

**O DWU ODMIANACH METODY POHLHAUSENA
I ICH ZASTOSOWANIU DO PRZEPLYWU W SASIEDZTWIE PUNKTU SPIETRZENIA**

W. J. PROSNAK, M. E. KLONOWSKA (WARSZAWA)

1. Dwie odmiany metody Pohlhausena

1.1. Warunek zgodności. Rozpatrzmy płaską, stacjonarną warstwę przyścienną, zakładając, że ciecz ma stałą gęstość ρ i stałą lepkość dynamiczną μ . Jej lepkość kinematyczna ν ma zatem również wartość stałą.

Założmy, że ścianka, przy której formuje się warstwa przyścienna, jest prostoliniowa i wprowadźmy prostokątny układ odniesienia x, y taki, że oś x pokrywa się ze ścianką, a oś y jest normalna do ścianki i zwrócona w stronę warstwy przyściennej.

Oznaczmy symbolami $u(x, y)$ i $v(x, y)$ składowe prędkości cieczy w warstwie przyściennej względem tego układu odniesienia, a symbolem $U(x)$ — prędkość przepływu potencjalnego na granicy warstwy. Wprowadźmy symbol $\delta(x)$ na oznaczenie grubości warstwy przyściennej. Założmy ponadto, że ścianka również porusza się względem przyjętego układu odniesienia w swej płaszczyźnie. Prędkość ścianki oznaczmy symbolem $u_w(x)$.

Układ równań, złożony z równania Prandtla i równania ciągłości, opisujący pole prędkości cieczy w warstwie przyściennej, można napisać wówczas w następującej formie:

$$(1.1) \quad uu_x + vu_y = UU' + \nu u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0,$$

przy czym dolne wskaźniki oznaczają pochodne cząstkowe, a «prim» — pochodną zupełną względem x .

Warunki brzegowe dla tego układu dotyczą składowych prędkości na ścianie ($y = 0$) i na granicy warstwy ($y = \delta$), i mają one znaną postać:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_w(x), & v(x, 0) &= 0; \\ u(x, \delta) &= U(x). \end{aligned}$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu równania (1.1)₁ względem y i uwzględnieniu równania ciągłości (1.1)₂ otrzymuje się

$$(1.3) \quad uu_{xy} + vu_{yy} = \nu u_{yyy},$$

a po uwzględnieniu warunków brzegowych (1.2) na ścianie — ostatecznie

$$(1.4) \quad [u_w u_{xy}]_{y=0} = [\nu u_{yyy}]_{y=0}.$$

Powyższy warunek, będący wnioskiem z układu równań (1.1)₁, (1.1)₂ i warunków brzegowych (1.2), będziemy nazywali w dalszym ciągu *warunkiem zgodności*. Nazwa ta stanowi przekład słów «compatibility condition» i została zapożyczona z pracy HUGELMANA [1].

O ile nam wiadomo, warunek zgodności został zaproponowany i zastosowany po raz pierwszy w pracy SCHLICHTINGA i ULRICHA [2] w 1942 r. HUGELMAN i HAWORTH zaproponowali go ponownie w pracy [3] późniejszej o lat dwadzieścia trzy, dotyczącej warstwy przyściennej magnetohydrodynamicznej.

1.2. Odmiany: klasyczna i zmodyfikowana metody Pohlhausena. Wprowadźmy symbole δ_* , ϑ i τ_0 na oznaczenie odpowiednio: miary liniowej straty wydatku, miary liniowej straty pędu i naprężenia stycznego na ściance.

Oto znane wzory definiujące wymienione wielkości:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \delta_* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \\ \vartheta &= \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \\ \tau_0 &= \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}. \end{aligned}$$

Przy ich pomocy można napisać znany wzór całkowy Kármána, stanowiący całkę równania Prandtla (1.1), w następującej postaci:

$$(1.6) \quad U^2 \frac{d\vartheta}{dx} + (2\vartheta + \delta_*) U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}.$$

Zaproponowana przez POHLHAUSENA [4] metoda wyznaczania warstwy przyściennej w sposób przybliżony opiera się na aproksymacji rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym, spełniającym wzór całkowy Kármána (1.6) oraz pewne warunki na ściance i na granicy warstwy.

W zależności od postaci tych warunków wyróżniać będziemy w ramach niniejszej pracy «odmianę klasyczną» i «odmianę zmodyfikowaną» metody Pohlhausena. Odpowiednio — mówić będziemy o «wielomianie klasycznym» i «wielomianie zmodyfikowanym».

Przechodzimy do określenia wprowadzonych nazw.

Wprowadźmy bezwymiarową zmienną:

$$(1.7) \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

oraz wielomian potęgowy N -tego stopnia względem η , aproksymujący rozkład prędkości w warstwie przyściennej:

$$(1.8) \quad \frac{u}{U} = \sum_{n=0}^N a_n \eta^n.$$

Współczynniki wielomianu są na ogół funkcjami zmiennej x , przy czym współczynnik

$$(1.9) \quad a_0 = \frac{u_w(x)}{U(x)} \equiv c_1(x)$$

będziemy uważali w dalszym ciągu za funkcję znaną. Wyznaczenie warstwy przyściennej metodą Pohlhausena sprowadza się do wyznaczenia pozostałych współczynników. Zważywszy, że

$$(1.10) \quad \left(\frac{u}{U}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^N a_n \eta^n\right)^2 = \sum_{n=0}^N (a_n \eta^n)^2 + 2a_0 \sum_{n=1}^N a_n \eta^n + \\ + 2a_1 \sum_{n=2}^N a_n \eta^{n+1} + \dots + 2a_{N-1} \sum_{n=N}^N a_n \eta^{n+N-1},$$

możemy łatwo obliczyć dwie następujące sumy:

$$(1.11) \quad S_1 = \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right) d\eta = \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n}{n+1}\right), \\ S_2 = \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 d\eta = \sum_{n=0}^N \frac{a_n^2}{2n+1} + 2a_0 \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n+1} + \\ + 2a_1 \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{n+2} + \dots + 2a_{N-1} \sum_{n=N}^N \frac{a_n}{n+N} = \\ = \sum_{n=0}^N \frac{a_n^2}{2n+1} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(a_k \sum_{n=k+1}^{n=N} \frac{a_n}{n+k+1}\right).$$

Zwracamy uwagę na fakt, że sumy S_1 i S_2 zależą wyłącznie od współczynników wielomianu (1.8).

Zgodnie ze wzorami (1.5)₁ i (1.5)₂ wielkości δ_* i ϑ wyrażają się przez S_1 i S_2 , mianowicie

$$(1.12) \quad \frac{\delta_*}{\delta} = 1 - S_1, \quad \frac{\vartheta}{\delta} = S_1 - S_2,$$

przy czym grubość warstwy przyściennej δ jest nieznaną funkcją zmiennej x .

Napężenie styczne (1.5)₃ wyraża się pochodną wielomianu (1.8) w punkcie $\eta = 0$ i wynosi

$$(1.13) \quad \tau_0 = \frac{\mu U a_1}{\delta}.$$

Wielomian aproksymacyjny musi czynić zadość wzorowi całkowemu Kármána (1.6). Podstawiając (1.12) i (1.13) do (1.6) uzyskujemy zatem pierwsze równanie na współczynniki a_1, a_2, \dots, a_N oraz grubość warstwy δ . Tę ostatnią funkcję nieświadomą zastąpimy dla wygody pohlhausenowskim parametrem kształtu

$$(1.14) \quad \Lambda = \frac{\delta^2 U'}{\nu}.$$

Ponieważ liczba niewiadomych współczynników wielomianu wynosi N , układ równań służących do wyznaczenia Λ , a_1, a_2, \dots, a_N będzie składać się z (1.6) oraz N dalszych równań.

Brakujące równania tworzymy opierając się na następujących warunkach różniących się nieco w przypadku odmiany klasycznej i odmiany zmodyfikowanej metody Pohlhausena:

1) żądamy, aby wielomian (1.8) spełniał równanie Prandtla (1.1)_I na ścianie:

$$(1.15) \quad [u_w u_x]_{y=0} = [UU' + \nu u_{yy}]_{y=0};$$

2) żądamy, aby wielomian (1.8) spełniał pierwszy i trzeci spośród warunków brzegowych (1.2):

$$(1.16) \quad \left[\frac{u}{U} \right]_{y=0} = c_1(x), \quad \left[\frac{u}{U} \right]_{y=\delta} = 1;$$

3) w przypadku wielomianu klasycznego żądamy, aby na brzegu warstwy zniknęły pochodne wielomianu (1.8) rzędu od pierwszego do rzędu $(N-2)$ włącznie:

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} \left(\frac{u}{U} \right) \right]_{y=\delta} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, (N-2);$$

4) w przypadku wielomianu zmodyfikowanego żądamy, aby na brzegu warstwy zniknęły pochodne wielomianu (1.8) rzędu od pierwszego do rzędu $(N-3)$ włącznie:

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} \left(\frac{u}{U} \right) \right]_{y=\delta} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, (N-3)$$

oraz aby na ścianie był spełniony «warunek zgodności» (1.4):

$$(1.17) \quad [u_w u_{xy}]_{y=0} = [\nu u_{yyy}]_{y=0}.$$

Podane wyżej warunki stanowią definicje pojęć: «wielomian klasyczny» i «wielomian zmodyfikowany» oraz «odmiana klasyczna» bądź też «odmiana zmodyfikowana» Pohlhausena, stosowanych w ramach niniejszej pracy.

