniki (szczególnie w jej wyspecjalizowanych gałęziach, takich jak konstrukcje lotnicze czy skomplikowane urządzenia mechaniczne) zachodzi często konieczność analizy elementów konstrukcji nie tylko w fazie pracy sprężystej, przed wyobczeniem, ale również oceny efektów stanu pokrytycznego po utracie stateczności. Chodzi tu przede wszystkim o takie elementy, dla których stan pokrytyczny nie jest stanem awaryjnym i spełniają one po wyobczeniu w zasadzie swoje pierwotne przeznaczenie. Do takich zagadnień należy stan pokrytyczny cienkich płyt po wyobczeniu termicznym. W pracach [1-3] M. FORRAY i M. NEWMAN rozwiązali kilka szczególnych przypadków dla płyt okrągłych i prostokątnych w oparciu o równania Kármána przy użyciu metod numerycznych. Efektowne rozwiązania zagadnienia dla płyt o brzegach swobodnych przedstawił P. WILDE w pracach [4-10]. Do zanalizowania problemu użyto tu metod i osiągnięć geometrii różniczkowej. Wyniki uzyskane na drodze teoretycznej zweryfikowano doświadczalnie w serii badań na modelach.

Podczas tych badań w wielu przypadkach rozkład temperatur wzdłuż promienia modeli aproksymowany był z powodzeniem funkcją potęgową:

$$(1.1) \quad T(r) = T_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m}.$$

Wzór (1.1) może być użyty do aproksymacji, gdy pole temperatur powstaje w ten sposób, że na brzegu  $r = r_0$  płyty pierścieniowej działa źródło ciepła utrzymujące stałą temperaturę  $T_0$  i może zachodzić wymiana ciepła z otoczeniem na powierzchniach  $z = \pm h/2$ , gdzie  $h$  oznacza grubość płyty.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie pokrytycznego stanu cienkich płyt pierścieniowych o brzegach swobodnych poddanych działaniu stacjonarnego, osiowo-symetrycznego pola temperatur aproksymowanego funkcją potęgową (1.1). Zagadnienie zostanie rozwiązane w dwóch etapach [10]. Początkowo będą określone na drodze czysto geometrycznej skończone ugięcia płyty o zerowej sztywności na zginanie. W drugim etapie, aby uwzględnić wpływ sztywności na zginanie na pokrytyczny stan płyt pierścieniowych, będzie rozwiązany układ równań Kármána na duże ugięcia płyt dla rozpatrywanego pola temperatury. Celem części

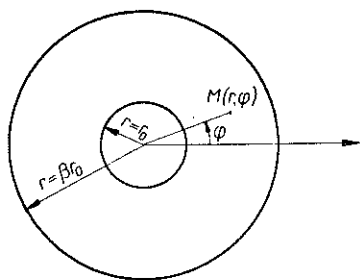
doświadczalnej jest uzyskanie dla badanej płyty osiowo-symetrycznego pola temperatur, wyznaczenie parametrów tego pola wchodzących do wzoru aproksymacyjnego (1.1), a także weryfikacyjny pomiar rzeczywistych ugięć płyty.

**1.1. Podstawowe założenia.** W dalszym ciągu rozważań przyjęto następujące założenia:

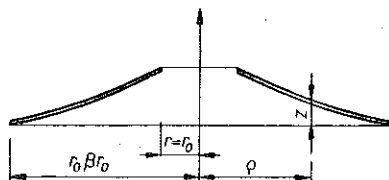
- 1) materiał jest izotropowy i podlega prawu Hooke'a,
- 2) współczynnik rozszerzalności liniowej  $\alpha$  jest stały i nie zależy od temperatury,
- 3) od temperatury nie zależy również moduł sprężystości  $E$  oraz liczba Poissona  $\mu$ ,
- 4) przemieszczenia z płaszczyzny nieodkształconej płyty są duże,
- 5) dodatkowe przemieszczenia przy uwzględnieniu sztywności na zginanie są małe i można pominąć ich kwadraty (linearyzacja).
- 6) pole temperatur jest osiowo-symetryczne i stacjonarne,
- 7) płyta jest cienka i rozkład temperatury na grubości płyty jest stały.

## 2. Skończone ugięcia płyty o zerowej sztywności na zginanie

Jak już wspomniano we wstępie w pierwszym etapie rozważona będzie płyta pierścieniowa o zerowej sztywności na zginanie (błona). Zagadnienie rozpatruje się we współrzędnych biegunowych. Przyjęty układ przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1



Rys. 2

Brzeg wewnętrzny płyty  $r = r_0$  zostaje ogrzany i pole temperatur jest osiowo-symetryczne. Na skutek ogrzania płyta wyboczy się i zajmie położenie jak na rys. 2.

