

WPLYW KRZYWIZNY I PODATNOŚCI ŚCIANKI  
NA STATECZNOŚĆ HYDRODYNAMICZNĄ  
LAMINARNEJ NIEŚCISLIWEJ WARSTWY PRZYŚCIENNEJ (I)

EUGENIUSZ M Z Y K (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Zagadnienia stateczności hydrodynamicznej stały się już od końca ubiegłego wieku źródłem zainteresowań wielu badaczy i to zarówno z czysto eksperymentalnego, jak i teoretycznego punktu widzenia.

Wiadomo, że chociaż stacjonarne rozwiązania równań hydrodynamiki z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi powinny formalnie istnieć dla dowolnych liczb Reynoldsa, to przy odpowiednio dużych wartościach tej liczby nie udało się jeszcze zrealizować przepływu laminarnego. Fakt ten wiąże się z tym, że realnie istniejące w przyrodzie przepływy powinny nie tylko spełniać równania hydrodynamiki, lecz być również statecznymi, tzn. takimi, że pojawiające się w nich małe zaburzenia powinny znikać w czasie i nie powodować zmiany przepływu pierwotnego.

Badania stateczności hydrodynamicznej pozwalają na uzyskanie informacji o zjawisku przejścia od przepływu laminarnego do turbulentnego lub przynajmniej o początkowym etapie tego przejścia. Uzyskanie tych informacji jest bardzo ważne w związku ze znaną różnicą między obydwooma typami przepływów, objawiającą się m.in. w tym, że w przypadku przepływów laminarnych występują znacznie mniejsze siły oporu tarcia o ścianki niż w przypadku przepływu turbulentnego.

Dość ważną pozycję wśród zagadnień stateczności przepływu zajmuje problem stateczności hydrodynamicznej laminarnej warstwy przyściennej. Szczególne znaczenie analizy stateczności tego typu przepływu polega na tym, że wyniki tych analiz znajdują bezpośrednie zastosowanie np. przy ocenie możliwości zastosowania laminaryzacji warstwy przyściennej, zapewniającej zwiększenie osiągnięć statków latających lub pływających.

W niniejszej części I przedstawiono przegląd dotychczasowych badań w zakresie stateczności hydrodynamicznej przepływów nieściśliwych, zwracając przede wszystkim uwagę na rozwój klasycznej metody Heisenberga-Lina badania tego zagadnienia, a ponadto nawiązano do części II pracy, która stanowi próbę uwzględnienia wpływu podłużnej (względem kierunku przepływu) krzywizny oraz podatności wypukłej ścianki na stateczność laminarnej, nieściśliwej warstwy przyściennej.

Zagadnienie wpływu powyższych dwóch czynników na stateczność przepływu wiąże się z możliwością dokonania oceny, czy możliwe jest osiągnięcie zwiększenia doskonałości szyboców na drodze zastosowania pokryć z elastycznego materiału. Istnienie tego rodzaju możliwości mogłoby stanowić źródło dalszej ekspansji tego kierunku w rozwoju szybownictwa [1], w ramach którego zwiększenie osiągnięć uzyskuje się dzięki laminaryzacji warstwy przyściennej.

W nawiązaniu do zastosowanego w części II sposobu badania stateczności przepływu nad ścianką wypukłą warto podkreślić, że stateczność laminarnej, nieściśliwej warstwy przyściennej nad sztywną ścianką płaską analizuje się zazwyczaj przy użyciu następujących uproszczeń.

1. *Badany przepływ podstawowy w warstwie przyściennej uważa się za płasko-równoległy.* Pomija się więc normalną do ścianki składową prędkości przepływu i przyjmuje, że składowa wzdłużna prędkości jest funkcją tylko jednej współrzędnej przestrzennej.

Przepływ w warstwie przyściennej nie jest w rzeczywistości przepływem równoległym, ale składowa normalna prędkości przepływu jest zazwyczaj znacznie mniejsza od składowej wzdłużnej.

PRETSCH w r. 1941 [2] wykazał, że analiza stateczności płaskiego przepływu nierównoległego względem zaburzeń dwuwymiarowych sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego z równaniem różniczkowym cząstkowym, którego znane współczynniki funkcyjne zależą od dwóch współrzędnych przestrzennych  $x$  i  $y$ . Znalezienie zamkniętych rozwiązań takiego równania jest sprawą bardzo trudną i jeszcze nie rozwiązaną. Tym niemniej Pretschowi udało się dokonać oceny wpływu dodatkowych wyrazów, jakie w równaniu zaburzeń ORR-SOMMERFELDA [3] pojawiają się przy rozpatrywaniu przepływu prawie płasko-równoległego, oraz stwierdzić, że teoria przepływów płasko-równoległych daje dla tego typu przepływów zupełnie zadowalającą dokładność wyników. Doświadczenie SCHUBAUERA i SKRAMSTADA [4] potwierdziło prawdziwość powyższego stwierdzenia Pretscha.