Zauważmy, że najniższy stopień wielomianu, przy którym rozróżnianie odmiany klasycznej metody Pohlhausena od odmiany zmodyfikowanej ma jeszcze sens, wynosi trzy. Istotnie, po to, aby wielomian mógł spełnić równocześnie wspólne obu odmianom trzy warunki (1.15) i (1.16), stopień jego musi wynosić dwa. Po to, aby wielomian mógł spełnić dodatkowy jedyny warunek, odróżniający obie odmiany, stopień jego musi być o jedność wyższy od dwóch.

W niniejszej pracy ograniczono się do wielomianów parzystego stopnia, a więc $N=4$ jest najniższym stopniem rozpatrywanych wielomianów.

1.3. Bezwymiarowe naprężenia styczne. Czysto formalne przekształcenia zależności (1.13) prowadzą do następującego wyniku:

$$(1.18) \quad \frac{\tau_0}{\rho U^2} \frac{U}{\sqrt{\nu U'}} = \frac{a_1}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Łatwo stwierdzić, że pierwszy czynnik lewej strony reprezentuje bezwymiarowe naprężenie styczne c_{xt} ; drugi — pierwiastek kwadratowy lokalnej liczby Reynoldsa Re_x . Iloczyn tych dwu wielkości oznaczać będziemy w niniejszej pracy symbolem

$$(1.19) \quad c_2 = c_{xt} \sqrt{Re_x} = \frac{a_1}{\sqrt{A}}$$

w analogii do oznaczenia, stosowanego w naszych wcześniejszych pracach [5 i 6].

2. Cel i zakres pracy

W dalszym ciągu niniejszej pracy zajmiemy się zastosowaniem dwu opisanych odmian metody Pohlhausena do przepływu cieczy lepkiej w otoczeniu punktu spiętrzenia, położonego na prostoliniowej ściance, która porusza się z prędkością u_w proporcjonalną do odległości x od punktu spiętrzenia (rys. 1):

$$(2.1) \quad u_w \sim x.$$

Zagadnienie wyznaczenia takiego przepływu było już rozwiązane przez nas w dwu poprzednich pracach [5 i 6], fakt ponownego podjęcia badań nad nim wymaga więc pewnego uzasadnienia.

W tym celu przede wszystkim zrelacjonujemy wyniki naszej własnej pracy [6] oraz pracy Hugelmana [1]; obie z nich stanowiły punkt wyjścia niniejszych badań i obie dotyczą zastosowania metody Pohlhausena do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia, położonego na ruchomej ściance.

W pracy [6] zastosowano wielomian czwartego stopnia, klasyczny w rozumieniu p. 1, tzn. spełniający takie warunki na ściance i na granicy warstwy przyściennej, jakie zaproponował Pohlhausen w swej klasycznej pracy ([4], str. 260). Niewielkie zmiany polegały tylko na uwzględnieniu ruchu ścianki.

Wnioski uzyskane przez nas ([6], Erratum) można streścić w następujący sposób:

1) zastosowane przybliżenie wielomianem klasycznym czwartego stopnia nie daje rozwiązania w pełnym zakresie prędkości ścianki; mianowicie w zakresie

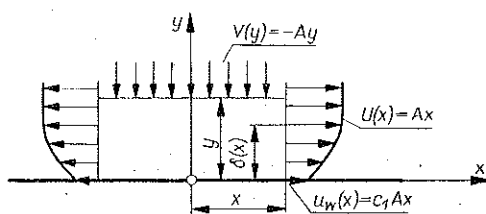
$$(2.2) \quad 0,4 < c_1 < 1$$

brak rozwiązania;

2) przebieg rozwiązania przybliżonego w zakresie

$$(2.3) \quad c_1 \geq 1$$

różni się znacznie od rozwiązania ścisłego.



Rys. 1

Mówiąc «rozwiązanie» mamy na myśli funkcje:

$$A = A(c_1), \quad c_2 = c_2(c_1),$$

z których pierwsza określa grubość warstwy przyściennej, druga — bezwymiarowe napężenie styczne na ściance, które stanowi element najistotniejszy z punktu widzenia pewnych zastosowań (por. np. [5]).

Innymi słowy, metoda Pohlhausena w opisanym formie i w zastosowaniu do omawianego przypadku przepływu zawiodła. W ramach pracy [6] poprzestaliśmy na stwierdzeniu tego faktu wiedząc, że *zawodność metody Pohlhausena* jest w ogóle faktem znanym⁽¹⁾. Natomiast podejmując pracę niniejszą pragnęliśmy zbadać tę sprawę nieco dokładniej, niż to uczyniliśmy w pracy cytowanej [6]. Ogólnie biorąc *pragnęliśmy stwierdzić, czy metoda Pohlhausena zawiedzie — w odniesieniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia — również przy zastosowaniu wielomianu stopnia wyższego niż czwarty*. Wyjaśnienie tej kwestii stanowiło podstawowy cel pracy, interesujący przede wszystkim dlatego, że *przyczyna zawodności metody Pohlhausena* nie była dotychczas, o ile wiemy, przedmiotem zadowalających badań. Przyczyna ta wydaje się wynikać z faktu, iż przybliżenie rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym, którego współczynniki określa się z warunków, dotyczących wyłącznie brzegów warstwy i który spełnia uśrednione, nie zaś ściśle równania warstwy przyściennej — po prostu nie jest przybliżeniem wystarczająco dokładnym, zwłaszcza że niektóre warunki, nakładane na ten wielomian, nie mają właściwie uzasadnienia fizycznego. Mamy tu na uwadze warunki «uzupełniające», które postulują znikanie pochodnych wielomianu na granicy warstwy i przepływu potencjalnego i to pochodnych tak wysokiego rzędu — w zależności od stopnia wielomianu — aby uzupełnić liczbę równań służących do wyznaczenia współczynników (por. p. 1.2). Nic więc dziwnego, że w pewnych konkretnych przypadkach przepływu przybliżenie rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym może okazać się wystarczająco dokładne; w innych natomiast tak dalece niedokładne, że w ogóle nie prowadzące do rozwiązania. Nieco inaczej widzi Hugelman [1] przyczynę niepowodzenia metody Pohlhausena przy zastosowaniu jej do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia. Według Hugelmana «...przyczyna niepowodzenia tkwi w pominięciu niezbędnego warunku zgodności», wynikającego z równań warstwy przyściennej, przy czym «...dołączenie tego warunku zapewnia metodzie Pohlhausena możliwość dostarczenia poprawnych rezultatów w całym zakresie prędkości u_w ścianki». Cytowane urywki są swobodnym przekładem czwartego i piątego zdania pracy Hugelmana [1]. Na poparcie tez, zawartych w obu tych zdaniach (a sprzecznych, nawiasem mówiąc, z cytowaną pracą Schlichtinga i Ulricha [2]) przytacza Hugelman wyniki, uzyskane przy pomocy zmodyfikowanego wielomianu ósmego stopnia, a obejmujące przedział

(2.4)

$$0 \leq c_1 \leq 1,5.$$

⁽¹⁾ Na przykład SCHLICHTING i ULRICH ([2], str. I 12, Bild 5) wspominają o niemożliwości obliczenia warstwy przyściennej w punkcie spiętrzenia i jego bezpośrednim sąsiedztwie metodą Pohlhausena, opartą na wielomianie szóstego stopnia, zmodyfikowanym w rozumieniu p. 1. Stwierdzają, że pochodna grubości warstwy przyściennej jest w tym punkcie nieskończenie wielka.

Drugim celem niniejszej pracy była zatem chęć zbadania prawdziwości twierdzeń, zawartych w dwu cytowanych zdaniach Hugelmana.

Mianowicie, ponieważ Hugelman zastosował wielomian zmodyfikowany ósmego stopnia, a my [6] wielomian klasyczny czwartego stopnia, zachodziła wątpliwość, czy na poprawienie wyników wpływa na pewno «rodzaj» wielomianu, a nie jego stopień. Zdecydowaliśmy zatem wykonać obliczenia zarówno odmianą klasyczną, jak i zmodyfikowaną dla $N = 4, 6, 8$ w celu rozstrzygnięcia tej wątpliwości.

Trzeci cel pracy stanowiła kontrola wyników liczbowych Hugelmana. Otóż Hugelman uzyskał swe wyniki [1] całkując numerycznie pewien układ równań różniczkowych, co jest niepotrzebne, bowiem w przypadku przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia można obliczyć wszystkie niewiadome współczynniki wielomianu jak również pohlhausenowski parametr kształtu (por. p. 1.3) z układu równań algebraicznych. Chcieliśmy więc porównać wyniki uzyskane dwoma niezależnymi sposobami.

