ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 15 (1967)

NIELINIOWE ZAGADNIENIA DEFORMACJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH I PEŁZANIA MEMBRAN KOŁOWYCH

ZBIGNIEW BYCHAWSKI, HENRYK KOPECKI (KRAKÓW)

1. Wstęp oraz podstawowe związki fizykalne

Zagadnienie dużych ugięć sprężysto-pełzających membran kołowych były przedmiotem rozważań jednego z autorów w pracy [1]. W pracy tej została podana efektywna metoda rozwiązania polegająca na przedstawieniu rozwiązania dla naprężeń w postaci podwójnego szeregu potęgowego, zawierającego «fizyczny» mały parametr. Rozwiązanie odnosi się do małego zaburzenia stanu równowagi sprężystej wywołanego procesem pełzania.

W niniejszej pracy zastosujemy tę samą metodę do problemu bardziej ogólnego. Przedmiotem rozważań będą duże ugięcia membrany kołowej wykonanej z materiału, dla którego spełniony jest następujący związek pomiędzy odkształceniami i naprężeniami:

$$\varepsilon_{ij} = L\,[s_{ij}], \tag{1.1}$$

gdzie L jest operatorem całkowym o postaci

$$L\,[s_{ij}] = \Phi_E(\sigma_e)\, s_{ij} + \int_0^t \Phi_C(\sigma_e)\, s_{ij}\, dt. \tag{1.2}$$

W powyższych wzorach Φ_E oznacza funkcję nieliniową dla stanu natychmiastowego, zależną od stanu naprężenia, Φ_E ciekłość, również zależną od stanu naprężenia, ε_{ij} składową tensora odkształceń, s_{ij} składowe dewiatora naprężeń oraz t czas.

Przyjmujemy, że nieliniowe funkcje Φ_E i Φ_C, charakteryzujące zachowanie się materiału, wyrażają się przez intensywność naprężenia

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}; \tag{1.3}$$

zależność ta ma postać funkcji potęgowych

$$\Phi_E = \frac{3}{2} A \sigma_e^{m-1}, \qquad \Phi_C = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1}, \tag{1.4}$$

gdzie A i B oznaczają stałe fizyczne materiału, a m i n liczby naturalne charakteryzujące stopień nieliniowości związków, przy czym $m, n > 1$.

Z przyjętego prawa fizykalnego (1.1) możemy wyprowadzić wnioski dotyczące przypadków szczególnych. Przypadki te związane są z wielkością rozpatrywanego przedziału czasu. Dla małych wartości czasu t drugi wyraz w równaniu (1.2) można pominąć, natomiast dla dużych przedziałów czasu zaniedbać można wyraz pierwszy. Pierwszy przypadek odpowiada stanowi natychmiastowemu, drugi zaś stanowi czystego pełzania.

W niniejszej pracy rozpatrzymy stadium pośrednie, w którym należy uwzględnić obydwa efekty opisane równaniem (1.2).

Zależność między składowymi dewiatora naprężeń i składowymi tensora naprężeń możemy przedstawić w postaci

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \tag{1.5}$$

gdzie δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera. Intensywność naprężenia wyrazimy w formie

$$\sigma_e^2 = C^2 \Omega, \tag{1.6}$$

gdzie C jest stałą, której znaczenie podane zostanie w p. 2.

Uwzględniając zależność (1.6) funkcje (1.4) możemy przedstawić w postaci

$$\Phi_E = \frac{3}{2} A\Omega^{\frac{1}{2}(m-1)} C^{m-1}, \quad \Phi_C = \frac{3}{2} B\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)} C^{n-1}. \tag{1.7}$$

Jeżeli równanie (1.1) zróżniczkujemy względem czasu, otrzymamy następujący związek (kropka oznacza pochodną względem czasu):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{L}[s_{ij}], \tag{1.8}$$

gdzie operator

$$\dot{L}[s_{ij}] = \frac{d}{dt}[\Phi_E(\sigma_e)\, s_{ij}] + \Phi_c(\sigma_e)\, s_{ij}. \tag{1.9}$$

2. Równania podstawowe

Rozpatrujemy kołową membranę jak w pracy [1], zamocowaną na brzegu $\varrho = 1$ ($\varrho = (r/R)^2$, R oznacza promień membrany) i obciążoną równomiernie stałym ciśnieniem o intensywności p.

Prędkości odkształceń w kierunkach promieniowym i obwodowym są odpowiednio równe

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{2}{R}\left(\sqrt{\varrho}\,\frac{d\dot{u}}{d\varrho} + \frac{2}{R}\varrho\frac{d\dot{w}}{d\varrho}\frac{dw}{d\varrho}\right), \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{R}\frac{\dot{u}}{\sqrt{\varrho}}, \tag{2.1}$$

gdzie u, w oznaczają odpowiednio przemieszczenie wzdłuż promienia oraz ugięcie.

Warunek nieściśliwości materiału wyrażamy przez składowe prędkości odkształceń:

$$\dot{\varepsilon}_z = -(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi). \tag{2.2}$$

Równania równowagi dla elementu membrany w stanie odkształconym sprowadzamy do następującego układu:

$$2\sqrt{\varrho}\,\frac{d}{d\varrho}(\sqrt{\varrho}\,\sigma_r)-\sigma_\varphi=0,\qquad \sigma_r\frac{d\bar{w}}{d\varrho}=-C, \tag{2.3}$$

gdzie h jest grubością membrany, a

$$\bar{w}=\frac{w}{h},\qquad C=\frac{p}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^2. \tag{2.4}$$

Do równań równowagi oraz do związków fizykalnych wprowadzamy bezwymiarową funkcję naprężeń o postaci

$$z=\frac{\varrho\sigma_r}{C}, \tag{2.5}$$

co pozwala wyrazić naprężenia w formie

$$\sigma_r=\frac{C}{\varrho}z,\qquad \sigma_\varphi=\frac{C}{\varrho}(2z'\varrho-z), \tag{2.6}$$

gdzie $z'=dz/d\varrho$, a równanie równowagi $(2.3)_2$ oraz występującą w zależności (1.6) funkcję Ω doprowadzamy do postaci

$$\frac{d\bar{w}}{d\varrho}=-\frac{\varrho}{z},\qquad \Omega=3\left(\frac{z}{\varrho}\right)^2-\sigma\frac{zz'}{\varrho}+4z'^2. \tag{2.7}$$