2. *Stateczność przepływu bada się zazwyczaj w odniesieniu do zaburzeń dwuwymiarowych.* Dla płasko-równoległego, nieściśliwego przepływu SQUIRE [5] ustalił, że wartość krytycznej liczby Reynoldsa jest w przypadku zaburzenia trójwymiarowego większa niż w przypadku zaburzenia dwuwymiarowego. Wynik ten, znany pod nazwą «teorii Squire'a», pozwala badanie stateczności przepływów płasko-równoległych ograniczyć do analizy prostszych zaburzeń dwuwymiarowych. Jednakże «teoria Squire'a» nie rozstrzyga, który z powyższych typów zaburzeń ma w zakresie liczb Reynoldsa większych od krytycznej liczby Reynoldsa zaburzenia dwuwymiarowego większą wartość maksymalnej prędkości wzrostu zaburzeń.

3. *Przyjmuje się, że nałożone na przepływ zaburzenie jest małe* w tym sensie, że jego rozwój w czasie można opisać za pomocą zlinearyzowanych równań ruchu.

W miarę wzrostu wielkości zaburzenia nie można już odrzucać wyrazów nieliniowych w równaniach ruchu zaburzeń. Niektóre z tych wyrazów uwzględnił MEKSYN i STUART [6] oraz STUART [7], którzy zachowali wyrazy proporcjonalne do kwadratu amplitudy zaburzenia. Okazało się, że w pewnych przypadkach (np. dla płaskiego przepływu Poiseuille'a) zaburzenia ze skończoną amplitudą mogą być

niestateczne przy mniejszych wartościach liczb Reynoldsa niż zaburzenia nieskończenie małe. W innych natomiast przypadkach wpływ wyrazów nieliniowych okazał się usfateczniający, przy czym stwierdzono, że między laminarnym i w pełni turbulentnym przepływem należy dopuścić istnienie szeregu krytycznych liczb Reynoldsa, które rozdzielają różne nieliniowe obszary stateczności (LANDAU [8] i STUART [7]).

Można wyróżnić następujące nowe elementy, jakie do analizy stateczności warstwy przyściennej wprowadza zakrzywienie ścianki:

1) konieczność uwzględnienia dodatkowych sił masowych (siły odśrodkowe i Coriolisa), związanych bezpośrednio z krzywizną ścianki;

2) potrzebę uwzględnienia zmienności ciśnienia w przepływie podstawowym w kierunku stycznym do ścianki;

3) potrzebę uwzględnienia faktu, że ze wzrostem zakrzywienia ścianki rośnie nierównoległość przepływu;

4) konieczność doboru takiego typu zaburzeń, jaki jest najbardziej charakterystyczny dla niestateczności przepływu nad ścianką zakrzywioną.

Dotychczas uzyskane wyniki badań nad wpływem dodatkowych sił masowych na stateczność przepływu nad ścianką wypukłą mają charakter czysto jakościowy. Dla płynu nielepkiego badania takie przeprowadził GÖRTLER [9], który rozszerzył jedno z twierdzeń Rayleigha (<sup>1</sup>) na przypadek lekko zakrzywionej ścianki twierdząc, że niezbędnym warunkiem istnienia rosnących zaburzeń w płynie jest zmiana znaku wyrażenia  $U_0'' + KU_0'$  (gdzie  $U_0(y)$  określa rozkład prędkości równoległego przepływu podstawowego, natomiast  $K$  oznacza krzywiznę ścianki). W oparciu o to twierdzenie stwierdził on, że mała dodatnia krzywizna ścianki (ścianka wypukła) działa lekko uniestateczniająco na przepływ laminarnej warstwy przyściennej. Warto podkreślić, że twierdzenia Rayleigha wynikają z «nielepkiego» równania Orr-Somerfelda, które uzyskuje się po pominięciu wyrazów zależnych od lepkości w pełnym równaniu Orr-Somerfelda, będącym równaniem ruchu płaskich, poprzecznych fal zaburzeń.

Odmiernym od wyniku Görtlera jest doświadczalny wynik LIEPMANNA [10], który m.in. badał przepływ nad ścianką lekko zakrzywioną z prawie stałym rozkładem ciśnienia wzdłuż ścianki i dla takiego przepływu stwierdził lekko usfateczniający wpływ dodatniej krzywizny ścianki.

Uzyskane w niniejszej pracy wyniki ilościowe, dotyczące wpływu sił odśrodkowych i Coriolisa na stateczność przepływu nad lekko zakrzywioną ścianką wypukłą, otrzymano przy uwzględnieniu w równaniu zaburzeń wyrazów, które zależne są od lepkości. Wyniki te okazały się zgodne z jakościowymi wynikami Görtlera.

Zmienność ciśnienia w przepływie podstawowym uwzględniano już w badaniach stateczności przepływu nad ścianką płaską. Jako pierwsi badania takie przeprowadzili SCHLICHTING i ULRICH [11 i 12], którzy wpływ gradientu ciśnienia na stateczność przepływu uwzględniali jedynie przez zmianę kształtu profilu prędkości przepływu podstawowego. Traktując ten przepływ jako równoległy i aproksymując rozkład prędkości w warstwie przyściennej wielomianem czwartego lub szóstego stopnia

(<sup>1</sup>) Por. str. 489.

[12], otrzymali oni w wyniku analizy szereg krzywych stateczności neutralnej, z których każda liczona była przy stałej wartości parametru Pohlhausena  $A = (\delta^2/\bar{v})(d\bar{U}_\delta/d\bar{x})$ , związanego z gradientem ciśnienia przepływu podstawowego.