Rozpatrzmy elementy liniowe:

- 1) przed wyboczeniem w kierunku obwodowym

$$(2.1) \quad ds = r d\varphi,$$

w kierunku promieniowym

$$(2.2) \quad ds_0 = dr,$$

- 2) po ogrzaniu i wyboczeniu w kierunku obwodowym

$$(2.3) \quad ds = \varrho d\varphi,$$

w kierunku promieniowym

$$(2.4) \quad ds^2 = d\varrho^2 + dz^2.$$

Przyjęto, że wyboczenie jest spowodowane przez pole temperatur

$$(2.5) \quad ds = ds_0 (1 + \alpha T).$$

Po podstawieniu (2.5) do wzorów (2.1)–(2.4) wyznaczono zależności:  
w kierunku obwodowym

$$(2.6) \quad \varrho = r (1 + \alpha T),$$

w kierunku promieniowym

$$(2.7) \quad d\varrho^2 + dz^2 = dr^2 (1 + \alpha T)^2.$$

Ze związku (2.6) można obliczyć  $d\varrho/dr$ :

$$\frac{d\varrho}{dr} = (1 + \alpha T) + r\alpha \frac{dT}{dr},$$

a ze wzorów (2.6) i (2.7)

$$(2.8) \quad \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = -2(1 + \alpha T) r\alpha \frac{dT}{dr} - r^2 \alpha^2 \left(\frac{dT}{dr}\right)^2.$$

Wyrażenie (2.8) przy pominięciu wyrazów zawierających  $\alpha^2$  (jako bardzo małe) upraszcza się do postaci

$$(2.9) \quad \frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{-2\alpha r \frac{dT}{dr}}.$$

Poszukiwane są przemieszczenia  $z$  dla pola temperatur (1.1)

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m}.$$

Po wstawieniu gradientu pola temperatury (1.1) do wzoru (2.9) otrzymano

$$(2.10) \quad \frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{2\alpha T_0 m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m/2}.$$

Całkując (2.10) i przyjmując znak minus przed pierwiastkiem, możemy ugięcie  $z$  przedstawić za pomocą wzoru

$$(2.11) \quad z = \frac{2\sqrt{2\alpha T_0 m}}{m-2} r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2(2-m)} + C.$$

Dla wyznaczenia stałej całkowania  $C$  przyjęto warunek

$$z = 0 \quad \text{dla} \quad r = \beta r_0.$$

Wykorzystując ten warunek otrzymano końcowy wzór na ugięcie  $z$ :

$$(2.12) \quad z = \frac{2\sqrt{2\alpha T_0 m}}{m-2} r_0 \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2(2-m)} - \beta^{1/2(2-m)} \right].$$

Należy zauważyć, że zgodnie z sensem fizycznym pola temperatur (1.1)  $m > 0$ .

## 3. Duże ugięcia płyty o skończonej sztywności na zginanie

**3.1. Równania podstawowe.** Rozpatrywana płyta ma skończoną sztywność na zginanie. Wpływ tej sztywności na ugięcie płyty uwzględniony zostanie na podstawie równania dla dużych ugięć płyt Kármána. Układ równań różniczkowych dla dużych ugięć płyt Kármána zawiera prócz ugięć również siły normalne, występujące na powierzchni środkowej płyty i wyrażone przez funkcję Airy'ego. Poszukiwany jest stan pokrywiczny płyt pierścieniowych o brzegach swobodnych poddanych stacjonarnemu osiowo-symetrycznemu polu temperatur. Dla tak sformułowanego zagadnienia wyjściowy układ równań różniczkowych Kármána ma postać [11]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dr} [\nabla^2 \Phi] + \frac{Eh}{2r} \left[ \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + 2ar \frac{dT}{dr} \right] &= 0, \\ D \frac{d}{dr} [\nabla^2 w] - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązania układu równań (3.1) poszukiwać będziemy dla pola temperatur (1.1). Układ równań (3.1) jest nieliniowy i ściśle rozwiązanie tego układu jest bardzo trudne. Dla rozwiązania przybliżonego końcowe ugięcie płyty  $w$  przedstawiono w postaci sumy

$$(3.2) \quad w = z + \omega,$$

gdzie  $z$  oznacza ugięcie płyty o zerowej sztywności na zginanie oraz  $\omega$  ugięcie dodatkowe. Takie przyjęcie przy równoczesnym wykorzystaniu założenia o linearyzacji pozwala układ równań (3.1) sprowadzić do postaci zlinearyzowanej:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dr} [\nabla^2 \omega] - \frac{1}{D} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dz}{dr} &= - \frac{d}{dr} [\nabla^2 z], \\ D [\nabla^2 \Phi] + \frac{Eh}{r} \frac{dz}{dr} \frac{d\omega}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

Sposób postępowania użyty dla rozwiązania układu równań (3.3) zgodny jest z pracą [12].

Wprowadzamy zmienną zespoloną

$$(3.4) \quad \Psi = \omega + i\kappa\Phi, \quad \kappa = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2},$$

co daje nam możliwość sprowadzenia układu (3.3) do jednego równania

$$(3.5) \quad \frac{d}{dr} [\nabla^2 \Psi] + \frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h} \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \frac{d\Psi}{dr} = - \frac{d}{dr} [\nabla^2 z].$$

Równanie różniczkowe (3.5) będzie podstawą do dalszych rozważań. Z jego budowy widać, że przy rozwiązaniu wykorzystane będą wyliczone uprzednio elementy powierzchni o zerowej sztywności na zginanie.