Zgodnie z zależnością (1.5) mamy

$$\begin{aligned} s_r&=\frac{1}{3}(2\sigma_r-\sigma_\varphi)=\frac{C}{3\varrho}(3z-2\varrho z'),\\ s_\varphi&=\frac{1}{3}(2\sigma_\varphi-\sigma_r)=\frac{C}{3\varrho}(4\varrho z'-3z). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Z równań $(2.1)_1$ i $(2.1)_2$ otrzymujemy warunek nierozdzielności odkształceń

$$2\varrho\frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{d\varrho}+(\dot{\varepsilon}_\varphi-\dot{\varepsilon}_r)=-\frac{p}{C}\varrho\frac{d\dot{\bar{w}}}{d\varrho}\frac{d\bar{w}}{d\varrho}, \tag{2.9}$$

który po podstawieniu zależności (2.7) i (2.8) przyjmuje ostatecznie postać

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{d\varrho}\dot{L}\left[\frac{C}{3\varrho}(4z'\varrho-3z)\right]+\frac{1}{\varrho}\Big\{\dot{L}\left[\frac{C}{3\varrho}(4z'-3z)\right]-&\\ -\dot{L}\left[\frac{C}{3\varrho}(3z-2\varrho z')\right]\Big\}&=\frac{p}{C}\,\frac{\dot{z}}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{z}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Równanie (2.10) wraz z równaniem równowagi $(2.7)_1$ oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi formułuje problem nieliniowo-sprężystej i pełzającej membrany kołowej, rozpatrywanej w zakresie geometrycznej nieliniowości.

3. Warunki brzegowe i początkowe

Dla rozpatrywanej membrany przyjmujemy następujące warunki brzegowe (spełnione dla dowolnego czasu t):

1. Przemieszczenia oraz prędkości przemieszczeń na brzegu membrany są równe zeru, czyli

$$(3.1)\qquad [u(\varrho)]_{\varrho=1} = 0, \quad [\dot{u}(\varrho)]_{\varrho=1} = 0 \quad \text{lub} \quad \left[\dot{L}\left[\frac{C}{3\varrho}(4z'\varrho - 3z)\right]\right]_{\varrho=1} = 0.$$

2. Ugięcie na brzegu membrany

$$(3.2)\qquad [\overline{w}(\varrho)]_{\varrho=1} = 0.$$

3. W środku membrany ($\varrho = 0$) naprężenia są sobie równe.

Przyjmujemy, że stan początkowy dla procesu pełzania jest stanem natychmiastowym, który w danym problemie może być traktowany jako 1) stan nieliniowo-sprężysty, 2) stan sprężysto-plastyczny (nie rozpatruje się odciążenia) lub 3) jako stan przejściowego pełzania. Dla dowolnego ϱ mamy więc

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &[\sigma_r]_{t=0} = \sigma_{r_0} \quad \text{lub} \quad [z(t)]_{t=0} = z_0,\\ &[\sigma_\varphi]_{t=0} = \sigma_{\varphi_0} \quad \text{lub} \quad [2\varrho z' - z]_{t=0} = 2\varrho z_0' - z_0,\\ &[\overline{w}(t)]_{t=0} = \overline{w}_0. \end{aligned}$$

Stan natychmiastowy określa następujący układ równań:

$$(3.4)\qquad \begin{gathered} \frac{d\overline{w}_0}{d\varrho} = -\frac{\varrho}{z_0},\\ 2\frac{d}{d\varrho}L_0\left[\frac{C}{3\varrho}(4z_0'\varrho - 3z_0)\right] + \frac{1}{\varrho}\left\{L_0\left[\frac{C}{3\varrho}(4z_0'\varrho - 3z_0)\right] - \right.\\ \left. - L_0\left[\frac{C}{3\varrho}(3z_0 - 2z_0'\varrho)\right]\right\} = -\frac{p}{2C}\left(\frac{\varrho}{z_0}\right)^2, \end{gathered}$$

gdzie operator

$$(3.5)\qquad L_0 = [L]_{t=0}.$$

4. Metoda rozwiązania oraz pierwsze rozwinięcie równania podstawowego

Podobnie jak w pracy [1] rozwiązanie równania (2.10) przedstawiamy w postaci podwójnego szeregu potęgowego

$$(4.1)\qquad z = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z_{ik}(t)\,\alpha^k \varrho^{i+1},$$

gdzie α jest małym parametrem szeregu o postaci

$$(4.2)\qquad \alpha = \frac{B}{A}C^{n-m}.$$

Gdy $\alpha = 0$, szereg powyższy przedstawia rozwiązanie dla stanu natychmiastowego

$$z_0 = \sum_{i=0}^{\infty} z_{i0}\, \varrho^{i+1}. \tag{4.3}$$

Przedstawiając w formie rozwiniętej operatory występujące w równaniu (2.10) otrzymujemy po przekształceniach

$$\begin{aligned} 8\,\{2\Omega^{\frac{1}{2}(m-1)}\,\dot{z}''\varrho + [(m-1)\,\Omega^{\frac{1}{2}(m-3)}\,\dot{\Omega} + 2\alpha\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)}]\,z''\varrho\} + \\ + 2\,(m-1)\,\Omega^{\frac{1}{2}(m-3)}\,\Omega'\,(4\dot{z}'\varrho - 3\dot{z}) + \{(m-1)\,\Omega^{\frac{1}{2}(m-5)}\,[(m-3)\,\dot{\Omega}\Omega' + \\ + 2\Omega\dot{\Omega}'] + 2\alpha\,(n-1)\,\Omega^{\frac{1}{2}(n-3)}\,\Omega'\}\,(4z'\varrho - 3z) = 4\gamma\dot{z}\left(\frac{\varrho}{z}\right)^3, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie $\gamma = p/AC^{m+1}$.