Okazało się, że w porównaniu do przepływu ze stałym rozkładem ciśnienia wzdłuż ścianki wzrost ciśnienia w kierunku przepływu ma wpływ silnie unistateczniający.

Względniając w niniejszej pracy wpływ gradientu ciśnienia na stateczność przepływu nad ścianką zakrzywioną, postąpiono w podobny sposób, jak Schlichting i Ulrich w przypadku ścianki płaskiej.

Wraz ze wzrostem zakrzywienia ścianki należy liczyć się z tym, że wielkość składowej prędkości przepływu, normalnej do ścianki, staje się porównywalna z wielkością składowej wzdłużnej prędkości. W miarę wzrostu zakrzywienia ścianki przepływ odbiega więc coraz bardziej od przepływu równoległego. Jednakże w przypadku małej krzywizny ścianki LIEPMANN [10] stwierdził doświadczalnie, że rozkład prędkości w przepływie nad taką ścianką niewiele odbiega od rozkładu prędkości w przepływie nad ścianką płaską.

W związku z tym oraz na podstawie wyników badań PRETSCHA (por. str. 2) przyjęto w niniejszej pracy, że rozpatrywany przepływ podstawowy nad ścianką o małej krzywiznie może być traktowany jako przepływ równoległy.

Stateczność przepływu bada się zazwyczaj w odniesieniu do dwóch typów zaburzeń: w odniesieniu do poprzecznych fal zaburzeń (są to dwuwymiarowe zaburzenia nazywane falami Tollmiena-Schlichtinga) lub w odniesieniu do podłużnych fal zaburzeń (czyli względem zaburzeń trójwymiarowych, nazywanych wirami Taylora-Görtlera).

Badania teoretyczne GÖRTLERA [9, 43 i 13] oraz eksperymentalne LIEPMANNA [10 i 47] wykazały, że najbardziej charakterystycznymi zaburzeniami w przypadku przepływu nad ścianką wklęsłą są zaburzenia w postaci podłużnych fal zaburzeń. Okazało się bowiem, że wartość krytycznej liczby Raynoldsa jest dla tego typu zaburzenia niższa niż dla zaburzenia dwuwymiarowego w postaci poprzecznych fal zaburzeń. Ponadto badania te wykazały [13], że niestateczność przepływu względem podłużnych fal zaburzeń w ogóle nie występuje w przypadku przepływu nad ścianką płaską lub wypukłą. Dlatego też stateczność przepływu nad ścianką wypukłą bada się w niniejszej pracy w odniesieniu do poprzecznych fal zaburzeń czyli w odniesieniu do fal Tollmiena-Schlichtinga.

## 2. Przegląd dotychczasowych badań w zakresie stateczności hydrodynamicznej przepływów nieściśliwych

2.1. Zarys rozwoju badań nad statecznością przepływu w pobliżu ścianek sztywnych. Szczegółowy przegląd badań eksperymentalnych i teoretycznych, dotyczących zagadnienia przejścia od przepływu laminarnego do turbulentnego, znaleźć można w pracach wielu badaczy tego zagadnienia (np. SCHLICHTINGA [14], DRYDENA [15], STUARTA [16], LINA [17 i 3], CHANDRASEKHARA [18], SHENA [19], MONINA i JAGŁOMA [20], KOROTKINA [21], BENJAMINA [22]).

Szczególną uwagę zwrócono na przeglądy z ostatnich lat: na przeglądy w pracach MONINA i JAGŁOMA [20], SHENA [19] oraz KOROTKINA [21], dotyczące stateczności przepływu w pobliżu ścianek sztywnych, oraz przeglądy w pracach BENJAMINA [22] oraz KOROTKINA [21], dotyczące stateczności przepływu w pobliżu ścianek elastycznych.

Pierwsza wzmianka o stateczności hydrodynamicznej pojawiła się w pracy HAGENA [23], który zajmował się badaniem przepływu wody w prostych rurach o przekroju kołowym i niedużych promieniach. Stwierdził on, że przy stopniowym zmniejszaniu lepkości wody (przez jej ogrzewanie) prędkość przepływu wzrasta początkowo do pewnej wartości granicznej i wypływająca z rury struga wody ma charakter przepływu laminarnego, po czym prędkość przepływu maleje, a wypływająca struga wody wykazuje charakterystyczne cechy przepływu turbulentnego.

Istnienie niestateczności hydrodynamicznej stwierdził doświadczalnie również REYNOLDS [24] wykonując swoje znane doświadczenie z przepływem w szklanej rurze, do której wprowadził ciekłą barwiącą ciecz. Za pomocą rozważań o podobieństwie mechanicznym przepływów lepkich Reynolds podał w r. 1894 [25] ogólne kryterium przejścia od przepływu laminarnego do turbulentnego. Stwierdza ono, że dopóki wartość bezwymiarowej liczby  $Re = UD/\nu$  (gdzie  $U$  oznacza średnią prędkość przepływu,  $D$  średnicę rury,  $\nu$  kinematyczny współczynnik lepkości) nie przekroczy pewnej granicznej wartości  $Re_{kr}$ , przepływ jest przepływem laminarnym oraz że przy  $Re > Re_{kr}$  przepływ staje się turbulentny.

Pierwsze wyniki teoretycznych badań stateczności hydrodynamicznej uzyskano dla przepływu nielepkiego.