Wprowadzimy nowe oznaczenie

$$(3.6) \quad X = \frac{d\psi}{dr}.$$

Wstawiając funkcję (3.6) do równania (3.5), a także wykorzystując zależność (2.10), można równanie (3.5) po pewnych przekształceniach napisać w postaci

$$(3.7) \quad r^2 \frac{d^2 X}{dr^2} + r \frac{dX}{dr} - X - i \frac{r \sqrt{12(1-\mu^2)}}{h} \sqrt{2amT_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m/2} X = \\ = \frac{m^2 - 4}{4} \sqrt{2amT_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m/2}.$$

W równaniu (3.7) dokonamy jeszcze zamiany zmiennych wprowadzając zmienną bezwymiarową  $\varrho = r/r_0$ . W wyniku otrzymano ostateczną postać równania różniczkowego problemu:

$$(3.8) \quad \varrho^2 \frac{d^2 X}{d\varrho^2} + \varrho \frac{dX}{d\varrho} - (i\sqrt{A} b\varrho^n + 1) X = n(n-2) b\varrho^{n-1},$$

gdzie

$$A = \frac{12(1-\mu^2)}{h^2}, \quad b = \sqrt{2amT_0}, \quad n = \frac{2-m}{2}.$$

Równanie (3.8) jest niejednorodnym równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o współczynnikach zmiennych. Równanie to da się sprowadzić do równania różniczkowego Bessela argumentu zespolonego i na tej drodze poszukiwane będzie jego rozwiązanie.

Rozpatrzmy przypadki, dla których równanie problemu (3.8) się upraszcza. Jak już wyjaśniono uprzednio, z analizy pola temperatur wynika, że  $m > 0$ . Stąd mamy warunek, że  $n < 1$ . Dla  $n = 0$  równanie (3.8) przechodzi w równanie Eulera.

**3.2. Rozwiązanie równania problemu.** Pełne rozwiązanie równania różniczkowego (3.8) może być przedstawione jako suma

$$(3.9) \quad X = X_0 + X_s,$$

gdzie  $X_0$  jest całką równania jednorodnego (3.8), a  $X_s$  całką szczególną równania niejednorodnego.

Dla wyznaczenia całki ogólnej  $X_0$  dokonamy zamiany zmiennych [13]:

$$x = l\varrho^{n/2}, \quad l = \frac{2}{n} \sqrt{b\sqrt{A}}.$$

Równanie jednorodne (3.8) sprowadza się do drugiej typowej postaci równania Bessela:

$$(3.10) \quad x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + x \frac{dX}{dx} - \left[ ix^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \right] X = 0,$$

którego rozwiązanie można przyjąć w postaci [15].

$$(3.11) \quad X_0 = A_1 I_{2/n}(x \sqrt{i}) + A_2 K_{2/n}(x \sqrt{i}).$$

Tutaj  $I_{2/n}(x \sqrt{i})$  oraz  $K_{2/n}(x \sqrt{i})$  oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju rzędu  $2/n$  argumentu zespolonego  $x \sqrt{i}$ . Symbole  $A_1$  i  $A_2$  oznaczają zespolone stałe całkowania, na które przyjęto wartości zespolone

$$A_1 = C_1 + i C_2, \quad A_2 = C_3 + i C_4.$$

Jest rzeczą bardzo korzystną wyrażenie funkcji  $I_{2/n}(x \sqrt{i})$  i  $K_{2/n}(x \sqrt{i})$  przez funkcje argumentu rzeczywistego. Służą do tego wzory

$$(3.12) \quad \begin{aligned} I_{2/n}[x \sqrt{i}] i^{2/n} &= \text{ber}_{2/n} x + i \text{bei}_{2/n} x, \\ K_{2/n}[x \sqrt{i}] i^{2/n} &= \text{ker}_{2/n} x + i \text{kei}_{2/n} x, \end{aligned}$$

gdzie  $\text{ber}_{2/n} x$ ,  $\text{bei}_{2/n} x$ ,  $\text{ker}_{2/n} x$ ,  $\text{kei}_{2/n} x$ , są funkcjami Thomsonsena rzędu  $2/n$  argumentu rzeczywistego [16]. Całka ogólna równania jednorodnego (3.8) wyrażona przez funkcje Thomsonsena pierwszego i drugiego rzędu  $2/n$  może być przyjęta w postaci

$$(3.13) \quad X_0 = \frac{1}{\sqrt{A}} (C_1 \text{ber}_{2/n} x - C_2 \text{bei}_{2/n} x + C_3 \text{ker}_{2/n} x - C_4 \text{kei}_{2/n} x) + \\ + \frac{i}{\sqrt{A}} (C_1 \text{bei}_{2/n} x + C_2 \text{ber}_{2/n} x + C_3 \text{kei}_{2/n} x + C_4 \text{ker}_{2/n} x).$$

Całkę szczególną  $X_s$  znaleziono dokonując w równaniu (3.8) zamiany zmiennych

$$t = i^{3/2} I_0^{n/2}$$

i sprowadzając je do pierwszej typowej postaci równania Bessela

$$(3.14) \quad t^2 \frac{d^2 X}{dt^2} + t \frac{dX}{dt} + \left[ t^2 - \left( \frac{2}{n} \right)^2 \right] X = R t^{2-2/n}.$$

W równaniu tym  $R$  jest stałą zespoloną określoną wzorem

$$(3.15) \quad R = n(n-2) b \frac{\left( \frac{2}{n} \right)^2}{\left[ \left( \frac{2}{n} \right)^2 (i^{3/2}) (b \sqrt{A}) \right]^{2-2/n}}.$$

Całkę szczególną równania niejednorodnego (3.14) można przyjąć w postaci [17]

$$(3.16) \quad X_s = R s_{u,v}(t),$$

gdzie

$$v = \frac{2}{n}, \quad u = -\frac{2}{n} + 1.$$

Funkcja Lommela  $s_{u,v}(t)$  jest zdefiniowana w monografii [17] przez szereg nieskończony. Opierając się na wywodach teoretycznych danych w [17] widzimy, że jeżeli

$u+v$  jest całkowitą dodatnią liczbą nieparzystą (co zachodzi w naszym przypadku), to zamiast funkcji Lommela  $s_{u,v}(t)$  należy przyjąć funkcję Lommela  $S_{u,v}(t)$  określoną w [17] skończonym szeregiem potęgowym o potęgach malejących. Szereg ten redukuje się do wyrażenia algebraicznego

$$(3.17) \quad X_s = R t^{-2/n}$$

i to wyrażenie jest całką szczególną równania (3.14).