Aby uniknąć podnoszenia do potęgi podwójnego szeregu potęgowego, przedstawimy początkowo rozwiązanie równania (4.4) w postaci pojedynczego szeregu potęgowego

$$z = \sum_{v=0}^{\infty} z_v\, \varrho^{v+1}, \tag{4.5}$$

gdzie

$$z_v = \sum_{q=0}^{\infty} z_{vq}(t)\, \alpha^q. \tag{4.6}$$

Podstawiając szereg (4.5) do równania (4.4) otrzymujemy następujący warunek, który musi być spełniony dla dowolnego ϱ:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} \{8\,[2a_v + (m-1)\,b_v + 2\alpha c_v] + 2\,(m-1)\,d_v + (m-1)\,(m-3)\,e_v + \\ + 2\,(m-1) f_v + 2\alpha\,(n-1)\,g_v - 4\gamma h_v \varrho\}\,\varrho^v = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Z powyższego warunku znajdziemy następujące wzory na współczynniki:

$$a_k = \sum_{v=0}^{k} v\,(v+1)\,\dot{z}_v \Omega_{k-v}^{1m}, \qquad \Omega_0^{1m} = z_0^{m-1},$$

$$\Omega_k^{1m} = \frac{1}{2kz_0^2} \sum_{v=1}^{k} [v\,(m+1) - 2k]\,\Omega_v \Omega_{k-v}^{1m},$$

$$\Omega_k = 3a_k^1 - 6a_k^2 + 4a_k^3, \quad a_k^1 = \sum_{v=0}^{k} z_v z_{k-v}, \quad a_k^2 = \sum_{v=0}^{k} (v+1)\, z_v z_{k-v},$$

$$a_k^3 = \sum_{v=1}^{k} (v+1)\,(k-v+1)\, z_v z_{k-v}, \qquad b_k = \sum_{v=0}^{k} v\,(v+1)\, z_v \Omega_{k-v}^{*},$$

$$\Omega_k^{*} = \sum_{v=0}^{k} \Omega_v^{3m} \dot{\Omega}_{k-v}, \qquad \Omega_0^{3m} = z_0^{m-3}, \qquad \Omega_k^{3m} = \frac{1}{2kz_0^2} \sum_{v=1}^{k} [v\,(m-1) - 2k]\,\Omega_v \Omega_{k-v}^{3m},$$

$$\dot{\Omega}_k = 3\dot{a}_k^1 - 6\dot{a}_k^2 + 4\dot{a}_k^3, \quad c_k = \sum_{v=0}^{k} v(v+1) z_v \Omega_{k-v}^{1n}, \quad \Omega_0^{1n} = z_0^{n-1},$$

$$\Omega_k^{1n} = \frac{1}{2kz_0^2}\sum_{v=1}^{k}[v(n+1) - 2k]\,\Omega_v \Omega_{k-v}^{1n}, \quad d_k = \sum_{v=1}^{k}(4v+1)\,\dot{z}_v \Omega_{k-v}^{**},$$

$$\Omega_k^{**} = \sum_{v=0}^{k}\Omega_v^{3m}\Omega_{k-v}', \quad \Omega_k' = k\Omega_k, \quad e_k = \sum_{v=0}^{k}(4v+1)\,z_v \overline{\Omega}_{k-v},$$

$$\overline{\Omega}_k = \sum_{v=0}^{k}\overline{\Omega}_v^* \Omega_{k-v}^{5m}, \quad \overline{\Omega}_k^* = \sum_{v=0}^{k}\dot{\Omega}\Omega_{k-v}', \quad \Omega_0^{5m} = z_0^{m-5},$$

$$\Omega_k^{5m} = \frac{1}{2kz_0^2}\sum_{v=1}^{k}[v(m-3) - 2k]\,\Omega_v \Omega_{k-v}^{5m}, \quad f_k = \sum_{v=0}^{k}(4v+1)\,z_v \overline{\overline{\Omega}}_{k-v},$$

$$\overline{\overline{\Omega}}_k = \sum_{v=0}^{k}\overline{\overline{\Omega}}_v^* \Omega_{k-v}^{5m}, \quad \overline{\overline{\Omega}}_k^* = \sum_{v=0}^{k}\dot{\Omega}_v' \Omega_{k-v}, \quad \dot{\Omega}_k' = k\dot{\Omega},$$

$$g_k = \sum_{v=0}^{k}(4v+1)\,z_v \overline{\Omega}_{k-v}^{**}, \quad \overline{\Omega}_k^{**} = \sum_{v=0}^{k}\Omega_v' \Omega_{k-v}^{3n},$$

$$\Omega_0^{3n} = z_0^{n-3}, \quad \Omega_k^{3n} = \frac{1}{2kz_0^2}\sum_{v=1}^{k}[v(n-1) - 2k]\,\Omega_v \Omega_{k-v}^{3n},$$

$$h_k = \frac{1}{h_0^0}h_k^1, \quad h_k^1 = \sum_{v=0}^{k}\dot{z}_v h_{k-v}^2, \quad h_0^0 = z_0^3, \quad h_k^0 = \frac{1}{kz_0}\sum_{v-1}^{k}(4v - k)\,z_v h_{k-v}^0, \tag{4.8}$$

$$h_0^2 = 1, \quad h_k^2 + \frac{1}{h_0^0}\sum_{v=1}^{k}h_v^0 h_{k-v}^2 = 0.$$

Warunek (4.7) przedstawia rekurencyjny układ liniowych równań różniczkowych zawierający nieznane współczynniki $z_k(t)$, z którego po rozwinięciu za pomocą wzorów (4.8) otrzymujemy kolejno

$$\dot{z}_1 + \left(k_0\frac{\dot{z}_0}{z_0} + k_1 a z_0^{n-m}\right)z_1 = 8k_2\gamma\frac{\dot{z}_0}{z_0^{m+2}},$$

$$\dot{z}_2 + \left(k_0\frac{\dot{z}_0}{z_0} + k_1 a z_0^{n-m}\right)z_2 = 8k_2\gamma\left(\frac{1}{3}\frac{\dot{z}_1}{z_0^{m+2}} - \frac{z_1\dot{z}_0}{z_0^{m+3}}\right) - k_3\frac{\dot{z}_1 z_1}{z_0} -$$