Istnienie niestateczności dla płynu idealnego stwierdził RAYLEIGH (1879), który zajmował się możliwością niekorzystnego wpływu napięcia powierzchniowego na zachowanie się strugi płynu, oraz HELMHOLTZ (1882), który rozważał przypadek niestateczności, związany z istnieniem nieciągłości prędkości na granicy dwóch płynów.

RAYLEIGH [26] badał stateczność przepływu równoległego między dwiema płaskimi, nieruchomymi ściankami (płaski przepływ Poiseuille'a) przyjmując, że rozkład prędkości w badanym przepływie ma kształt wieloboku uwzględniającego zerowanie się prędkości na ściankach. Pomijał on przy tym wpływ lepkości na małe zaburzenia, których rozwój lub zanik w czasie określa niestateczność lub stateczność badanego przepływu podstawowego. Rayleigh stwierdził, że przepływ z wypukłymi profilami prędkości jest stateczny w odniesieniu do małych zaburzeń oraz że profile prędkości o jednym lub kilku kątach wklęsłych mogą być niestateczne.

Rozszerzeniem powyższego stwierdzenia są dwa twierdzenia Rayleigha, które podkreślają wagę krzywizny profili prędkości oraz konieczność dokładnego jej określenia przy rozpatrywaniu zagadnień stateczności przepływu.

Pierwsze twierdzenie Rayleigha mówi, że niezbędnym warunkiem istnienia zaburzeń rosnących w czasie jest obecność punktu przegięcia na profilu prędkości przepływu podstawowego  $U_0(y)$  (tzn. istnienia takiego punktu, w którym  $U_0'' = 0$ ). Sporo lat później TOLLIEN ustalił [27], że warunek powyższy jest dla profili prędkości

w warstwie przyściennej oraz profili symetrycznych także warunkiem wystarczającym wystąpienia rosnących zaburzeń.

Natomiast drugie twierdzenie konstatuje, że dla profili prędkości, nie posiadających punktu przegięcia, istnieje wewnątrz przepływu taki punkt krytyczny  $y=y_c$ , w którym prędkość przepływu podstawowego  $U_0(y)$  pokrywa się z prędkością rozchodzenia się neutralnych zaburzeń  $c_r$ . Do twierdzeń tych Rayleigh doszedł na drodze analizy tzw. «nielepkiego» równania Orr-Sommerfelda.

Równanie różniczkowe ruchu zaburzonego z uwzględnieniem wyrazów zależnych od lepkości zostało najpierw zbadane przez SOMMERFELDA w r. 1908 [28]. Badania te zostały następnie rozszerzone przez MISESA [29], HOPFA [30] i innych, przy czym obiektem badania wszystkich tych badaczy był płaski przepływ Couette'a, tzn. przepływ z liniowym rozkładem prędkości między dwoma równoległymi płaskimi ściankami.

W wyniku tych badań stwierdzili oni, że przepływ Couette'a jest stateczny dla dowolnych liczb Reynoldsa i dla dowolnych długości fal ruchu zaburzonego. Z jednej strony, wobec rozpowszechnionego wówczas mniemania, że lepkość może mieć tylko tłumiące działanie na zaburzenia, wynik ten zdawał się być logicznym następstwem wyniku ORRA, który jeszcze w latach 1906 – 1907 [31] stwierdził stateczność płaskiego przepływu Couette'a przy pominięciu wyrazów lepkości w równaniu zaburzeń. Jednakże z drugiej strony wynik ten był wyraźnie sprzeczny z wynikiem doświadczeń, które przy liczbie Reynoldsa  $Re = Uh/\nu = 1900$  (gdzie  $h$  oznacza odstęp między ściankami, a  $U$  maksymalną prędkość przepływu) wykazały przejście laminarnej formy przepływu w turbulentną.

W związku z powyższym przez długi okres czasu uważano metodę małych zaburzeń za nieprzydatną do rozwiązywania zagadnień dotyczących przejścia do turbulencji.

Pierwsze badania stateczności przepływu typu warstwy przyściennej przeprowadzili: PRANDTL w r. 1921 [32] i TIETJENS w r. 1925 [33]. Rozpatrywali oni przepływ nad płaską płytką, przy czym rzeczywisty profil prędkości tego przepływu zastąpili profilem, który złożony był z szeregu odcinków prostych, nachylonych do siebie pod różnymi kątami. Doszli oni do zupełnie nieoczekiwanego wyniku, że przy uwzględnieniu lepkości rozpatrywany przepływ jest niestateczny dla dowolnych liczb Reynoldsa i to nawet w przypadku wypukłych profili prędkości. Parę lat później TOLLMIEŃ [34] udowodnił, że wynik ten otrzymali oni dlatego, że krzywizna przyjętego przez nich profilu prędkości była wszędzie równa zeru.

W r. 1924 ukazała się praca HEISENBERGA [35], który za pomocą metody małych zaburzeń rozpatrywał zagadnienia stateczności płaskiego przepływu Poiseuille'a, uwzględniając zmienność krzywizny występującego w nim parabolicznego profilu prędkości. Opierając się na wynikach badania asymptotycznego zachowania się rozwiązań równania Orr-Sommerfelda przy dużych liczbach Reynoldsa doszedł on do następującego wyniku: w przypadku płynu lepkiego z odpowiednio dużą liczbą Reynoldsa płaski przepływ Poiseuille'a jest przepływem niestatecznym, chociaż w przypadku nielepkim (przy  $Re = \infty$ ) przepływ ten jest stateczny.