Wracając do pierwotnej zmiennej  $\varrho$  otrzymano wzór

$$(3.18) \quad X_s = \frac{i}{\sqrt{A}} n(n-2) \varrho^{-1},$$

który jest całką szczególną równania różniczkowego zagadnienia (3.8). Pełne rozwiązanie tego równania będzie sumą całek (3.13) i (3.18):

$$(3.19) \quad X = X_0 + X_s = \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} (C_1 \operatorname{ber}_{2/n} x - C_2 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_3 \operatorname{ker}_{2/n} x - C_4 \operatorname{kei}_{2/n} x) + \\ + \frac{i}{\sqrt{A}} [n(n-2) \varrho^{-1} + C_1 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_2 \operatorname{ber}_{2/n} x + C_3 \operatorname{kei}_{2/n} x + C_4 \operatorname{ker}_{2/n} x],$$

gdzie  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  są to rzeczywiste stałe całkowania, które określić można z warunków brzegowych.

W rozwiązaniu równania (3.8) występują funkcje Thomсона o wskaźniku  $2/n$  ( $n \neq 0$ ). Dla konkretnych wartości tego wskaźnika istnieją często odmienne metody numeryczne dla wyznaczania wartości funkcji Thomсона. Sprawy te są dobrze opracowane [15, 17 i 18].

#### 4. Pokrytyczny stan naprężeń i odkształceń. Warunki brzegowe

4.1. Stan naprężeń i odkształceń. Rozwiązanie (3.19) pozwala na określenie za pomocą wzorów (3.4) i (3.6) dodatkowych przemieszczeń  $\omega$  i funkcji naprężeń  $\Phi$ . Wykorzystując założenie (3.2) znajdziemy całkowite przemieszczenie pionowe płyty  $w$ .

Naprężenia i momenty zginające promieniowe i obwodowe znajdziemy ze wzorów [19]:

$$(4.1) \quad n_r = h \sigma_r^n = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{1}{\kappa} \operatorname{Im} X, \\ n_\varphi = h \sigma_\varphi^n = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \frac{1}{\kappa} \operatorname{Im} X, \\ m_r = D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left[ \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{d}{dr} \operatorname{Re} X + \frac{\mu}{r} \left( \frac{dz}{dr} + \operatorname{Re} X \right) \right], \\ m_\varphi = D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = D \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{dz}{dr} + \operatorname{Re} X \right) + \mu \left( \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{d}{dr} \operatorname{Re} X \right) \right].$$

Wykorzystując zależności (4.1) otrzymano następujące wzory:

1) na naprężenia od sił przekrojowych

$$(4.2) \quad \begin{aligned} n_r &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)r_0^2} \varrho^{-1} [n(n-2)\varrho^{-1} + C_1 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_2 \operatorname{ber}_{2/n} x + \\ &\quad + C_3 \operatorname{kei}_{2/n} x + C_4 \operatorname{ker}_{2/n} x], \\ n_\varphi &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)r_0^2} \varrho^{-1} \left[ n(n-2)\varrho^{-1} + \varrho \frac{d}{d\varrho} (C_1 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_2 \operatorname{ber}_{2/n} x + \right. \\ &\quad \left. + C_3 \operatorname{kei}_{2/n} x + C_4 \operatorname{ker}_{2/n} x) \right]; \end{aligned}$$

2) na momenty zginające promieniowe i obwodowe

$$(4.3) \quad \begin{aligned} m_r &= Dr_0^{-1} \sqrt{4a(1-n)T_0} \varrho^{-1} \left\{ (1-n-\mu)\varrho^{n-1} + \frac{1}{r_0 b \sqrt{A}} \left( \mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varrho \frac{d}{d\varrho} \right) (C_1 \operatorname{ber}_{2/n} x - C_2 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_3 \operatorname{ker}_{2/n} x - C_4 \operatorname{kei}_{2/n} x) \right\}, \\ m_\varphi &= Dr_0^{-1} \sqrt{4a(1-n)T_0} \varrho^{-1} \left\{ (\mu - \mu n - 1)\varrho^{n-1} + \frac{1}{r_0 b \sqrt{A}} \left( 1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \varrho \frac{d}{d\varrho} \right) (C_1 \operatorname{ber}_{2/n} x - C_2 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_3 \operatorname{ker}_{2/n} x - C_4 \operatorname{kei}_{2/n} x) \right\}; \end{aligned}$$

3) na gradient powierzchni ugięcia

$$(4.4) \quad \frac{dw}{dr} = \sqrt{4a(1-n)T_0} \left\{ -\varrho^{n-1} + \frac{1}{r_0 b \sqrt{A}} (C_1 \operatorname{ber}_{2/n} x - C_2 \operatorname{bei}_{2/n} x + \right. \\ \left. + C_3 \operatorname{ker}_{2/n} x - C_4 \operatorname{kei}_{2/n} x) \right\}.$$