$$- k_4\frac{\dot{z}_0 z_1^2}{z_0^2} - k_5 a z_1^2 z_0^{n-m-1}, \tag{4.9}$$

$$\dot{z}_3 + \left(k_0\frac{\dot{z}_0}{z_0} + k_1 a z_0^{n-m}\right)z_3 = \gamma k_2\left[\frac{4}{3}\frac{\dot{z}_2}{z_0^{m+2}} - 4\left(\frac{\dot{z}_1 z_1}{z_0^{m+3}} + \frac{\dot{z}_0 z_2}{z_0^{m+3}}\right) + \right.$$

$$\left. + 8\frac{\dot{z}_0 z_1^2}{z_0^{m+4}}\right] - k_6\frac{\dot{z}_1 z_1^2}{z_0^2} - k_7\frac{\dot{z}_1 z_2}{z_0} - k_8\frac{\dot{z}_2 z_1}{z_0} - k_9\frac{\dot{z}_0 z_1 z_2}{z_0^2} - k_{10}\frac{z_1^3\dot{z}_0}{z_0^3} -$$

$$- a(k_{11} z_1^3 z_0^{n-m-2} + k_{12} z_1 z_2 z_0^{n-m-1}),$$

. . . .

W powyższych równaniach przyjęto następujące oznaczenia:

$$
(4.10)\quad
\begin{aligned}
&k_0 = m-1, \quad k_1 = \frac{n+3}{m+3}, \quad k_2 = \frac{1}{16(m+3)}, \quad k_3 = \frac{(4m+21)(m-1)}{3(m+3)};\\
&k_4 = \frac{(m-1)(4m^2-6m-1)}{6(m+3)}, \quad k_5 = \frac{(n-1)(4n+21)}{6(m+3)},\\
&k_6 = \frac{(m-1)(4m^2+20m-33)}{4(m+3)}, \quad k_7 = \frac{(m-1)(3m+17)}{2(m+3)},\\
&k_8 = \frac{(m-1)(3m+13)}{2(m+3)}, \quad k_9 = \frac{(m-1)(3m^2-m+2)}{2(m+3)},\\
&k_{10} = \frac{(m-1)(4m^3+17m^2-80m+123)}{3(m+3)},\\
&k_{11} = \frac{(n-1)(4n^2+25n-20)}{12(m+3)}, \quad k_{12} = \frac{3(n-1)(n+6)}{2(m+3)},
\end{aligned}
$$

5. Pierwsze i drugie rozwinięcie warunków brzegowych

Dokonamy obecnie rozwinięcia warunku brzegowego (3.1). W tym celu rozwijamy operator L występujący w warunku (3.1), a następnie podstawiamy do niego szereg (4.5). W ten sposób otrzymujemy najpierw

$$
(5.1)\quad 2\Omega^{\frac{1}{2}(m-1)}\left(4\dot{z}'-3\frac{z}{\varrho}\right)+\left[(m-1)\Omega^{\frac{1}{2}(m-3)}\dot{\Omega}+2\alpha\Omega^{\frac{1}{2}(n-1)}\right]\left(4z'-3\frac{z}{\varrho}\right)\Big|_{\varrho=1}=0,
$$

a następnie

$$
(5.2)\quad \sum_{v=0}^{\infty} 2\eta_v^0+(m-1)\eta_v^1+2\alpha\eta_v^2=0,
$$

gdzie

$$
(5.3)\quad
\begin{aligned}
&\eta_k^0=\sum_{v=0}^{k}(4v+1)\dot{z}_v\Omega_{k-v}^{1m}, \qquad \eta_k^1=\sum_{v=0}^{k}(4v+1)z_v\Omega_{k-v}^{0},\\
&\Omega_k^0=\sum_{v=0}^{k}\Omega_v^{3m}\dot{\Omega}_{k-v}, \qquad \eta_k^2=\sum_{v=0}^{k}(2v+1)z_v\Omega_{k-v}^{1n}.
\end{aligned}
$$

Warunek (5.2) przedstawia równanie różniczkowe, które po rozwinięciu przyjmuje postać (uwzględniono 3 wyrazy rozwinięcia)

$$
\begin{aligned}
(5.4)\quad & 2[(\dot{z}_0+5\dot{z}_1+9\dot{z}_2+\dots)z_0^{m-1}+(z_0+5z_1+9z_2+\dots)\alpha z_0^{n-1}]+\\
&+k_0[k_0^1z_1^2\dot{z}_0z_0^{m-3}+k_0^2z_2\dot{z}_0z_0^{m-2}+k_0^3\dot{z}_1z_0^{m-2}+2(\dot{z}_0+2\dot{z}_1+3\dot{z}_2)z_0^{m-1}+\\
&+k_0^4\dot{z}_0z_1z_0^{m-2}+\dots]+\alpha(n-1)[(4z_1+6z_2)z_0^{n-1}+k_0^5z_1^2z_0^{n-2}+\dots]=0,
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$
(5.5)\quad
\begin{aligned}
&k_0^1=4m^2+7m-30, \quad k_0^2=6(m+2), \quad k_0^3=(4m+15),\\
&k_0^4=2(2m+3), \quad k_0^5=4n+15.
\end{aligned}
$$

Drugie rozwinięcie warunku brzegowego (3.1) polega na podstawieniu do równania (5.4) szeregu potęgowego (4.6). Aby tego dokonać określimy następujące wyrażenia:

$$
\begin{gathered}
z_v^{\bar{m}} = \left(\sum_{q=0}^{\infty} z_{vq}\alpha^q\right)^{\bar{m}} = \sum_{q=0}^{\infty} g_{vq}^0(\bar{m})\,\alpha^q, \\
g_{v0}^0 = z_{00}^{\bar{m}}, \quad g_{vk}^0 = \frac{1}{kz_{v0}}\sum_{q=1}^{k}\left[q(\bar{m}+1)-k\right] z_{vq}\, g_{v,k-q}^0,
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

gdzie $\bar{m}$ jest liczbą naturalną.