3. Przepływ w sąsiedztwie punktu spiętrzenia

3.1. Wzór całkowy Kármána. Jeżeli zarówno prędkość ścianki u_w jak i prędkość przepływu na granicy warstwa są proporcjonalne do odległości x od punktu spiętrzenia, tzn. (rys. 1) jeżeli

$$u(x, 0) = u_w \sim x, \quad u(x, \delta) = U \sim x,$$

to warstwa jest samopodobna i wzór całkowy Kármána (1.6) redukuje się do równania algebraicznego.

Samopodobieństwo wynika łatwo z powyższych założeń i warunku (1.15) na ściance. Otrzymujemy mianowicie

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{y=0} \sim x,$$

skąd wynika

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \sim x,$$

a na tej podstawie i przy uwzględnieniu wzoru (1.5)₃ wnioskujemy, iż

$$\tau_0 \sim x.$$

Wprowadzając

$$U = Ax; \quad \tau_0 = Bx$$

do wzoru całkowego Kármána (1.6), dostrzegamy natychmiast na podstawie analizy wymiarów, że ani θ , ani δ_* nie mogą zależeć od x : są stałymi. Wobec tego bezwymiarowy rozkład prędkości w warstwie występujący we wzorach (1.5)₁ i (1.5)₂ też nie może zależeć od x , tzn.

$$\frac{d\theta}{dx} \left(\frac{u(x, y)}{U} \right) = 0,$$

co właśnie określa «samopodobieństwo» warstwy. Współczynniki wielomianu (1.8) są więc *stałymi* w rozważanym przypadku.

Z powyższych rozważań wynika, iż pochodna $d\vartheta/dx$, występująca we wzorze Kármána, jest równa zeru i można nadać wzorowi postać

$$(3.1) \quad 2 \left(\frac{\vartheta}{\delta} + \frac{\delta_*}{\delta} \right) U U' = \frac{\tau_0}{\rho \delta},$$

zawierającą już tylko pochodne znanej funkcji U .

3.2. Współczynniki wielomianu klasycznego i zmodyfikowanego. Podstawiając wyrażenia (1.12) i (1.14) do wzoru całkowego Kármána (3.1) uzyskujemy pierwsze równanie na współczynniki wielomianu (1.8):

$$(3.2) \quad (1 + S_1 - 2S_2) A - a_1 = 0.$$

Dalsze równania tworzymy opierając się na rozważaniach p. 1.2. W szczególności — podstawiając (1.2) i (1.8) do (1.15), wyrażającego równanie Prandtla «na ściance», otrzymujemy

$$a_2 = \frac{1}{2} A (c_1^2 - 1);$$

analogiczne podstawienie do wzoru (1.17), wyrażającego warunek zgodności, prowadzi do równania

$$6a_3 = c_1 a_1 A.$$

Pochodna k -tego rzędu względem y wielomianu (1.8) ma postać

$$\frac{\partial^k}{U} \frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \sum_{n=k}^N n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)] a_n \eta^{n-k}.$$

Ostatecznie zatem można zestawić równania, służące do obliczenia A , a_1 , a_2 , ..., a_N w przypadku klasycznym i zmodyfikowanym w formie następujących dwu układów, różniących się tylko jednym równaniem.

I. Równania dotyczące zarówno wielomianu klasycznego jak i zmodyfikowanego:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (1 + S_1 - 2S_2) A - a_1 &= 0, \\ A(c_1^2 - 1) - 2a_2 &= 0, \\ 1 - c_1 - \sum_{n=1}^N a_n &= 0, \\ \sum_{n=1}^N n a_n &= 0, \\ \sum_{n=1}^N n(n-1) a_n &= 0; \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{n=N-3}^N n(n-1)(n-2) \dots [n-(N-4)] a_n &= 0; \end{aligned}$$

układ ten obejmuje łącznie N równań.

II. Równania dotyczące — alternatywnie — wielomianu klasycznego lub zmodyfikowanego:

$$(3.4) \quad \sum_{n=N-2}^N n(n-1)(n-2)\dots[n-(N-3)]a^n = 0,$$

$$c_1 a_1 \Lambda - 6a_3 = 0.$$

W obu przypadkach otrzymujemy zatem układ $(N+1)$ równań z $(N+1)$ niewiadomymi, którymi są: $\Lambda, a_1, a_2, \dots, a_N$. Układ ten jest nieliniowy, bowiem suma S_2 , występująca w równaniu $(3.3)_1$, wyraża się nieliniowo przez współczynniki a_1, \dots, a_N zgodnie ze wzorem $(1.11)_2$.

3.3. Przypadek szczególny: wielomian czwartego stopnia. Jeżeli stopień wielomianu jest dostatecznie niski, można sprowadzić układ równań (3.3) i $(3.4)_1$, jak również układ (3.3) i $(3.4)_2$ do jednego równania algebraicznego z jedną niewiadomą. Jeżeli stopień wielomianu jest zbyt wysoki, redukcja taka, w zasadzie zawsze możliwa, jest tak pracochłonna i nastęrcza tyle możliwości popełnienia omyłek, że nie warto jej dokonywać i lepiej uciec się do wyznaczenia współczynników wielomianu oraz parametru Λ czysto numerycznymi metodami, wprost z wymienionych układów równań.

W przypadku wielomianu czwartego stopnia redukcja układu do jednego równania z jedną niewiadomą Λ udaje się przeprowadzić niezbyt wielkim nakładem pracy zarówno w przypadku klasycznym, jak i zmodyfikowanym.

W obu tych przypadkach równanie $(3.3)_1$, wynikające ze wzoru całkowego Kármána, przybiera po obliczeniu S_1 i S_2 postać następującą:

$$(3.5) \quad \Lambda \left[(1+c_1) + (1-4c_1) \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(c_1^2 + \frac{a_1^2}{3} + \frac{a_2^2}{5} + \frac{a_3^2}{7} + \frac{a_4^2}{9} \right) - 4a_1 \left(\frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_4}{6} \right) - \right. \\ \left. - 4a_2 \left(\frac{a_3}{6} + \frac{a_4}{7} \right) - \frac{a_3 a_4}{2} \right] = a_1.$$

Z układu (3.3) , uzupełnionego równaniem $(3.4)_1$ albo też $(3.4)_2$, możemy wyznaczyć współczynniki a_1, a_2, a_3 i a_4 jako funkcje Λ : w obu przypadkach odpowiedni układ jest liniowy względem tych współczynników.

Otrzymujemy wówczas w przypadku klasycznym

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_1 &= (1-c_1) \left[2 + \frac{1}{6} \Lambda (1+c_1) \right], \\ a_2 &= -\frac{1}{2} (1-c_1^2) \Lambda, \\ a_3 &= (1-c_1) \left[-2 + \frac{1}{2} \Lambda (1+c_1) \right], \\ a_4 &= (1-c_1) \left[1 - \frac{1}{6} \Lambda (1+c_1) \right]; \end{aligned}$$

a w przypadku zmodyfikowanym

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(1 - c_1) [4 + (1 + c_1) A]}{3 + \frac{1}{6} c_1 A}, \\
 a_2 &= -\frac{1}{2} (1 - c_1^2) A, \\
 (3.7) \quad a_3 &= \frac{1}{6} (1 - c_1) c_1 A \frac{4 + (1 + c_1) A}{3 + \frac{1}{6} c_1 A}, \\
 a_4 &= (1 - c_1) \left[1 + \frac{1}{2} (1 + c_1) A - \frac{4 + (1 + c_1) A}{3 + \frac{1}{6} c_1 A} \left(1 + \frac{1}{6} c_1 A \right) \right].
 \end{aligned}$$

Podstawiając (3.6) do (3.5) otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \frac{A^3}{4536} (1 + c_1) (1 - c_1^2) + \frac{A^2}{7560} (79 + 189c_1 + 110c_1^2) - \\
 - A \left(\frac{116}{315} + \frac{25c_1}{126} \right) + 2 = 0,
 \end{aligned}$$

podane już w naszej wcześniejszej pracy [6]. Powtarzamy, że dotyczy ono przypadku klasycznego.

Podstawiając natomiast (3.7) do (3.8) otrzymujemy równanie (2)

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad A^5 \frac{c_1^2 (1 + c_1)^2 (1 - c_1)}{1008} + A^4 \frac{c_1 (1 + c_1)}{336} (4c_1^2 - 3c_1 - 22) + \\
 + A^3 \frac{1 - c_1}{168} (130c_1^2 + 319c_1 + 204) + A^2 \frac{1}{14} (27c_1^2 + 161c_1 + 211) - \\
 - A (43c_1 + 143) + 540 = 0
 \end{aligned}$$

dotyczące przypadku zmodyfikowanego.

Wyznaczenie warstwy przyściennej i charakteryzujących ją funkcji $A(c_1)$ oraz $c_2(c_1)$ odbywa się przy wykorzystaniu uzyskanych równań w następujący sposób.

Po rozwiązaniu równania (3.8), bądź też (3.9) względem A przy danej c_1 , albo odwrotnie — względem c_1 przy danej A , oblicza się a_1 odpowiednio z równania (3.6) lub (3.7), a potem oblicza się bezwymiarowe naprężenie styczne c_2 ze wzoru (1.19), odpowiadające parze liczb A i c_1 .