**4.2. Warunki brzegowe.** W równaniach na składowe stanu naprężenia i odkształcenia (4.2), (4.3) i (4.4) występują cztery rzeczywiste stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ . Stałe te wyznaczone zostaną z warunków brzegowych. W naszym przypadku zarówno brzeg  $r = r_0$  jak i brzeg  $r = \beta r_0$  jest swobodny. Spełnione muszą być na tych brzegach, a więc dla  $\varrho = 1$  oraz  $\varrho = \beta$ , po dwa warunki:

$$(4.5) \quad m_r = 0, \quad n_r = 0.$$

Wykorzystując odpowiednio równania (4.2) i (4.3) oraz warunki (4.5) otrzymano układ czterech równań z czterema niewiadomymi, z których wyznaczyć można stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ . Poniżej podano te układy równań w końcowej postaci:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varrho = 1, \quad \varrho = \beta, \\ n(n-2)\varrho^{-1} + C_1 \operatorname{bei}_{2/n} x + C_2 \operatorname{ber}_{2/n} x + C_3 \operatorname{kei}_{2/n} x + C_4 \operatorname{ker}_{2/n} x = 0, \\ (1-\mu-n)\varrho^{n-1} + \frac{1}{br_0 \sqrt{A}} \left( \varrho \frac{d}{d\varrho} + \mu \right) [C_1 \operatorname{ber}_{2/n} x - C_2 \operatorname{bei}_{2/n} x + \\ C_3 \operatorname{ker}_{2/n} x - C_4 \operatorname{kei}_{2/n} x] = 0. \end{aligned}$$



## 5. Badania doświadczalne

Rozwiązanie teoretyczne pokrytycznego stanu płyt pierścieniowych w osiowo-symetrycznym polu temperatur zawarte w poprzedniej części pracy uzupełnione zostało badaniami doświadczalnymi.

Przed tymi badaniami były postawione następujące zadania:

- 1) zaobserwowanie zjawiska w postaci wybożenia płyty pierścieniowej pod wpływem osiowo-symetrycznego pola temperatur;
- 2) uzyskanie z doświadczenia parametrów do wzoru (1.1) na rozkład pola temperatur przyjętego w rozwiązaniu teoretycznym;
- 3) doświadczalny pomiar ugięć płyty, będący równocześnie weryfikacją wyników uzyskanych w przykładzie liczbowym.

Badaniu modelowemu poddano okrągłą płytę stalową o średnicy zewnętrznej  $d_0 = 597,7$  mm z otworem kolistym współśrodkowym o średnicy  $d_0 = 100,4$  mm. Grubość płyty  $h = 2,012$  mm. Model płyty ustawiono na stanowisku doświadczalnym w ten sposób, że zapewnione były warunki wolnego podparcia. Doświadczenie przeprowadzono w temperaturze, dla której nie ulegają zmianie stałe termiczne i sprężyste materiału.

Zakres badań przewidywał wykonanie następujących czynności: 1) realizację osiowo-symetrycznego nagrzania płyty, 2) pomiar pola temperatur płyty oraz 3) pomiar odkształceń pionowych płyty. Osiowo-symetryczne pole temperatur uzyskano przez równomierne ogrzanie brzegu wewnętrznego płyty  $r = r_0 = 50,2$  mm. Ogrzewano brzeg za pomocą spirali elektrycznej. Pomiaru temperatury dokonano za pomocą ogniwa termoelektrycznego w czternastu punktach pomiarowych wzdłuż trzech różnych promieni.

Pole temperatur aproksymowano funkcją (1.1) przyjętą w części teoretycznej (1.1)

$$T(r) = T_0 e^{-m}, \quad e = \frac{r}{r_0}.$$

Dla znalezienia niewiadomych parametrów  $T_0$  i  $m$  wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów. Warunek minimum odchylenia kwadratowego

$$(5.1) \quad \int_1^\beta (\lg T - \lg T_i)^2 d\varrho = \min$$

proceedzi do układu równań:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \lg T_0 \int_1^\beta d\varrho - m \int_1^\beta \lg \varrho d\varrho - \int_1^\beta \lg T_i d\varrho &= 0, \\ \lg T_0 \int_1^\beta \lg \varrho d\varrho - m \int_1^\beta [\lg \varrho]^2 d\varrho - \int_1^\beta \lg T_i \lg \varrho d\varrho &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (5.2) rozwiązano dla danych uzyskanych z doświadczenia i otrzymano końcową postać funkcji aproksymującej pole temperatur