Ten paradoksalny na owe czasy i dopiero o wiele lat później wyjaśniony wynik świadczy o podwójnej roli sił lepkości, których wpływ na zaburzenia może być nie tylko tłumiący, lecz również unistateczniający. Ten unistateczniający wpływ lepkości związany jest z możliwością przechodzenia energii od przepływu podstawowego do przepływu zaburzającego, przy czym możliwość ta może zrealizować się tylko w przypadku rzeczywistego przepływu lepkiego.

Jednocześnie praca Heisenberga spotkała się z szeregiem zastrzeżeń, a uzyskany przez niego wynik nie był ogólnie uznawany, o czym świadczy m.in. fakt, że jeszcze w r. 1948 ukazała się praca [36], w której starano się udowodnić stateczność płaskiego przepływu Poiseuille'a.

W r. 1929 ukazała się wspomniana praca TOLLMIENA [34]. Metodą małych zaburzeń Tollmien rozpatrywał stateczność przepływu w warstwie przyściennej, przy czym w przybliżeniu przyjmował ten przepływ za równoległy, a rzeczywisty profil prędkości aproksymował profilem złożonym z odcinków prostych i parabol. Tollmien pierwszy otrzymał «krzywą stateczności neutralnej» w postaci krzywej  $\alpha = \alpha(\text{Re})$  (gdzie  $\alpha$  jest liczbą falową zaburzenia, związaną zależnością  $\alpha = 2\pi/\lambda$  z długością fali zaburzenia  $\lambda$ ), która rozgranicza obszar zaburzeń niestatecznych od obszaru zaburzeń statecznych.

Tollmien pokazał, że wpływ lepkości na zaburzenia należy uwzględnić nie tylko w bezpośredniej bliskości ścianki, jak to zrobili Prandtl i Tietjens, lecz również w otoczeniu krytycznej linii prądu, dla której prędkość rozchodzenia się zaburzeń pokrywa się z prędkością badanego przepływu podstawowego. Okazało się, że o ile krzywizna profilu prędkości jest dla krytycznego punktu ( $y = y_c$ ) różna od zera, to składowa wzdłużna  $u$  prędkości zaburzenia osiąga w przypadku nielepkim nieskończenie dużą wartość w tym punkcie. Świadczy to o konieczności uwzględnienia wpływu sił lepkości w otoczeniu krytycznej linii prądu; z uwagi na to, że w rzeczywistym przepływie lepkiem mogą występować jedynie ograniczone wartości prędkości przepływu. Jednocześnie tłumaczy to wspomniany powyżej nieoczekiwany wynik Prandtla i Tietjensa, którzy rozpatrując profil prędkości nad płaską ścianką, złożony z odcinków prostych, a więc z zerową krzywizną, stwierdzili unistateczniający wpływ lepkości przy dowolnych liczbach Reynoldsa.

Podana przez Tollmiena metoda wyznaczenia krzywej stateczności neutralnej została później rozszerzona na przypadek dowolnego profilu prędkości. Dokonał tego Tollmien [37 i 38] oraz Schlichting [39 i 40]. SCHLICHTING wykorzystał ideę Tollmiena nie tylko przy badaniu stateczności warstwy przyściennej nad ścianką płaską, lecz również do analizy stateczności warstwy przyściennej w pobliżu wewnętrznej powierzchni obracającego się walca [41] oraz przepływu wokół nagrzanej płytki [42].

Wszystkie wspomniane powyżej badania stateczności warstwy przyściennej nad ścianką płaską przeprowadzono przy założeniu, że ciśnienie wzdłuż ścianki jest stałe. Stateczność warstwy przyściennej o niezerowym (w kierunku przepływu) gradiencie ciśnienia rozpatrzyli pierwsi SCHLICHTING i ULRICH [11 i 12] oraz PRETSCH [10]. Wpływ gradientu ciśnienia na stateczność uwzględnili oni jedynie przez wpływ kształtu profilu prędkości przyjmując, że przepływ jest lokalnie równo-

legły. Do aproksymacji rozkładu prędkości w warstwie przyściennej Schlichting i Ulrich zastosowali rodzinę profili Pohlhausena z wielomianem czwartego i szóstego stopnia, a Pretsch — rodzinę profili Howartha.

FINSTON [44] podobnie jak Schlichting i Ulrich do aproksymacji profilu prędkości zastosował wielomian szóstego stopnia, przy czym wartość krytycznych liczb Reynoldsa uzyskiwał bez wyznaczania krzywych stateczności neutralnej.

Wpływ gradientu ciśnienia na stateczność laminarnej warstwy przyściennej okazał się zgodny z poczynionymi już wcześniej obserwacjami. Stwierdzono bowiem, że krytyczne wartości liczb Reynoldsa są znacznie mniejsze przy wzrastaniu ciśnienia oraz znacznie większe przy malejącym ciśnieniu niż w przypadku przepływu o stałej wartości ciśnienia wzdłuż ścianki. Ponadto wzrost ciśnienia w kierunku przepływu powodował pojawienie się punktu przegięcia na profilu prędkości, czyniąc przepływ niestatecznym nawet w przypadku zerowej lepkości, co objawia się istnieniem niezerowej asymptoty dla jednej z gałęzi krzywych stateczności neutralnej dla  $Re \rightarrow \infty$ .