Po uwzględnieniu zależności (5.6) warunek brzegowy (5.2) możemy przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
2\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^q\left[(g_q^1+5g_q^2+9g_q^3+\ldots)+\alpha(g_q^4+5g_q^5+9g_q^6+\ldots)\right]+ \\
+k_0\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^q\left[2g_q^1+4g_q^2+6g_q^3+k_0^1 g_q^7+k_0^2 g_q^8+2k_0^3 g_q^9+k_0^4 g_q^{10}\right]+ \\
+(n-1)\sum_{q=0}^{\infty}\alpha^{q+1}\left[4g_q^5+6g_q^6+k_0^5 g_q^{11}+\ldots\right]=0,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
g_k^1 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-1)\,\dot{z}_{0,k-q}, & g_k^2 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-1)\,\dot{z}_{1,k-q}, \\
g_k^3 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-1)\,\dot{z}_{2,k-q}, & g_k^4 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n-1)\,z_{0,k-q}, \\
g_k^5 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n-1)\,z_{1,k-q}, & g_k^6 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n-1)\,z_{2,k-q}, \\
g_k^7 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-3)\,\bar{z}_{2,k-q}, & \bar{z}_{2k} &= \sum_{q=0}^{k} g_{1q}^0(2)\,\dot{z}_{0,k-q}, \\
g_k^8 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-2)\,\bar{z}_{3,k-q}, & \bar{z}_{3k} &= \sum_{q=0}^{k} z_{0q}\,z_{2,k-q}, \\
g_q^9 &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-2)\,\bar{z}_{1,k-q}, & g_k^{10} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m-2)\,\bar{z}_{0,k-q}, \\
\bar{z}_{1k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{1q}\,z_{1,k-q}, & z_{0k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{0q}\,z_{1,k-q}, \\
g_k^{11} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n-2)\,\bar{z}_{4,k-q}, & \bar{z}_{4k} &= \sum_{q=0}^{k} z_{1q}\,z_{1,k-q}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Jeżeli w równaniu (5.7) przyjmiemy $\alpha = 0$ otrzymujemy warunek brzegowy dla stanu natychmiastowego.

6. Drugie rozwinięcie równań podstawowych

Określimy rozwiązanie rekurencyjnego układu równań (4.9) podstawiając do niego szereg potęgowy (4.6). Otrzymujemy kolejno

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=0}^{\infty} (\eta_q^0+k_0\eta_q^1+k_1\alpha\eta_q^2-8k_2\gamma\eta_q^3)\,\alpha^q=0,\\
&\sum_{q=0}^{\infty} (\eta_q^4+k_0\eta_q^5+k_1\alpha\eta_q^6-\frac{8}{3}k_2\gamma\eta_q^7+8k_2\gamma\eta_q^8+k_3\eta_q^9+\\
&\qquad\qquad +k_4\eta_q^{10}+k_5\alpha\eta_q^{11})\,\alpha^q=0,\\
&\sum_{q=0}^{\infty} [\eta_q^{12}+k_0\eta_q^{13}+k_1\alpha\eta_q^{14}-\frac{4}{3}\gamma k_2\eta_q^{15}+4\gamma k_2\eta_q^{16}+4\gamma k_2\eta_q^{17}-\\
&-8\gamma k_2\eta_q^{18}+k_6\eta_q^{19}+k_7\eta_q^{20}+k_8\eta_q^{21}+k_9\eta_q^{22}+k_{10}\eta_q^{23}+\alpha(k_{11}\eta_q^{24}+k_{12}\eta_q^{25})]\,\alpha^q=0.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

W powyższych wzorach przyjęliśmy następujące oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
&\eta_k^0=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+2)\,\dot z_{1,k-q}, && \eta_k^1=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+1)\,\dot{\bar z}_{0,k-q},\\
&\dot{\bar z}_{0k}=\sum_{q=0}^{k} \dot z_{0q}\,z_{1,k-q}, && \eta_k^2=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n+2)\,z_{1,k-q},\\
&\eta_k^3=\dot z_{0q}, && \eta_k^4=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+3)\,\dot z_{2,k-q},\\
&\eta_k^5=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+2)\,\dot{\bar z}_{1,k-q}, && \dot{\bar z}_{1k}=\sum_{q=0}^{k} \dot z_{0q}\,z_{2,k-q},\\
&\eta_k^6=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n+3)\,z_{2,k-q}, && \eta_k^7=\sum_{q=0}^{k} z_{0q}\,\dot z_{1,k-q},\\
&\eta_k^8=\sum_{q=0}^{k} \dot z_{0q}\,z_{1,k-q}, && \eta_k^9=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+2)\,\dot{\bar z}_{2,k-q},\\
&\dot{\bar z}_{2k}=\sum_{q=0}^{k} \dot z_{1q}\,z_{1,k-q}, && \eta_k^{10}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+1)\,\dot{\bar z}_{3,k-q},\\
&\dot{\bar z}_{3k}=\sum_{q-0}^{k} g_{1q}^0(2)\,\dot z_{0,k-q}, && \eta_k^{11}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n+2)\,g_{1,k-q}^0(2),\\
&\eta_k^{12}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+4)\,\dot z_{3,k-q}, && \eta_k^{13}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(m+3)\,\dot{\bar z}_{4,k-q},\\
&\dot{\bar z}_{4k}=\sum_{q=0}^{k} \dot z_{0q}\,z_{3,k-q}, && \eta_k^{14}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(n+4)\,z_{3,k-q},\\
&\eta_k^{15}=\sum_{q=0}^{k} g_{0q}^0(2)\,\dot z_{2,k-q}, && \eta_k^{16}=\sum_{q=0}^{k} z_{1q}\,\dot{\bar z}_{5,k-q},
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{z}}_{5k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{1q} z_{0,k-q}, & \eta_k^{17} &= \sum_{q=0}^{k} z_{2q} \dot{\bar{z}}_{6,k-q}, \\
\dot{\bar{z}}_{6k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{0q} z_{0,k-q}, & \eta_k^{18} &= \sum_{q=0}^{k} g_{1q}^{0}(2)\, \dot{z}_{0,k-q}, \\
\eta_k^{19} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^{0}(m+2)\, \dot{\bar{z}}_{7,k-q}, & \dot{\bar{z}}_{7k} &= \sum_{q=0}^{k} g_{1q}^{0}(2)\, \dot{z}_{1,k-q}, \\
\eta_k^{20} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^{0}(m+3)\, \dot{\bar{z}}_{8,k-q}, & \dot{\bar{z}}_{8k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{1q} z_{2,k-q}, \\
\eta_k^{21} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^{0}(m+3)\, \dot{\bar{z}}_{9,k-q}, & \dot{\bar{z}}_{9k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{2k} z_{1,k-q}, \qquad \text{(6.2) [c. d.]} \\
\eta_k^{22} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^{0}(m+2)\, \dot{\bar{z}}_{10,k-q}, & \dot{\bar{z}}_{10,k} &= \sum_{q=0}^{k} \dot{z}_{0q} \bar{z}_{11,k-q}, \\
\bar{z}_{11k} &= \sum_{q=0}^{k} z_{1q} z_{2,k-q}, & \eta_k^{23} &= \sum_{q=0}^{k} g_{0q}^{0}(m+1)\, \dot{\bar{z}}_{12,k-q}, \\
\dot{\bar{z}}_{12,k} &= \sum_{q=0}^{k} g_{1q}^{0}(3)\, \dot{z}_{0,k-q}, & \eta_k^{24} &= \sum_{q=0}^{k} g_{1q}^{0}(3)\, g_{0,k-q}^{0}(n+2), \\
\eta_k^{25} &= \sum_{q=0}^{k} g_{ok}^{2}(n+3)\, \bar{z}_{13,k-q}, & \bar{z}_{13k} &= \sum_{q=0}^{k} z_{1q} z_{2,k-q}.
\end{aligned}
$$