$$T = 200,5\varrho^{-1,157827}.$$



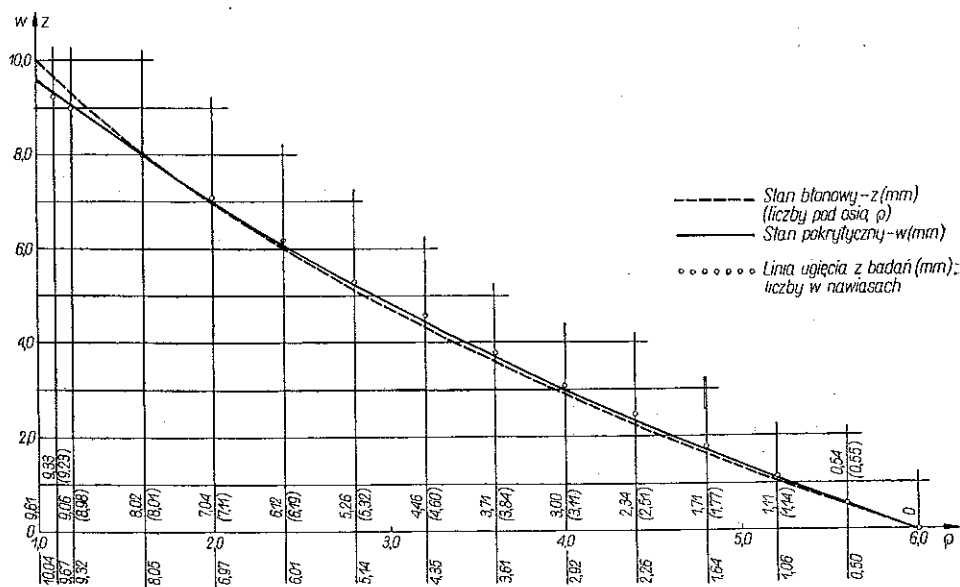


Pomiar ugięć pionowych został wykonany przy pomocy czujnika zegarowego o skoku 50 mm i dokładności 0,025 mm. Pomiaru ugięć dokonano w tych samych punktach pomiarowych, w których pomierzono temperaturę.

### 6. Przykład liczbowy

Jednym z głównych celów badań było określenie z doświadczenia pola temperatur, aby dla konkretnych parametrów tego pola rozwiązać przykład liczbowy w oparciu o wymiary badanej płyty. Zgodnie z uzasadnieniem podanym w części doświadczalnej pole temperatur aproksymowano funkcją

$$T = 205 \rho^{-1,20},$$

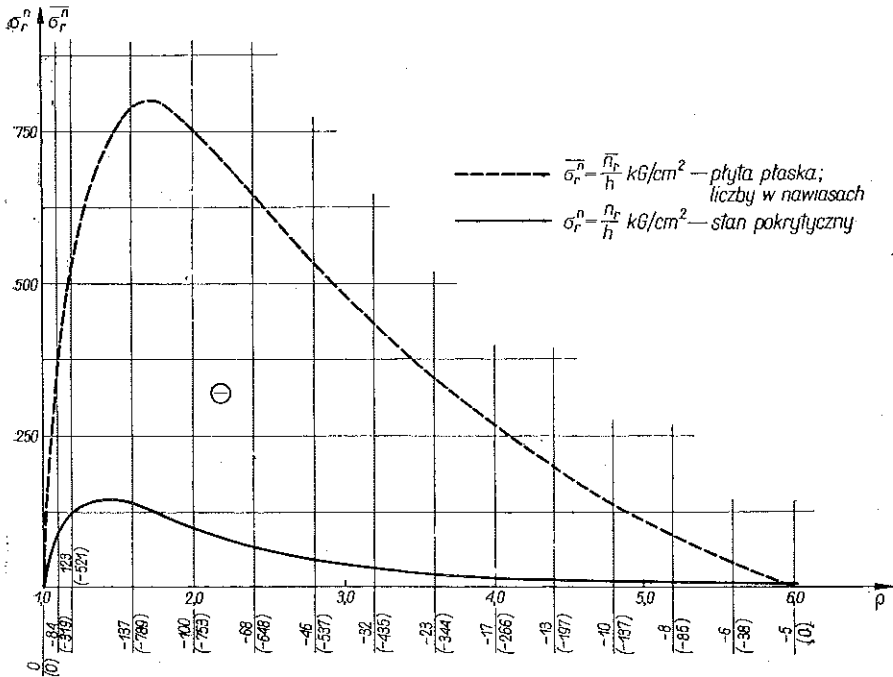


Rys. 6

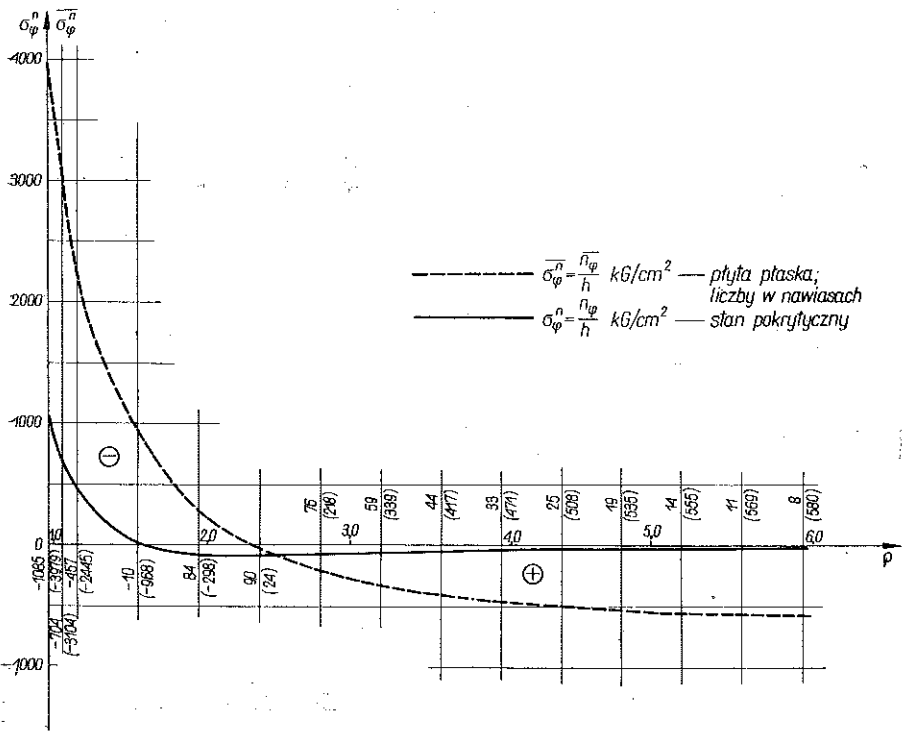
Do obliczeń przyjęto następujące dane: promień wewnętrzny płyty  $r = r_0 = 50,2$  mm, promień zewnętrzny płyty  $r = \beta r_0 = 298,8$  mm, grubość płyty  $h = 2,012$  mm, różnica temperatury na brzegu wewnętrznym  $T_0 = 205^\circ\text{C}$ , wykładnik potęgowy  $m = 1,20$ , stąd  $n = 0,4$  oraz wskaźnik funkcji Thomsona  $2/n = 5$ ; współczynnik rozszerzalności liniowej  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ , współczynnik Poissona  $\mu = 0,3$  oraz moduł sprężystości  $E = 2,1 \cdot 10^{-6}$  kg/cm<sup>2</sup>.