W opisany sposób możemy w *zasadzie* otrzymać wartości funkcji

$$(3.10) \quad A = A(c_1), \quad c_2 = c_2(c_1), \quad \circ$$

(2) Autorzy wyrażają podziękowanie mgr Joli BREITER za kontrolę żmudnych rachunków, prowadzących do tego równania.

w wybranym przedziale c_1 , a ściślej mówiąc—dla dyskretnych, dowolnie wybranych wartości c_1 , traktowanej w tym przypadku jako zmienna niezależna. Powiedzieliśmy «w zasadzie», bowiem rozwiązanie (3.10) może nie istnieć w wybranym przedziale lub jego części.

Wyniki odpowiednich obliczeń, dotyczące przypadku klasycznego, a więc oparte na równaniu (3.8), są zamieszczone w naszej wcześniejszej pracy [6].

3.4. Zasada wyznaczania $\Lambda(c_1)$ w przypadku wielomianu N -tego stopnia. Skoncentrujemy się w niniejszym punkcie na wyznaczaniu Λ dla danej wartości c_1 w przypadku wielomianu N -tego stopnia. Zgodnie z uwagami p. 1.2 obowiązuje przy tym zastrzeżenie:

$$(3.11) \quad N \geq 3.$$

Opiszemy metodę numeryczną rozwiązania tego zagadnienia, która niezawodnie prowadzi do zamierzonego celu: przy jej pomocy uzyskano wszystkie wyniki liczbowe zamieszczone w niniejszej pracy. Metoda ta jest metodą kolejnych przybliżeń. Przy jej zastosowaniu wykorzystuje się spostrzeżenie, iż układy równań (3.3) i (3.4)₁ oraz (3.3) i (3.4)₂ są liniowe względem współczynników a_1, \dots, a_N .

Zasada wyznaczania Λ dla danej c_1 przedstawia się następująco:

- 1) objera się dowolną wartość Λ ;
- 2) rozwiązuje się liniowy układ równań (3.3) i (3.4)₁, albo też (3.3) i (3.4)₂ względem współczynników a_1, a_2, \dots, a_N ;
- 3) oblicza się wartości sum S_1 i S_2 według wzorów (1.11);
- 4) sprawdza się, czy równanie (3.3)₁ jest spełnione z obraną dokładnością.

Obliczenia powtarza się cyklicznie według tego schematu dopóty, dopóki kolejna wartość Λ nie spełni równania (3.3)₁ z daną dokładnością. Przechodzi się wówczas do obliczenia c_2 według wzoru (1.19); przypominamy przy tym, że odpowiednia wartość współczynnika a_1 jest wyznaczana automatycznie w procesie rachunku dla aktualnej wartości Λ , stanowiąc rozwiązanie układu równań (3.3) i (3.4)₁ albo też (3.3) i (3.4)₂.

3.5. Rozkład prędkości w warstwie jako kryterium jednoznaczności rozwiązania. Metoda Pohlhausena nie zawsze prowadzi do jednoznacznego opisu warstwy przyściennej. W odniesieniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia wieloznaczność opisu warstwy wyraża się faktem, iż układ równań (3.3) i (3.4)₁, albo też (3.3) i (3.4)₂ ma dla danej wartości c_1 więcej niż jeden pierwiastek dodatni Λ .

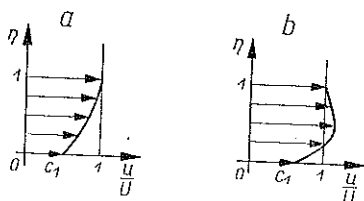
W przypadku $c_1 = 0$ fakt ten istotnie ma miejsce, co można łatwo stwierdzić, badając trójmian trzeciego stopnia zamieszczony w pracy Pohlhausena [4]. Nawiasem mówiąc, Pohlhausen nie podaje wyników takich badań i nie wspomina o istnieniu kilku pierwiastków. O istnieniu w tym przypadku dwu dodatnich pierwiastków i jednego ujemnego pisze natomiast GOLDSTEIN [7].

W przypadku $c_1 \neq 0$ świadczą o istnieniu kilku pierwiastków wyniki, zamieszczone w naszej wcześniejszej pracy [6].

W związku z pojawieniem się wieloznacznego rozwiązania występuje potrzeba ustalenia kryteriów, które pozwoliłyby ujednoznaczyć rozwiązanie. Otóż przypomi-

namy, że nasze wcześniejsze badania doprowadziły do wniosku, iż rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, odpowiadające różnym wartościom pierwiastka Λ , różnią się od siebie jakościowo: jedne z nich są monotoniczne (rys. 2a), inne — nie (rys. 2b).

Fakt istnienia różnych jakościowo rozkładów prędkości był chyba znany już Pohlhausenowi, który wspomina ([4], str. 260), że «... rozkład prędkości... musi zachować kształt dopuszczalny z fizycznego punktu widzenia, tak aby m.in. nie występował wzrost prędkości powyżej $U(x)$ ». Pohlhausen nie uzasadnił zresztą wcale, dlaczego taki rozkład prędkości miałby być niedopuszczalny, i nie wyjaśnił, czy na tej właśnie podstawie wybrał dla przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia mniejszy z dwu dodatnich pierwiastków, tzn. $\Lambda = 7,052$.



Rys. 2

GOLDSTEIN [7] natomiast, uzasadniając wybór tego właśnie pierwiastka pewnymi względami analitycznymi (wykluczenie punktu osobliwego, leżącego poza punktem spiętrzenia), pominął całkowicie milczeniem kwestię rozkładu prędkości w warstwie, przynależnego poszczególnym wartościom Λ .

W sposób ogólny, nie nawiązujący w ogóle do metody Pohlhausena, NICKEL [8] zbadał rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, «fizycznie możliwe» w sensie zgodności z równaniem Prandtla. Stosując rezultaty tych badań ([8], str. 28 oraz Abb. 11) do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia na *nieruchomej* ściance, można łatwo stwierdzić, że niemonotoniczny rozkład prędkości nie jest możliwy, nie spełnia bowiem nierówności ([8], str. 21):

$$u(x, y) \leq U(x) + e \quad \text{dla} \quad U(x_0) < U(x),$$

będącej wnioskiem z równania Prandtla.

Zgodnie z wynikami Nickela obieramy monotoniczność rozkładu prędkości jako kryterium jednoznaczności rozwiązania, jeśli chodzi o punkt spiętrzenia na *nieruchomej* ściance.

Do przypadku *ruchomej* ścianki wyniki Nickela wprowadzić nie stosują się bezpośrednio, można jednak rozszerzyć je również na ten przypadek, uogólniając tym samym wspomniane kryterium jednoznaczności.

Jak wynika z powyższych rozważań, w konkretnych rachunkach może wystąpić potrzeba kontroli rozkładu prędkości. W niniejszej pracy dokonywano takiej kontroli obliczając wartości wielomianu (1.8) i jego pierwszej pochodnej względem η w przedziale $0 \leq \eta \leq 1$, a ściślej — w dostatecznie gęsto rozmieszczonych punktach tego przedziału.

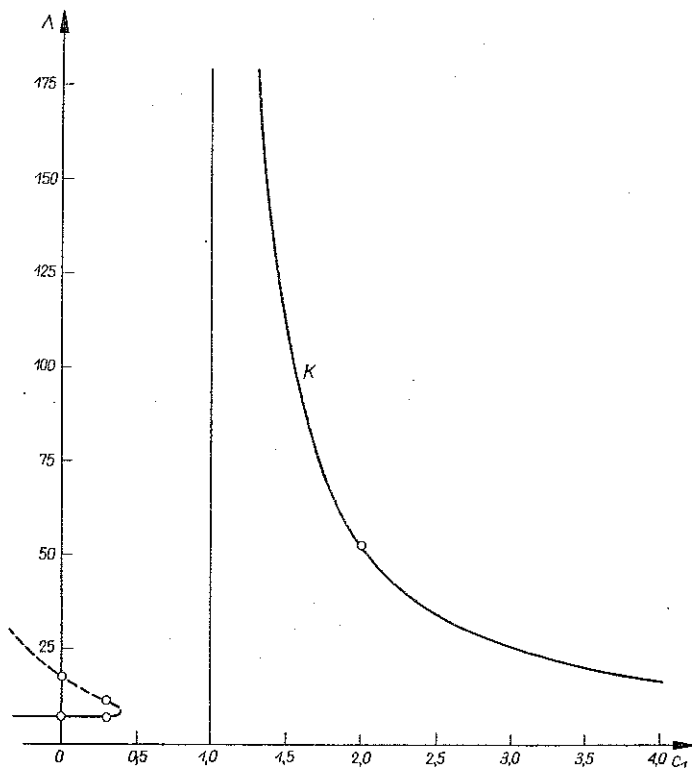
3.6. Wyniki obliczeń. Wyniki obliczeń są reprezentowane na wykresach (rys. 3 – rys. 17) i dotyczą one wielomianów aproksymacyjnych klasycznych i zmodyfikowanych o stopniach parzystych $N = 4, 6, 8$.