W celu określenia wpływu pełzania na rozwiązanie powrócimy do układu równań (6.1). Z pierwszego układu równań (6.1) otrzymujemy kolejno

$$
z_{11} = \left(8k_2\gamma \frac{1}{D_0^{m+2}} - k_0 \frac{D_1}{D_0}\right) z_{01} - k_1 D_1 D_0^{n-m}\, t,
$$

$$
\begin{aligned}
z_{12} = 8k_2\gamma \frac{1}{D_0^{m+2}} z_{02} &- k_1 D_0^{n-m} \left\{ \int_0^t \left[z_{11} + (n+2) \frac{D_1}{D_0} z_{01} \right] dt \right\} - \frac{k_0}{D_0} \left\{ D_1 z_{02} + \right. \\
&\left. + \int_0^t \left[z_{11} \dot{z}_{01} + (m+1) \frac{D_1}{D_0} z_{01} \dot{z}_{01} \right] dt \right\} - (m+2) \int_0^t \frac{z_{01} \dot{z}_{11}}{D_0} dt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{13} = 8k_2\gamma \frac{1}{D_0^{m+2}} z_{03} &- \frac{m+2}{D_0} \int_0^t z_{01} \dot{z}_{12}\, dt - \frac{m+2}{2} \left[(m+1) \frac{1}{D_0^2} \int_0^t z_{01}^2 \dot{z}_{11}\, dt + \right. \\
&\left. + \frac{1}{D_0} \int_0^t z_{02} \dot{z}_{11}\, dt \right] - k_0 \left\{ \frac{1}{D_0} \left[\int_0^t \dot{z}_{01} z_{12}\, dt + \int_0^t \dot{z}_{02} z_{11}\, dt + D_1 z_{03} \right] + \right. \\
&+ \frac{m+1}{D_0^2} \left[\int_2^t z_{01} z_{11} \dot{z}_{01}\, dt + D_1 \int_0^t z_{01} \dot{z}_{02}\, dt + \frac{m D_1}{2 D_0} \int_0^t z_{01}^2 z_{01}\, dt + \right.
\end{aligned}
$$

$$+D_1\int_0^t z_{02}\dot{z}_{01}\,dt\Big]\Big\}-k_1\Big\{D_0^{n-m}\int_0^t z_{12}\,dt+(n+2)\,D_0^{n-m-1}\int_0^t z_{01}z_{11}\,dt+$$
$$+\frac{n+1}{2}D_0^{n-m-2}D_1\Big[\int_0^t z_{01}^2\,dt+D_0\int_0^t z_{02}\,dt\Big]\Big\},$$

gdzie

$$D_0=z_{00},\quad D_1=z_{10},\quad D_2=z_{20},\quad \ldots. \tag{6.3}$$

Z drugiego układu równań (6.1) mamy

$$\begin{aligned} z_{21}=&\left(\frac{8}{3}k_2\gamma\frac{1}{D_0^{m+2}}-k_3\frac{D_1}{D_0}\right)z_{11}-\left(k_0\frac{D_2}{D_0}+k_4\frac{D_1^2}{D_0^2}+8\gamma k_2\frac{D_1}{D_0^{m+3}}\right)z_{01}-\\ &-D_0^{n-m}\left(k_1D_2+k_5\frac{D_1^2}{D_0}\right)t,\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} z_{22}=&\frac{8}{3}k_2\gamma\frac{1}{D_0^{m+2}}\left(z_{12}+\frac{1}{D_0}\int_0^t z_{01}\dot{z}_{11}\,dt\right)-(m+3)\frac{1}{D_0}\int_0^t z_{01}\dot{z}_{21}\,dt-\\ &-k_0\left\{\frac{1}{D_0}\Big[\int_0^t \dot{z}_{01}z_{21}\,dt+D_2z_{02}+\frac{D_2}{D_0}(m+2)\int_0^t z_{01}\dot{z}_{01}\,dt\Big]\right\}-\\ &-k_1D_0^{n-m}\Big[\int_0^t z_{21}\,dt+(n+3)\frac{D_2}{D_0}\int_0^t z_{01}\,dt\Big]-8k_2\gamma\frac{1}{D_0^{m+3}}\Big[\int_0^t \dot{z}_{01}z_{11}\,dt+\\ &+D_1z_{02}\Big]-k_3\frac{1}{D_0}\Big[\int_0^t \dot{z}_{11}z_{11}\,dt+D_1z_{12}+(m+2)\frac{D_1}{D_0}\int_0^t z_{01}\dot{z}_{11}\,dt\Big]-\\ &-k_4\frac{1}{D_0^2}\Big[D_1^2z_{02}+2D_1\int_0^t z_{11}\dot{z}_{01}\,dt+(m+1)\frac{D_1^2}{D_0}\int_0^t z_{01}\dot{z}_{01}\,dt\Big]-\\ &-k_5\left\{D_1D_0^{n-m-1}\Big[\int_0^t z_{11}\,dt+(n+2)\frac{D_1}{D_0}\int_0^t z_{01}\,dt\Big]\right\}.\end{aligned}$$