Dla tych danych wyliczono wartości funkcji Thomsona o wskaźniku  $2/n = 5$  i pozostałe wielkości potrzebne do rozwiązania układu równań (4.6) oraz dla określania składowych stanu naprężenia i całkowitych ugięć zgodnie ze wzorami (4.2), (4.3) i (4.4) [20].

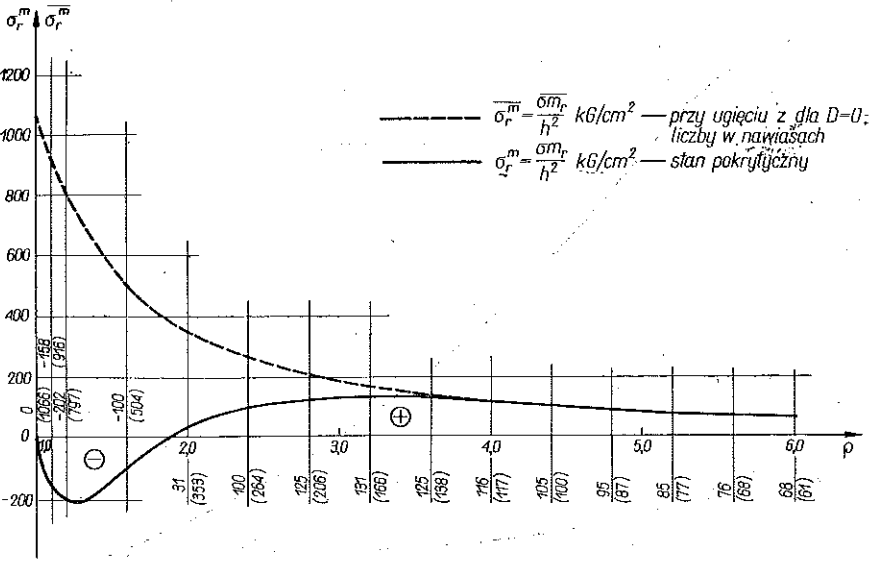
Na rys. 6 pokazano ugięcie całkowite (linia ciągła) oraz obliczeniowe ugięcie płyty przy pominięciu sztywności na zginanie (linia przerywana). Ponadto zaznaczono



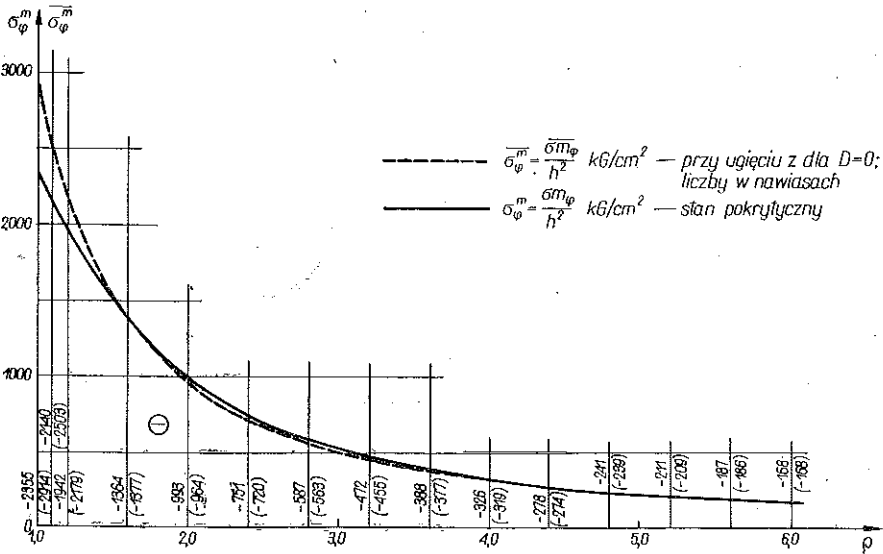
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

no kropkami ugięcie płyty pomierzone z doświadczeń. Różnica między linią ugięcia przy założeniu, że sztywność na zginanie ma wartość zero oraz przy skończonej sztywności jest mała. Zgodność obliczeniowej linii ugięcia ze zmierzoną doświadczalnie jest zadowalająca.