Niekompletne obliczenia przeprowadzono również dla wielomianów stopnia nieparzystego $N = 5, 7$. Wyniki tych obliczeń wystarczały do stwierdzenia, iż *nie-*

parzystość wielomianu nie ma wpływu jakościowego na rozwiązanie. Z tego względu uznaliśmy za niecelowe zarówno zamieszczanie w niniejszej pracy niekompletnych wyników dotyczących wielomianów nieparzystych, jak i uzupełnianie tych wyników w oparciu o dodatkowe obliczenia.

Niektóre wyniki zamieszczone w niniejszej pracy, mianowicie odnoszące się do wielomianu klasycznego stopnia $N = 4$, były już częściowo opublikowane [6]. W celu umożliwienia porównań przytaczamy je jednak ponownie, zresztą — po pewnych uzupełnieniach. Przedstawimy w pierwszym rzędzie wyniki obliczeń dotyczących odmiany klasycznej.

Pewne wstępne wskazówki co do zakresu tych obliczeń zaczerpnęliśmy z wyników uprzednio uzyskanych [6] dla wielomianu $N = 4$, reprezentowanych na rys. 3.



Rys. 3

Jak widać, funkcja $A(c_1)$ ma w tym przypadku dwie gałęzie: jedną w przedziale

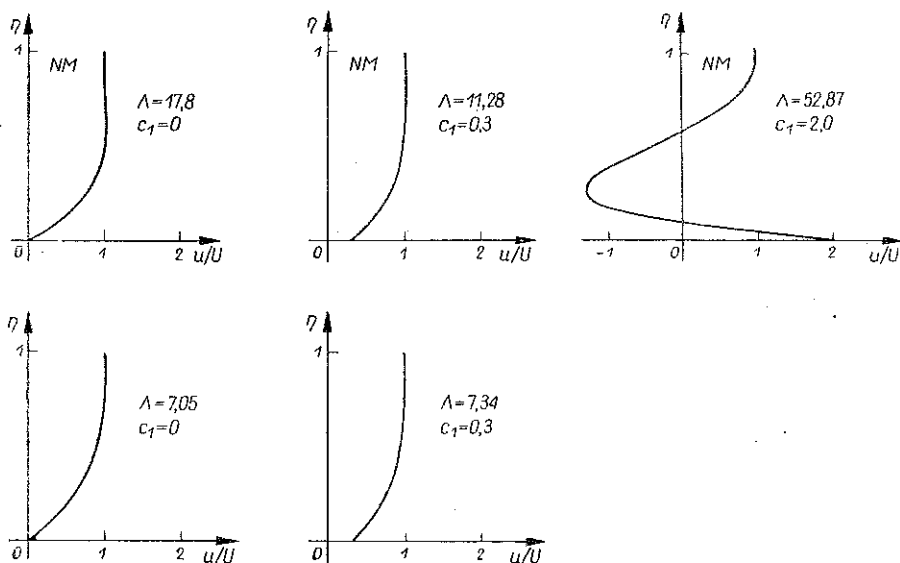
$$(3.12) \quad c_1 \leq 0,4,$$

drugą w przedziale

$$(3.13) \quad c_1 > 1.$$

Ponadto w przedziale (3.12) funkcja ta jest dwuwartościowa.

Dla wybranych pięciu punktów zaznaczonych kółkami na rys. 3 zbadano rozkłady prędkości w warstwie przyściennej. Wyniki tych badań zestawiono na rys. 4. Pozwalają one w połączeniu z kryterium jednoznaczności rozwiązania, przyjętym w p. poprzednim, wyodrębnić te części krzywych na rys. 3, które spełniają to kryterium. Łatwo zauważyć, że kryterium jednoznaczności jest spełnione tylko na «dolnej» gałęzi w przedziale (3.12), oznaczonej ciągłą linią. Na «górną» gałąź w tym przedziale, jak również na całą krzywą w przedziale (3.13), kryterium jednoznaczności nie jest spełnione, bowiem rozkłady prędkości, odpowiadające punktom na tych liniach, nie są monotoniczne (symbol NM na odpowiednich wykresach rys. 4).

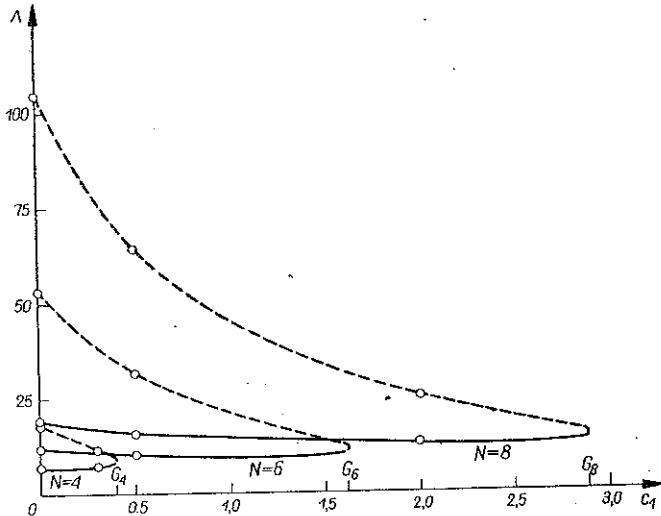


Rys. 4

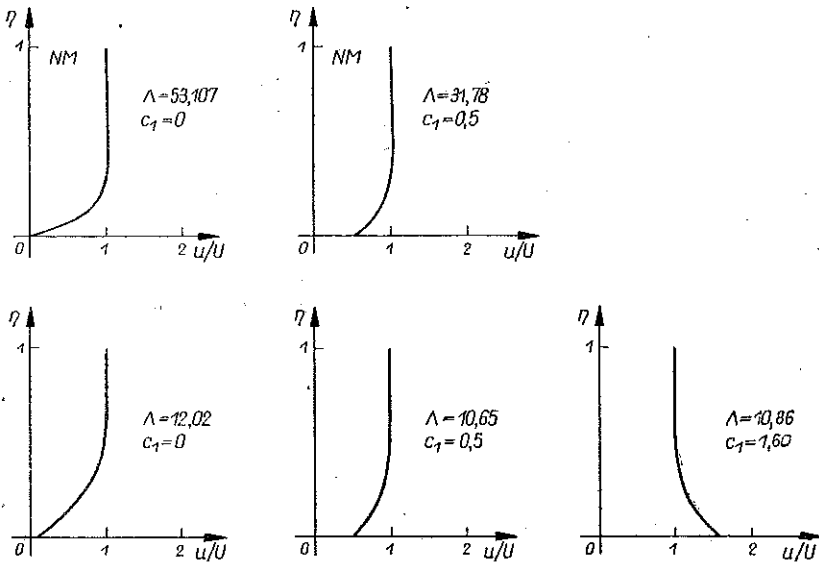
Opierając się na tych wynikach ograniczyliśmy zakres obliczeń do wyznaczenia w przypadku $N = 6$ oraz $N = 8$ krzywych, przechodzących przez punkty o odciętej $c_1 = 0$ i nie badaliśmy nawet w tych dwu przypadkach istnienia gałęzi analogicznej do krzywej K na rys. 3.

Wyniki obliczeń funkcji $\Lambda(c_1)$ dla $N = 6$ oraz $N = 8$ są zestawione na rys. 5, przy czym wrysowano dla porównania także wyniki dla $N = 4$. Jak już wspomiano, niekompletne wyniki uzyskane dla $N = 5$ oraz $N = 7$ pozwalają stwierdzić, że odpowiednie linie $\Lambda(c_1)$ mają w tych dwu przypadkach taki sam kształt, jak linie przedstawione na rys. 5 i leżą odpowiednio między liniami dla $N = 4$ i $N = 6$, bądź też między liniami dla $N = 6$ i $N = 8$.

Kreskowane części krzywych na rys. 5 odpowiadają niemonotonicznym rozkładom prędkości w warstwie, co można stwierdzić rozpatrując wykresy prędkości przedstawione na rys. 6 i 7. Na niektórych wykresach rys. 6 i 7 niemonotoniczność jest słabo widoczna, niemniej jednak wyniki liczbowe pozwoliły stwierdzić jej istnie-



Rys. 5

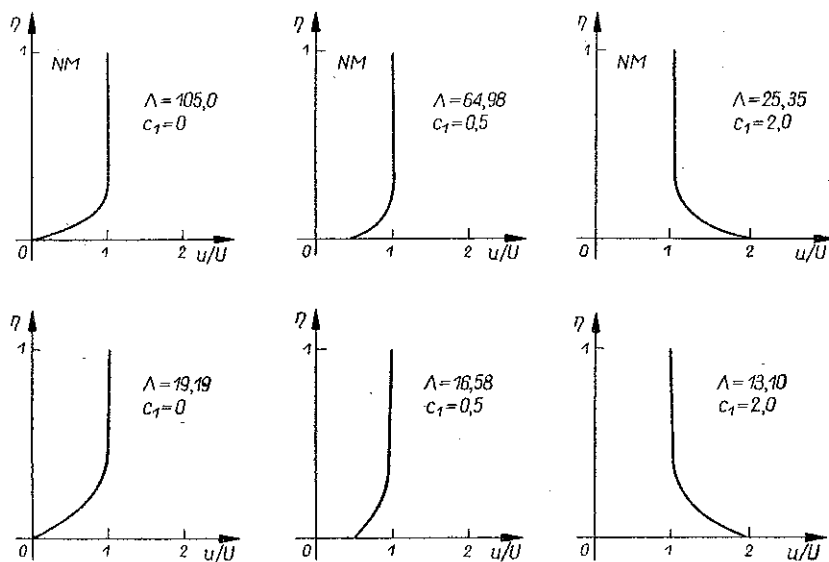


Rys. 6

nie lub brak w sposób jednoznaczny; na ich podstawie odpowiednio wniesiono na wykresach symbol *NM* lub go nie wniesiono.