Trzecie z równań (6.1) dostarcza nam zależności

$$\begin{aligned} z_{31}=&\left(\frac{4}{3}\gamma k_2\frac{1}{D_0^{m+2}}-k_8\frac{D_1}{D_0}\right)z_{21}-\left(4\gamma k_2\frac{D_2}{D_0^{m+3}}-8\gamma k_2\frac{D_1^2}{D_0^{m+4}}+\right.\\ &\left.+k_0\frac{D_3}{D_0}+k_9\frac{D_1D_2}{D_0^2}-k_{10}\frac{D_1^3}{D_0^3}\right)z_{01}-\left(4k_2\gamma\frac{D_1}{D_0^{m+3}}+k_6\frac{D_1^2}{D_0^2}+k_7\frac{D_2}{D_0}\right)z_{11}-\\ &-[k_1D_3D_0^{n-m}+k_{11}D_1^3D_0^{n-m-2}+k_{12}D_1D_2D_0^{n-m-1}]\,t.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Występujące w powyższych współczynnikach funkcje czasu z_{0q} określamy z warunku brzegowego (5.8). Funkcje te możemy wyznaczyć z dowolną dokładnością w zależności od przyjętej ilości wyrazów rozwinięcia warunku (5.8). Uwzględniając dwa wyrazy rozwinięcia otrzymujemy kolejno:

$$z_{01} = \bar{A}t, \quad z_{02} = \int\limits_0^t \bar{B}(t)\,dt,$$

gdzie

$$\bar{A} = \frac{k_1 k_0^4 D_1 D_0^{m+n+1} - 2D_0^n - (4n+1) D_0^{n-1}}{2mD_0^{m-1} + 8k_2 k_0^4 \gamma D_0^{-3}},$$

(6.6)

$$\bar{B} = \left\{ \left[k_0^4 \left(8k_2 \gamma \frac{1}{D_0^{m+2}} - k_0 \frac{D_1}{D_0} \right) + (2+2k_0+k_0 k_0^4 \frac{D_1}{D_0}) \right] D_0^{m-1} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \left\{ -k_0 \left[2m + (m-2) k_0^4 \frac{D_1}{D_0} \right] D_0^{m-2} + k_0^4 k_0 (m+1) D_0^{m-3} D_1 \right\} z_{01} \dot{z}_{01} + \right.$$

$$+ \{ -2k_0 (2m+3) D_0^{m-2} + k_0^4 k_0 (m+2) D_0^{m-2} \} \dot{z}_{11} z_{01} +$$

$$+ \left\{ k_1 k_0^4 (n+2) D_1 D_0^{n-2} - \left[2n + (n-1)(4n+1) \frac{D_1}{D_0} \right] D_0^{n-1} \right\} z_{01} +$$

$$\left. + \{ [k_1 k_0^4 - (4n+1)] D_0^{n-1} \} z_{11} + k_0 k_0^4 (1 + D_0^{m-2}) z_{11} \dot{z}_{01} \right\}.$$

Rozwiązanie dla funkcji naprężeń możemy zatem przedstawić w postaci

(6.7)
$$z = [z_{00} + \alpha z_{01}(t) + \alpha^2 z_{02}(t) + \ldots] \varrho + [z_{10} + \alpha z_{11}(t) + \alpha^2 z_{12}(t) + \alpha^3 z_{13}(t) + \\ + \ldots] \varrho^2 + [z_{20} + \alpha z_{21}(t) + \alpha^2 z_{22}(t) + \ldots] \varrho^3 + [z_{30} + \alpha z_{31}(t) + \ldots] \varrho^4 + \ldots .$$

Zgodnie z warunkiem początkowym $(3.3)_1$ dla $t = 0$ otrzymujemy rozwiązanie dla stanu natychmiastowego

(6.8)
$$z_0 = z_{00}\varrho + z_{10}\varrho^2 + z_{20}\varrho^3 + z_{30}\varrho^4 + \ldots .$$

7. Określenie ugięcia $\bar{w}$ oraz wyznaczenie naprężeń σ_r i σ_φ

Mając określoną funkcję naprężeń z przejdziemy obecnie do wyznaczenia ugięcia $\bar{w}$. Funkcję tę wyznaczymy całkując równanie równowagi (2.7). Podstawiając do równania $(2.7)_1$ szereg potęgowy (4.5) otrzymujemy

(7.1)
$$\frac{d\bar{w}}{d\varrho} = -\frac{1}{\bar{z}_0} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}_v \varrho^v.$$

Występujące w tym wzorze symbole

(7.2)
$$\bar{z}_0 = 1, \quad \bar{z}_m + \frac{1}{z_0} \sum_{v=1}^{m} z_v \bar{z}_{m-v} = 0, \quad m \geqslant 1$$

są współczynnikami odwróconego szeregu określonymi w p. 6.

Całkując równanie (7.1) mamy

$$\bar{w} = K(t) - \frac{1}{z_0} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{z}_v \frac{1}{1+v} \varrho^v, \tag{7.3}$$

gdzie K jest stałą całkowania (zależną od czasu), którą określimy z warunku brzegowego (3.2). Podstawiając do równania (7.3) $\varrho = 1$ otrzymujemy

$$K(t) = \frac{1}{z_0} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_v}{1+v}, \tag{7.4}$$

gdzie

$$\begin{gathered} \bar{z}_v = \sum_{q=0}^{\infty} \bar{z}_{vq} \alpha^q, \qquad \frac{1}{z_0} = \frac{1}{z_{00}} \sum_{q=0}^{\infty} \bar{z}_{0q} \alpha^q, \\ \bar{z}_{00} = 1, \quad \bar{z}_{0m} + \frac{1}{z_{00}} \sum_{q=1}^{m} z_{0q} z_{0,m-q} = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Ostatecznie funkcję ugięcia (7.3) możemy przedstawić w postaci

$$\bar{w} = \frac{1}{z_{00}} \sum_{q=0}^{\infty} z_{0q} \alpha^q \left[\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{1+v} \bar{z}_{vq} \alpha^q (1-\varrho^v) \right]. \tag{7.6}$$