W r. 1945 ukazała się fundamentalna praca LINA [17], w której dokonał on krytycznego przeglądu całej istniejącej do tej pory teorii stateczności przepływów płasko-równoległych oraz od nowa wykonał obliczenia stateczności dla podstawowych przypadków przepływu. Rozwinął przy tym metodę analizy asymptotycznego zachowania się rozwiązań równania Orr-Sommerfelda, która została zapoczątkowana przez Heisenberga.

Lin dokonał m.in. zmiany postaci równania charakterystycznego, wprowadzając zamiast funkcji Tietjensa  $F(z)$ , występującej po lewej stronie tego równania, tzw. zmodyfikowaną funkcję Tietjensa  $\mathcal{F}(z) = [1 - F(z)]^{-1}$ . Dzięki temu stało się możliwe zastosowanie analitycznej metody rozwiązania równania charakterystycznego, gdyż prawa strona tego równania okazała się wtedy w przybliżeniu (dla małych wartości prędkości zaburzeń  $c_r$ ) równa wspomnianej funkcji  $u + iv$  z urojoną częścią  $v$ , która za przykładem Lina może być przyjęta jako niezależna od liczby falowej zaburzenia  $\alpha$ .

Lin dokonał również oceny całek występujących w wyrażeniu na funkcję  $u + iv$ , a będących współczynnikami w rozwinięciu tej funkcji względem liczby falowej zaburzenia  $\alpha$ ; ponadto podał metodę numerycznego wyznaczania pewnej skończonej liczby tych całek.

Uzyskana przez Lina wartość krytycznej liczby Reynoldsa  $Re_{kr}^* = \bar{U}_\delta \bar{\delta}^* / \bar{v}$  (gdzie  $\bar{\delta}^*$  jest grubością zastępczą przemieszczenia warstwy przyściennej) pokrywa się z wartością uzyskaną przez Tollmiena i równa jest 420 (Schlichting uzyskał  $Re_{kr}^* = 575$ ). Różnica występuje natomiast w kształcie krzywej stateczności neutralnej, przy czym zakres niestatecznych długości fal, zawarty między dwoma gałęziami krzywej stateczności neutralnej, jest w przypadku wyniku Lina większy niż w przypadku wyniku Tollmiena.

Dla małych wartości liczb falowych zaburzenia  $\alpha$  oraz małych wartości prędkości zaburzeń  $c$  Lin uzyskał bardzo proste zależności na część rzeczywistą i urojoną prawej strony równania charakterystycznego [3]. Zależności te znane są pod nazwą uproszczonych wzorów Lina.



Z uwagi na to, że przepływ typu warstwy przyściennej nie jest w rzeczywistości przepływem równoległym, już w r. 1938 TAYLOR [45] wysunął wątpliwości co do dopuszczalności stosowania dla tego przepływu teorii fal Tollmiena-Schlichtinga.

Wątpliwości te zostały usunięte przez doświadczenia SCHUBAUERA i SKRAMSTADA [4], które wykonane zostały w tunelu o wyjątkowo małej turbulencji własnej

$$\left[ \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}}{U} \right]_{\min} = 0,003-0,0002$$

i dotyczyły właśnie przepływu typu warstwy przyściennej nad płaską płytką. W warstwie przyściennej badacze ci umieszczali cienką metalową taśmę, którą za pomocą elektromagnesu wprawiali w drgania o ustalonej częstotliwości. Okazało się, że w płynie pojawiają się wtedy neutralne (tzn. nierosnące i niemalejące) zaburzenia prędkości o dosyć często sinusoidalnym charakterze, które dość dobrze odpowiadały punktom leżącym na «teoretycznej» krzywej stateczności neutralnej, szczególnie w przypadku krzywej stateczności neutralnej Lina.

Obszerne zestawienie teoretycznych i doświadczalnych wyników badania stateczności przepływu znaleźć można np. w pracy KOROTKINA [46]. Zamieszczone w tej pracy zestawienie obejmuje zarówno wyniki badań stateczności przepływu o zerowym gradiencie ciśnienia, jak i przepływów z różnymi od zera gradientami ciśnienia, mierzonymi wzdłuż ścianki.

Na zakończenie niniejszego przeglądu należy wspomnieć o stosowanej w ostatnich latach metodzie asymptotycznego kojarzenia rozwiązań (por. np. [68]) przy wyznaczaniu rozwiązań równania Orr-Sommerfelda. Możliwość zastosowania tej metody wiąże się z tym, że w równaniu Orr-Sommerfelda, stanowiącym podstawę przy badaniu stateczności przepływów równoległych, występuje mały parametr  $1/\alpha \text{Re}$  jako współczynnik przy najwyższej pochodnej ( $\alpha$  jest bezwymiarową liczbą falową zaburzenia, a  $\text{Re}$  oznacza liczbę Reynoldsa).