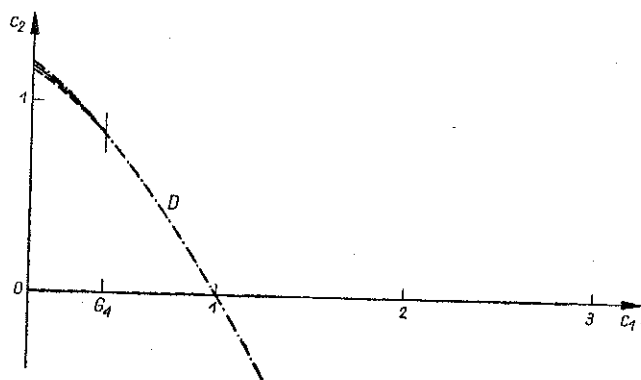
Punkty na rys. 5, którym odpowiadają rozkłady prędkości na rys. 4, 6 i 7, są oznaczone kółkami.

Ostatni fragment wyników dotyczących wielomianu klasycznego stanowią funkcje $c_2(c_1)$, reprezentujące bezwymiarowe naprężenie styczne i przedstawione na rys. 8, 9 i 10. Kreskowane i ciągłe linie na tych rysunkach odpowiadają kreskowym i ciągłym odcinkom linii na rys. 5.



Rys. 7

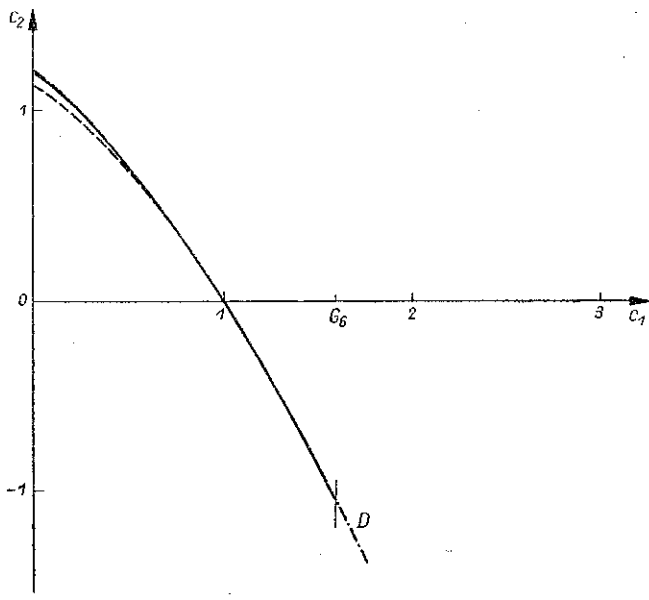
Linie D (kreska — kropka) na rys. 8, 9, 10 określają rozwiązanie «ściśle», zaczerpnięte z naszej pracy [5]. Pionowe kreski oznaczają koniec przedziału, w którym istnieje sensowne fizyczne rozwiązanie (w rozumieniu przyjętego kryterium jednoznaczności).



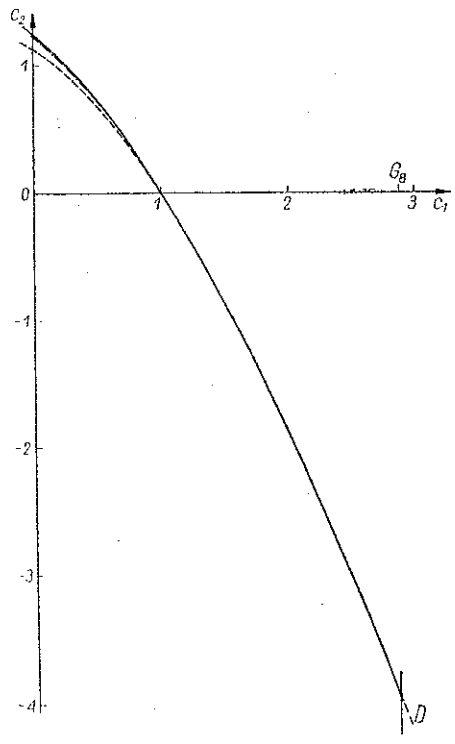
Rys. 8

Jeżeli rozwiązanie przybliżone istnieje dla $c_1 \geq 1$, jak ma to miejsce w przypadku $N = 6$ oraz $N = 8$, ciągłe i kreskowane linie niemal pokrywają się ze sobą w tym zakresie, jak również z krzywą «dokładną». Różnice między nimi leżą w granicach grubości linii na rys. 9 i 10.

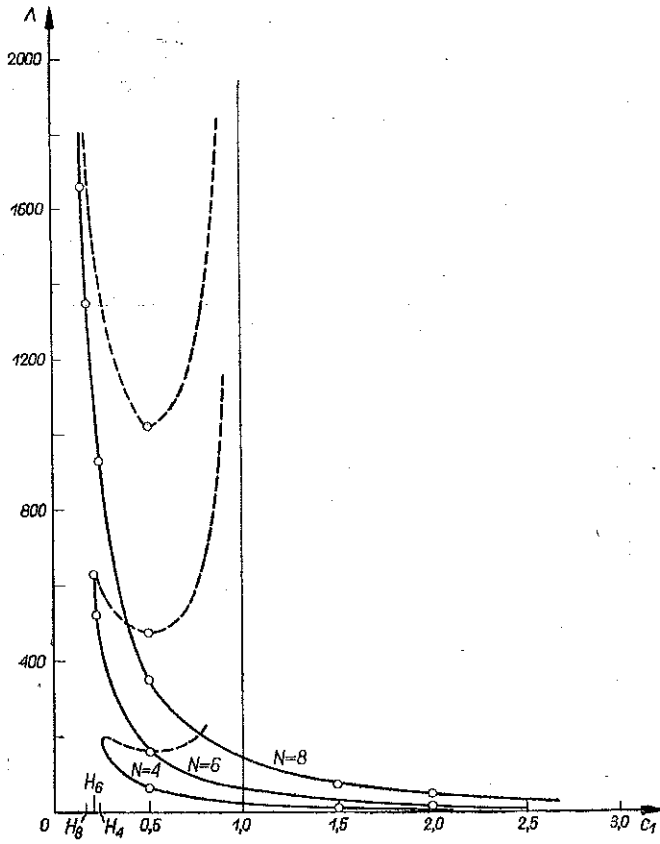
Wyniki dotyczące odmiany zmodyfikowanej są reprezentowane na rys. od 11 do 17 włącznie.



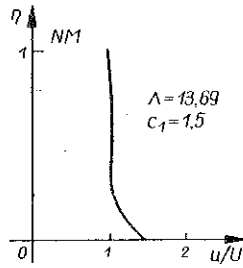
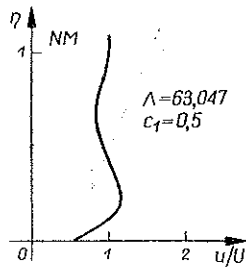
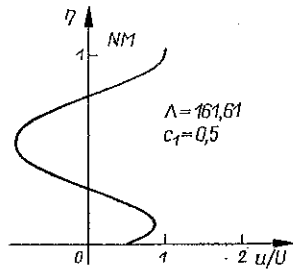
Rys. 9



Rys. 10

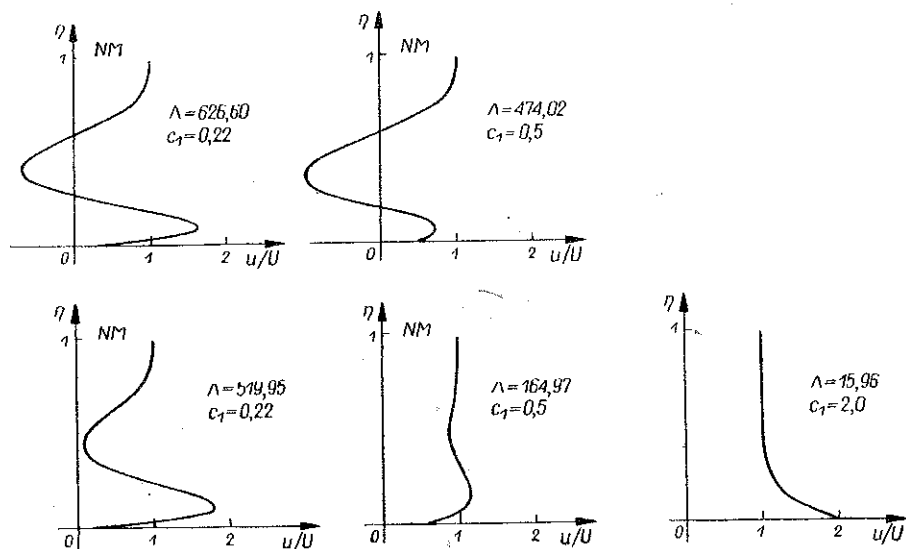


Rys. 11



Rys. 12

Podstawowy wynik stanowi, jak poprzednio, funkcja $\Lambda(c_1)$ przedstawiona na rys. 11 dla wielomianów stopnia $N = 4, 6, 8$. Porównanie z wynikami podanymi na rys. 5 pozwala stwierdzić istotne różnice jakościowe, polegające przede wszystkim na tym, że obszar istnienia rozwiązania jest ograniczony w przypadku odmiany klasycznej od strony dużych wartości c_1 ; w przypadku odmiany zmodyfikowanej — od strony małych wartości c_1 .