Na podstawie warunku brzegowego (3.2) z powyższego wzoru możemy określić funkcję ugięcia dla stanu natychmiastowego przyjmując $\alpha = 0$. Otrzymujemy wówczas

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{z_{00}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1+v} \bar{z}_{v0} (1-\varrho^v). \tag{7.7}$$

Ze wzoru (7.6) możemy również określić ugięcie środka membrany, zakładając $\varrho = 0$:

$$[\bar{w}(\varrho, t)]_{\varrho=0} = \frac{1}{z_{00}} \sum_{q=0}^{\infty} \bar{z}_{0q} \alpha^q \left(\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v+1} z_{vq} \alpha^q \right). \tag{7.8}$$

Naprężenia w membranie obliczamy ze wzorów (2.6)

$$\sigma_r = C \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} z_{vq} \alpha^q \varrho^v, \qquad \sigma_\varphi = C \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (2v+1) z_{vq} \alpha^q \varrho^v; \tag{7.9}$$

dla stanu natychmiastowego ($\alpha = 0$) mamy

$$\sigma_{r0} = C \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \varrho^v, \qquad \sigma_{\varphi 0} = C \sum_{v=0}^{\infty} (2v+1) z_{v0} \varrho^v. \tag{7.10}$$

Dla dowolnej chwili t naprężenia w środku membrany są sobie równe. Zatem z zależności (7.9) dla $\varrho = 0$ otrzymujemy

$$\sigma_{rf} = \sigma_{\varphi f} = C \sum_{q=0}^{\infty} z_{0q} \alpha^q \tag{7.11}$$

oraz dla stanu natychmiastowego

$$\sigma_{rf_0} = \sigma_{\varphi f_0} = Cz_{00}. \tag{7.12}$$

8. Liczbowe określenie współczynników pierwszego przybliżenia

W celu określenia wielkości naprężeń w zależności od czasu i bezwymiarowej współrzędnej ϱ rozpatrzymy możliwie najprostsze przybliżenie uwzględniające obydwa efekty, przyjmując rozwiązanie dla funkcji naprężeń w postaci

$$z = [z_{00} + \alpha z_{01}(t)]\varrho + [z_{10} + \alpha z_{11}(t)]\varrho^2. \tag{8.1}$$

Współczynniki z_{01} i z_{02}, jak wykazaliśmy, zależne są od współczynników $z_{00} = D_0$ i $z_{10} = D_1$. Te ostatnie jako funkcje γ i m zostały określone w pracy [2].

Określenie współczynników równania (8.1) wymaga ustalenia liczbowych wartości γ, m i n, które mogą zmieniać się w szerokim zakresie. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wariantów:

1) $\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-2}$, $m = 1$, $n = 1$,

2) $\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-12}$, $m = 3$, $n = 3$,

3) $\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-30}$, $m = 5$, $n = 5$.

Wyniki obliczeń zamieszczamy poniżej w tablicy 1.

Tablica 1

	$\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-2}$ $m = 1$ $n = 1$	$\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-12}$ $m = 3$ $n = 3$	$\gamma = 0{,}3 \cdot 10^{-30}$ $m = 5$ $n = 5$
$D_0 = Z_{00}$	$9{,}8 \cdot 10^{-2}$	$2{,}572 \cdot 10^{-3}$	$3{,}83 \cdot 10^{-5}$
$D_1 = Z_{10}$	$-1{,}96 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}86 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}95 \cdot 10^{-6}$
Z_{01}	$-2{,}082t$	$-3{,}2103t$	$-5{,}1212t$
Z_{11}	$-0{,}841t$	$-1{,}452t$	$-3{,}022t$

9. Wnioski

Jak wykazaliśmy, podana w pracy [1] metoda rozwiązania ma zastosowanie również w rozpatrzonym przypadku złożonej deformacji membrany. Podstawowym rozwiązaniem jest rozwiązanie dla stanu natychmiastowego.

Zależny od czasu stan naprężenia i stan odkształcenia określa dwa wpływy: pełzania przejściowego i pełzania ustalonego z tym zastrzeżeniem, że proces ostatni w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych membran w zasadzie nie może mieć miejsca. Wynika to ze zmienności naprężeń w czasie.

Przedstawione rozwiązanie należy traktować jako odnoszące się do stosunkowo niedługich okresów czasu. Wynika to stąd, że rozwinięcie dla małego parametru może określać jedynie początkowy zakres procesu nieliniowego pełzania.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. Bychawski, *Large deflections of the elasto-creeping circular membrane*, Arch. Mech. Stos., 3, **4** (1965).
2. Z. Bychawski, *Duże ugięcia sprężyście nieliniowych membran kołowych*. Rozpr. Inżyn., 1, **14** (1966).
3. F.K.G. Odqvist, *Applicability of the Elastic Analogue to Creep Problems of Plates*, Membranes and Beams, Creep in Structures, IUTAM Colloquium Stanford University, 1960.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОПРОСЫ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ КРУГОВЫХ МЕМБРАН

В работе авторы сформулировали вопрос сложной деформации нелинейной плоской мембраны кругового контура, проявляющий мгновенные упруго-пластические деформации и ползучесть.

Основная система двух дифференциальных, нелинейных уравнений для функций напряжения, а также, функция прогиба решаются при использовании метода степенных двойных рядов, заключающих малый физический параметр.

Эффективность этого метода иллюстрирует числовой пример.

Summary

NONLINEAR PROBLEMS OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION AND CREEP OF A CIRCULAR MEMBRANE

The authors formulate the problem of combined nonlinear deformation of a plane circular membrane showing instantaneous elastic-plastic strain and creep.

The fundamental set of two nonlinear differential equations for the stress function and the deflection function is solved by the method of double power series involving a small physical quantity.

The efficacy of this method is illustrated by an example.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1965 r.