W przypadku stosowanej dotychczas powszechnie klasycznej metody Heisenberga-Lina badania równania Orr-Sommerfelda—cztery liniowo niezależne rozwiązania tego równania znajduje się w postaci dwóch par rozwiązań: pary rozwiązań «lepkich» oraz pary rozwiązań «nielepkich», nie uwzględniających lepkości przepływu zaburzającego, nałożonego na badany przepływ podstawowy. Przy stosowaniu tej metody występuje konieczność określenia właściwej drogi, po jakiej należy całkować przy uzyskiwaniu rozwiązań «nielepkich» w płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\zeta = y + iz$  (w płaszczyźnie tej dokonuje się przedłużenia analitycznego pola prędkości przepływu podstawowego zakładając, że profil prędkości tego przepływu  $U_0(y)$  jest dany przez funkcję analityczną  $U_0(\zeta)$ ). W wyniku dyskusji przeprowadzonej przez Lina udało się określić własności tej drogi, przy czym okazało się, że jej przebieg zależy od usytuowania w płaszczyźnie zmiennej  $\zeta$  punktu krytycznego  $\zeta = \zeta_c$  (określonego przez związek  $U_0(\zeta_c) = 0$ , gdzie  $c$  jest zespoloną prędkością zaburzeń) oraz od znaku gradientu prędkości przepływu podstawowego w punkcie krytycznym  $U'_c$ .

Warto podkreślić, że wspomnianą powyżej dyskusję Lina zastępuje w metodzie asymptotycznego kojarzenia rozwiązań ustalona procedura kojarzenia rozwiązań wewnętrznych i zewnętrznych.

Warto również podkreślić, że zastosowanie metody asymptotycznego kojarzenia rozwiązań umożliwia uwzględnienie w rozwiązaniach równania Orr-Sommerfelda nie tylko faktu istnienia warstwy krytycznej, usytuowanej w odległości  $y_c$  od konturu opływanej ścianki, lecz również wtórnej warstwy przyściennej o strukturze falowej. Tej drugiej warstwy nie uwzględniają rozwiązania uzyskane klasyczną metodą Heisenberga-Lina, która ma zastosowanie tylko w przypadku małych (w odniesieniu do grubości warstwy przyściennej) wartości  $y_c$ .

Szczegóły związane z realizacją wspomnianej powyżej możliwości znaleźć można w pracy GRAEBELA [77], który stosuje metodę asymptotycznego kojarzenia rozwiązań do wyznaczania równań charakterystycznych, określających warunki stateczności przepływów z warstwami krytycznymi, usytuowanymi w różnych, ale skończonych odległościach od konturu ścianki.

Z pracy Graebela można wyciągnąć wniosek, że w przypadku punktu krytycznego  $y_c$ , usytuowanego blisko ścianki (w tym sensie, że wtórna warstwa przyścienna o grubości  $(\alpha Re)^{-1/2}$  znajduje się wewnątrz warstwy krytycznej o grubości  $(\alpha Re)^{-1/3}$ ), można nie uwzględniać w rozwiązaniach równania Orr-Sommerfelda istnienia wtórnej warstwy przyściennej, a należy ją uwzględniać, gdy punkt  $y_c$  usytuowany jest w większej odległości od ścianki. W tym pierwszym przypadku Graebel uzyskał metodą asymptotycznego kojarzenia rozwiązań równanie charakterystyczne, które pokrywa się z odpowiednim równaniem uzyskanym przez Lina metodą klasyczną. Potwierdza to dopuszczalność stosowania metody klasycznej w przypadku małych wartości odległości  $y_c$  punktu krytycznego od konturu opływanej ścianki.

**2.2. Zarys rozwoju badań nad wpływem podatności ścianki na stateczność przepływu.** Koncepcja zastosowania elastycznej ścianki w celu laminaryzacji warstwy przyściennej pojawiła się w następstwie badań nad życiem zwierząt morskich.

Duże zainteresowanie wzbudziły wyniki badań niektórych badaczy, wg których prędkość pływania tuńczyka i ryby-pily, może osiągnąć wartości rzędu 90 do 130 km/h [48]. Jednak szczególnie zainteresowanie badaczy wzbudziły delfiny, chociaż ich maksymalna prędkość poruszania się w wodzie osiąga tylko wartość 36 km/h [49].

Już w r. 1936 GRAY [50] analizując ruch różnych przedstawicieli świata zwierzęcego sformułował tzw. biohydrodynamiczny paradoks. Gray doszedł bowiem do wniosku, że prędkości osiągane przez delfiny są znacznie większe od tych, jakie wynikają z oceny mocy ich mięśni oraz z analizy porównawczej różnych zwierząt. Postawiono hipotezę, że delfiny zaopatrzone są w nieznanne dotychczas człowiekowi urządzenia, dzięki którym opór ciała delfina w wodzie jest znacznie mniejszy od oporu odpowiedniego sztywnego modelu jego ciała. Hipotezę tę potwierdziły wyniki doświadczenia, jakie w r. 1966 przeprowadzono w Morzu Czarnym [50]. W doświadczeniu tym użyto kamery filmowej, za pomocą której uzyskano charakterystyki aerodynamiczne bezwładnego ruchu delfina. Następnie porównano uzyskane dane

z analogicznymi charakterystykami sztywnego modelu, mającego analogiczny kształt i wymiary. Wynik tego porównania potwierdził istnienie paradoksu Gray'a.