Rys. 13

W pewnym zakresie wartości c_1 istnieją, jak poprzednio, dwa pierwiastki dodatnie Λ . Gałęzie odpowiadające większym wartościom Λ oznaczono liniami kreskowanymi na rys. 11. Rozkłady prędkości, odpowiadające punktom linii kreskowanych, są niemonotoniczne, o czym można przekonać się rozpatrując wykresy na rysunkach 12, 13 i 14. Podobnie jak poprzednio, oznaczono kółeczkami na rys. 11 punkty, którym odpowiadają podane rozkłady prędkości.

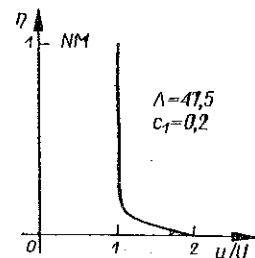
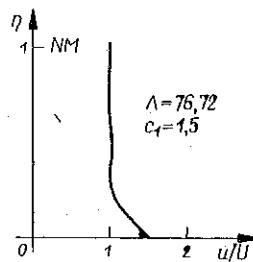
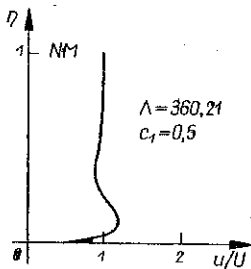
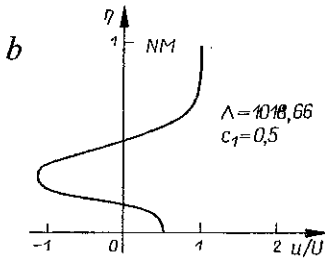
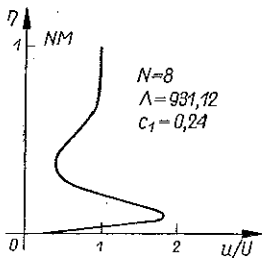
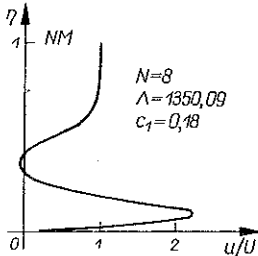
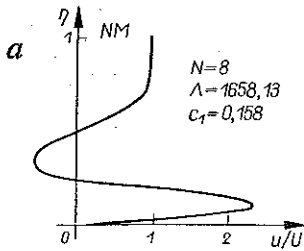
Zauważmy, że — przeciwnie niż w przypadku odmiany klasycznej — rozkłady prędkości, odpowiadające liniom ciągłym na rys. 11, są na ogół również niemonotoniczne. Niemonotoniczność zaznacza się przy tym w stopniu tym większym, im większa jest wartość Λ , a mniejsza — wartość c_1 .

W jednym jedynym przypadku, mianowicie dla $N = 6$, $\Lambda = 15,96$, $c_1 = 2,0$, rozkład prędkości jest monotoniczny (rys. 13). Przypuszczamy, że nie jest to przypadek odosobniony i że dla odpowiednio dużych c_1 występują rozkłady monotoniczne. Przypuszczenie to wydaje się potwierdzać fakt, że dla $c_1 = 1,5$ niemonotoniczność rozkładów prędkości jest bardzo mała — dla wielomianów stopnia $N = 4, 8$.

Wyniki dotyczące naprężenia stycznego są przedstawione na rys. 15, 16 i 17 wraz z linią D (kreska — kropka), reprezentującą «dokładną» funkcję $c_2(c_1)$, o której już była mowa. W zakresie $c_1 \geq 1$ obserwuje się dobrą zgodność wyników

przybliżonych z dokładnymi niemal niezależnie od stopnia wielomianu. W przedziale $0 < c_1 < 1$ zgodność ta jest znacznie gorsza, przy czym, co podkreślamy przypominając zarazem wyniki Schlichtinga i Ulricha [2], w sąsiedztwie punktu $c_1 = 0$ rozwiązanie przybliżone w ogóle nie istnieje.

Linie kreskowane i ciągłe na rysunku 11 oraz na rysunkach 15, 16, 17 odpowiadają sobie wzajemnie.



Rys. 14

4. Wnioski

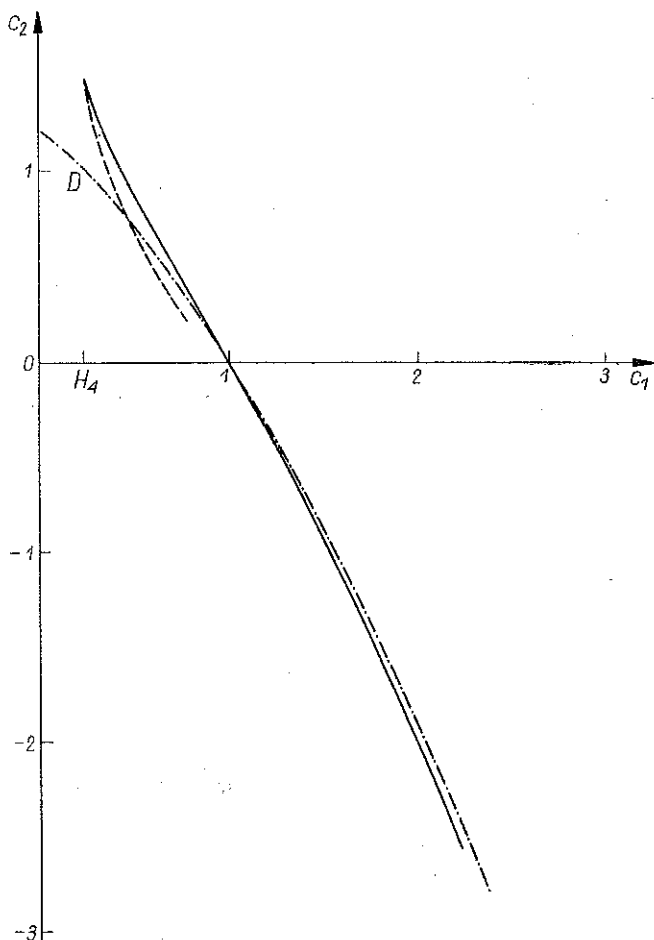
Analiza wyników, uzyskanych w ramach poprzedniego rozdziału, prowadzi do następujących wniosków, stanowiących odpowiedzi na pytania sformułowane w p. 2.

1. Odmiana klasyczna metody Pohlhausena, zastosowana do przepływu w sąsiedztwie punktu sprzężenia, położonego na prostoliniowej, ruchomej ścianie, pozwala na uzyskanie jednoznacznego rozwiązania, poprawnego w sensie monotoniczności rozkładu prędkości. Rozwiązanie to, reprezentowane ciągłymi liniami na rys. 5, istnieje w przedziale

$$(4.1) \quad 0 \leq c_1 \leq G_N,$$

przy czym G_N jest liczbą tym większą, im większy jest stopień N wielomianu aproksymującego rozkład prędkości w warstwie (rys. 5).

Wyniki dotyczące funkcji $c_2(c_1)$, reprezentującej naprężenie styczne na ścianie, okazują bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniem ścisłym w całym obszarze (4.1) istnienia rozwiązania przybliżonego.