Na rys. 7 i 8 pokazano naprężenia od sił przekrojowych w porównaniu z odpowiednimi naprężeniami przy przyjęciu modelu teoretycznego, że płyta pozostaje płaska. Wykresy pokazują jak maleją naprężenia pochodzące od sił normalnych

wskutek wygięcia. Tak np. dla naprężeń normalnych pochodzących od promieniowych sił przekrojowych dla  $r = 1,598r_0$  zmniejszenie to wynosi: dla stanu przy teoretycznym założeniu, że płyta pozostaje płaska, mamy  $\overline{\sigma_r^n} = -789 \text{ kG/cm}^2$ , a dla stanu pokrytycznego  $\sigma_r^m = -137 \text{ kG/cm}^2$ . Na rys. 9 i 10 przedstawiono naprężenia od momentów zginających i porównano je z momentami wyliczonymi przy przyjęciu ugięcia płyty o zerowej sztywności na zginanie. Naprężenia te są wprawdzie mniejsze niż dla modelu teoretycznego lecz przekraczają naprężenia dopuszczalne dla zwykłej stali konstrukcyjnej. Tutaj porównanie odpowiednich wyników dla  $r = r_0$  daje: dla stanu przy teoretycznym założeniu ugięcia dla  $D = 0$   $\overline{\sigma_\varphi^m} = -2912 \text{ kG/cm}^2$ ; dla stanu pokrytycznego  $\sigma_\varphi^m = -2355 \text{ kG/cm}^2$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. NEWMAN, M. FORRAY, *Axisymmetric large deflections of circular plates subjected the thermal and mechanical loads*, J. Aero. Sci., 9, 29 (1962).
2. M. FORRAY, M. NEWMANN, *On the postbuckling behaviour of rectangular plates*, J. Aero. Sci., 6, 29 (1962).
3. M. FERRAY, M. NEWMANN, *The postbuckling analysis of heated rectangular plates*, J. Aero. Sci., 10, 29 (1962).
4. P. WILDE, *Finite displacements in thin plates due to steady-state temperature fields*, Arch. Mech. Stos., 2, 14 (1962).
5. P. WILDE, *Postbuckling behaviour of plates due to a temperature field*, Arch. Mech. Stos., 3, 15 (1963).
6. P. WILDE, *The thermal buckling of thin plate in the form of a minimal surface*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1964).
7. P. WILDE, *Finite displacements in thin plates due to steady-state temperatur fields*, Biuletyn P.S.N., Mech., 8, 10 (1962).
8. P. WILDE, *The invariant form of the Kármán equations*, Biuletyn PAN, Mechanika, 3, 11 (1963).
9. P. WILDE, *The application of the problem of finite deflection of thin plates to the analysis of the postbuckling behaviour of plates due to a temperature field*, Biuletyn PAN, Mechanika, 4, 11, (1963).
10. P. WILDE, *Pokrytyczne zachowanie cienkich płyt o brzegach swobodnych spowodowane stacjonarnym polem temperatur*. Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej Bud. Łąd. IX, 1963, nr 48.
11. A.S. WOLMIR, *Biegsame Platten und Schalen*, Berlin 1962.
12. A.E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
13. Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Гос. изд. физ. мфт. лит., Москва 1961.
14. Д. Ф. Коренев, *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в бесселовых функциях*, Физ. матгиз, Москва 1960.
15. N.W. MC. LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
16. Д. Р. Носова, *Таблицы функции Томсона и их первых производных*, Москва 1960.
17. G.N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, 1944.
18. M. WARMUS, *Tablice funkcji elementarnych*, PWN, Warszawa 1963.
19. S. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
20. C. MICKIEWICZ, *Osiowo-symetryczny stan pokrytycznego zachowania płyt pierścieniowych w stacjonarnym polu temperatur*; Praca doktorska, Politechnika Szczecińska, Szczecin 1965.

## Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЕ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ  
КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНОК СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ  
В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Работа имеет целью найти решение для послекритического состояния тонких кольцевых пластинок, со свободными краями, подверженных действию стационарного температурного поля аппроксимированного степенной функцией

$$T_r = T_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m}$$

Сформулированный, таким образом, вопрос появляется напр. тогда когда кольцевая пластинка подвергается равномерному нагреву на внутреннем краю, а на боковых поверхностях пластинки происходит теплообмен с окружающей средой. Обсуждается напряженное и деформированное состояния такой пластинки при термической потере устойчивости.

Задача решается приближенным способом. В первой стадии определяются искомые величины прогибов при предположении безмоментного состояния (нулевой жесткости на изгиб  $D = 0$ ), а затем влияние конечной жесткости пластинки усчитывается на основе нелинейных уравнений больших прогибов Кармана.

Полученные результаты проверялись экспериментально на моделях. Для конкретных параметров, полученных экспериментально, решается числовой пример. Согласованность результатов теоретических расчетов и экспериментальных исследований — удовлетворительна.

## S u m m a r y

POST-CRITICAL AXIALLY SYMMETRIC STATE OF AN ANNULAR PLATE  
WITH FREE EDGES IN A STATIONARY TEMPERATURE FIELD

The aim of this paper is to find a solution of the problem of post-critical state of a thin annular plate with free edges subject to the action of a stationary temperature field described in an approximate manner by the power function

$$T(r) = T_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m}$$

The problem thus formulated arises, for instance, if a ring plate is uniformly heated on the inner edge under conditions of heat exchange with the ambient medium over the lateral surfaces. The state of stress and strain under thermal buckling is considered for such a plate.

The problem is solved in an approximate manner.

In the first stage the deflections of the plate assuming a membrane state (zero rigidity for bending  $D = 0$ ) are determined. Next, the influence of the finite rigidity of the plate is taken into account on the basis of the nonlinear Kármán equations for large deflection.

The results of the paper have been verified experimentally by model tests. A numerical example is given for the values of the parameters obtained from the experiment. The agreement of theoretical and experimental results is found to be satisfactory.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1966r.