Rys. 15

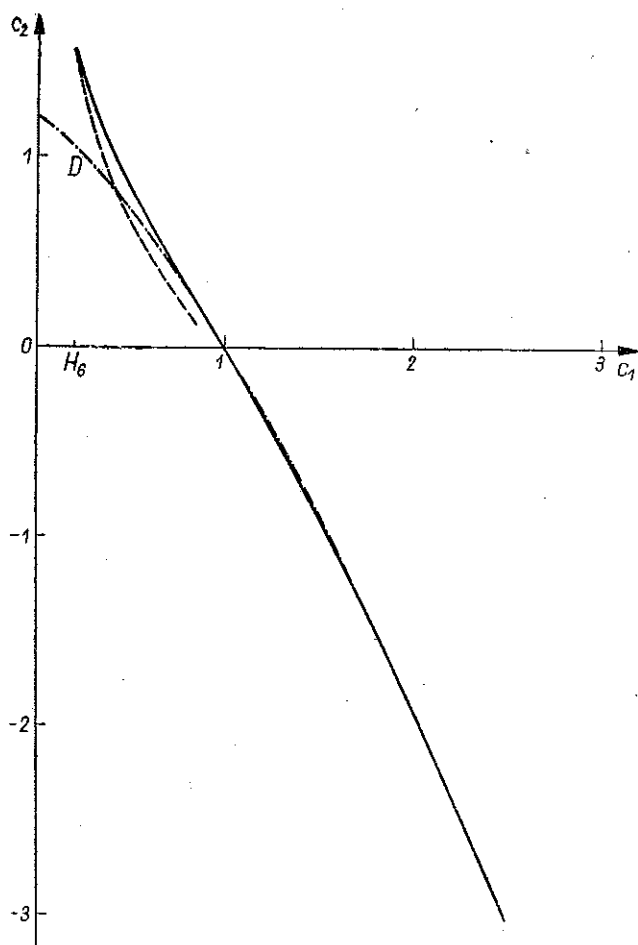
2. Odmiana zmodyfikowana metody Pohlhausena, zastosowana do tego samego przepływu, pozwala również na uzyskanie rozwiązania, które istnieje w obszarze

$$(4.2) \quad 0 < H_N \leq c_1,$$

przy czym H_N jest liczbą tym mniejszą, im wyższy jest stopień N wielomianu aproksymującego rozkład prędkości (por. rys. 11). Jednak rozwiązanie to, reprezentowane ciągłymi liniami na rys. 11, a będące jednoznaczna funkcją $\lambda(c_1)$, nie jest poprawne w całym obszarze istnienia (4.2) w sensie monotoniczności rozkładu prędkości. W przedziale

$$(4.3) \quad H_N \leq c_1 < 1$$

rozwiązanie jest w ogóle nie do przyjęcia, jak o tym świadczą rozkłady prędkości na rys. 11, 12, 13 i 14. Jak się wydaje, dopiero w zakresie wartości c_1 dostatecznie większych od jedności rozkłady prędkości stają się monotoniczne, czego dowodzą wyniki przedstawione na rys. 13.



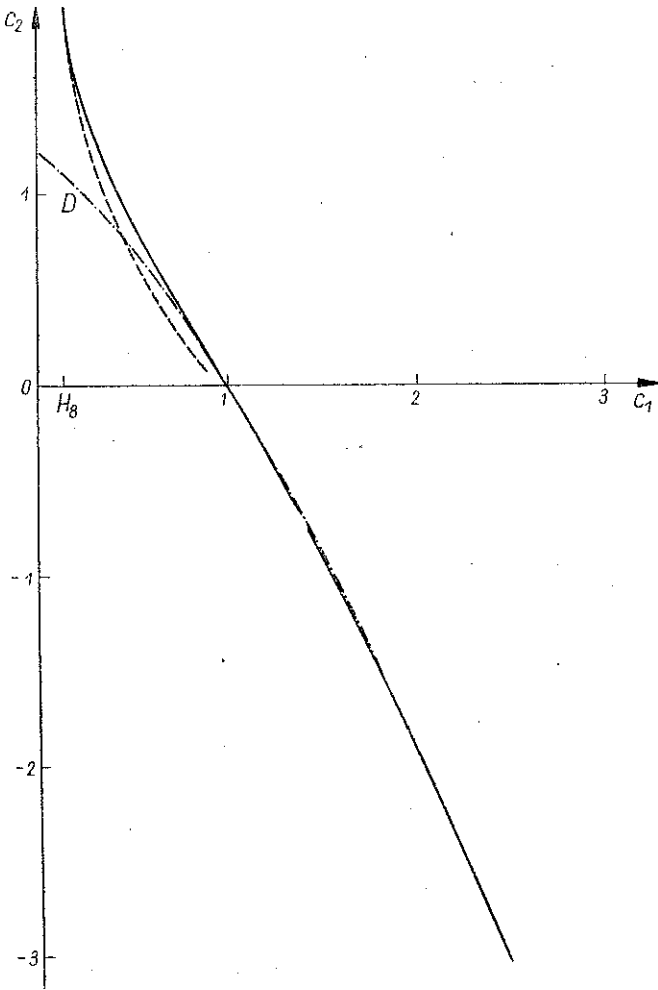
Rys. 16

Tezy zawarte w dwu zdaniach Hugelmana [1], zacytowanych w p. 2, okazują się zatem niezgodne z naszymi wynikami.

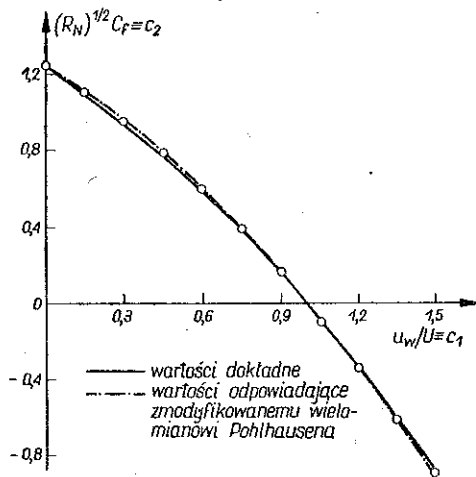
W szczególności należy stwierdzić: a) przyczyna niepowodzenia odmiany klasycznej wcale *nie tkwi w pominięciu warunku zgodności*, bowiem w przedziale

$$(4.4) \quad 0 \leq c_1 < 1$$

lepsze wyniki daje właśnie odmiana klasyczna; b) dołączenie warunku zgodności nie zapewnia bynajmniej metodzie Pohlhausena możliwości dostarczenia popraw-



Rys. 17



Rys. 18

nych rezultatów w całym zakresie prędkości u_w ścianki, bowiem, jak to wykazaliśmy, w przedziale

$$(4.5) \quad 0 < c_1 < H_N$$

odmiana zmodyfikowana w ogóle rozwiązania nie daje, a w przedziale (4.3) nie daje wyników poprawnych.

3. Uzyskane przez nas wyniki liczbowe, dotyczące funkcji $c_2(c_1)$ dla zmodyfikowanego wielomianu ósmego stopnia, nie są zgodne z analogicznymi wynikami Hugelmana [1], które przedstawiamy na rys. 18. Szczególne zastrzeżenia z naszej strony budzi przy tym fakt, iż Hugelman podał rozwiązanie również w przedziale (4.5). Naszym zdaniem, rozwiązanie w tym obszarze nie istnieje.

Literatura cytowana w tekście

1. R. D. HUGELMAN, *Application of Pohlhausen's method to stagnation M—point flow*, AIAA Journal, 11, 3 (1965), 2158.
2. H. SCHLICHTING und A. ULRICH, *Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent*, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung, 18–135.
3. R. D. HUGELMAN and D. R. HAWORTH, *An MHD boundary layer compatibility condition*, AIAA Journal, 7, 3 (1965), 1367–1369.
4. K. POHLHAUSEN, *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*, ZAMM, 4, 1 (1921), 252–268.
5. W. J. PROSNAK, *On the Viscous Flow Near the Stagnation Point on an Interface*. AFOSR 1952. Princeton University, Dept. Aero. Eng., Report 563 (1961).
6. W. J. PROSNAK, *A note on the application of Pohlhausen's method to the stagnation point flow*, Arch. Bud. Masz., 1, 10 (1963), 3–14. Erratum: Arch. Bud. Masz., 1, 13 (1966), 153–154.
7. S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford at the Clarendon Press, 1950, Vol. I, str. 161.
8. K. NICKEL, *Einge Eigenschaften von Lösungen der Prandtl'schen Grenzschicht-Differentialgleichungen*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, 1, 2 (1958), 1–31.

Резюме

О ДВУХ ФОРМАХ МЕТОДА ПОЛЬГАУСЕНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЮ К ТЕЧЕНИЮ В БЛИЗИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ

В работе дается описание двух форм метода Польгаусена и результаты их применения к течению вблизи точки торможения находящейся на подвижной стенке. Обе формы различаются условием согласности, которое является результатом вытекающим из уравнений пограничного слоя и касается производной скорости жидкости на стенке. Показано, что полиномы аппроксимирующие распределение скорости в слое, удовлетворяющим условию согласности описывают в общем хуже пограничный слой в исследуемом случае, чем полиномы не удовлетворяющие условию согласности. Этот результат подрывает заключения приведенные в работе Гутельмана [1], при чем он независит от степени аппроксимирующего полинома. Во всяком случае он справедлив для $N = 4; 6; 8$.

Summary

TWO VARIANTS OF THE POHLHAUSEN'S METHOD AND THEIR APPLICATION
TO THE STAGNATION POINT FLOW

This paper contains a description of two variants of the Pohlhausen's method and their application to the stagnation flow point at a moving wall. The two variants differ by the «compatibility» condition which is a conclusion from the boundary layer equations and concerns the derivative of the flow velocity at the wall. It is shown that those of the polynomials representing in an approximate manner the velocity distribution in the layer that satisfy the compatibility condition describe the boundary layer, in the case considered, in a worse manner than those that do not satisfy the compatibility condition. This result contradicts the conclusion of Hugelmann's paper, [1], and is independent of the degree N of the approximation polynomial. In any case it is valid for $N = 4; 6; 8$.

ZAKŁAD MECHANIKI CIECZY I GAZÓW
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 kwietnia 1968 r.