LANG [51] dokonał systematyzacji badań nad ruchowymi własnościami różnych zwierząt morskich i doszedł do wniosku, że ich moc na jednostkę masy mięśni jest porównywalna z odpowiednią mocą dla sportowca. Ponadto stwierdził on, że fakt osiągania dużych prędkości pływania przez delfiny i inne zwierzęta morskie daje się łatwo wytłumaczyć, jeżeli założy się, że warstwa przyścienna na ich ciele jest prawie lub w pełni laminarna.

W pracy FOCKE'A z r. 1965 [49] znaleźć można analizę dostępnych danych o badaniach hydrodynamicznych, dokonanych na delfinach oraz odpowiednią bibliografię.

Stwierdzono [52], że skóra delfina zaopatrzona jest w układ fałd skórnych, ułożonych w zasadzie wzdłuż podłużnej osi ciała. Ponadto skóra ta zaopatrzona jest w układ brodawek skórnych rozłożonych wzdłuż fałd i tworzących z nimi określone kąty pochyleń ( $10^\circ - 25^\circ$  w przedniej i środkowej części ciała oraz  $55^\circ - 80^\circ$  — na dziobie, na bocznej powierzchni płetw, tzn. tam, gdzie występują małe gradienty ciśnienia).

Zdaniem BABIENKI i SURKINY [52] bardzo ważną rolę w tłumieniu płaskich fal zaburzeń w warstwie przyściennej delfina odgrywa kąt pochyleń brodawek skórnych, a w tłumieniu zaburzeń przestrzennych — zróżnicowanie gęstości naskórka oraz rozłożenie fałd i brodawek skórnych.

Obecnie panuje przekonanie [53 i 52], że na stabilizację warstwy przyściennej, powstającej na ciele delfina, mają wpływ następujące czynniki:

- a) znaczny ujemny gradient ciśnienia na granicy warstwy przyściennej,
- b) odpowiednia gładkość powierzchni ciała delfina;
- c) odpowiednie własności elastyczne skóry delfina, przy których możliwa jest propagacja fal powierzchniowych na jego skórze;
- d) odpowiednia różnica temperatur między ciałem delfina i jego otoczeniem, powodująca obniżenie lepkości wody w warstwie przyściennej;
- e) korzystna niestacjonarność przepływu w warstwie przyściennej, będąca wynikiem ruchów drgających całego ciała, jego części oraz skóry delfina.

Zasadniczy krok w kierunku poznania wpływu elastyczności ścianki na stateczność przepływu dokonał KRÄMER [54, 55 i 56]. Doświadczenia jego udowodniły ostatecznie, że opór ciała z elastycznym pokryciem może być mniejszy od oporu sztywnego modelu tego ciała.

Jedno z doświadczeń Krämera [55] dotyczy elastycznego pokrycia, które zbudowane było z warstwy gumy o gładkiej powierzchni, podpartej na sztywnej konstrukcji podłoża układem słupków z tego samego materiału; przestrzeń między słupkami wypełniona była płynem posiadającym własność tłumienia drgań. Pokrycie to naklejono na badany model o kształcie ciała obrotowego (długości 2,44 m i średnicy 6,35 cm), które na cienkiej stalowej lince holowano za statkiem z prędkością do 65 km/h.

Wykonane w tym doświadczeniu pomiary wykazały, że przy (odniesionej do długości modelu) liczbie Reynoldsa równej  $Re=1,5 \times 10^7$  maksymalne obniżenie

oporu modelu z elastycznym pokryciem wynosi 59% w porównaniu do modelu sztywnego.

Wynik ten Krämer tłumaczy sztuczną laminaryzacją warstwy przyściennej na badanym modelu, spowodowaną tłumiącym działaniem elastycznego pokrycia na pulsacje prędkości zaburzenia.

W pracy z r. 1962 [56] Krämer opisuje eksperymenty, w których zastosował inny typ elastycznego pokrycia. Zamiast słupków z gumy, podpierających górną powłokę elastycznego pokrycia, Krämer zastosował żebra. Dzięki temu efektywność działania nowego pokrycia nie malała w czasie, jak to miało miejsce w przypadku pokrycia «słupkowego» (które po rocznej eksploatacji nie dawało już prawie żadnego, w porównaniu do modelu sztywnego, obniżenia oporu).

Krämer zbadał dwanaście modeli z «żeberkowymi» pokryciami, przy czym statek holujący mógł poruszać się z prędkością do 74 km/h.

Krämer stwierdził, że obniżanie sztywności gumy podwyższa efektywność działania elastycznego pokrycia do tego momentu, gdy sztywność ta nie jest mniejsza od  $49,8 \text{ kG/cm}^3$ . Ponadto okazało się, że dla pokrycia typu «żeberkowego» o sztywności  $49,8 \text{ kG/cm}^3$  optymalna grubość powłoki gumy oraz optymalna lepkość płynu, wypełniającego przestrzeń między żeberkami, wynoszą odpowiednio 0,76 mm, oraz  $75 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

Zachęcające wyniki doświadczeń Krämera zainspirowały teoretyczne badania zagadnienia stateczności laminarnej warstwy przyściennej nad ścianką elastyczną. Badania takie podjęli np. BENJAMIN [57, 58 i 59], LANDAHL [60], BETCHOV [61], BOGGS i TOKITA [62], HAINS i PRICE [63], BECKER [64 i 65], NONWEILER [66], KOROTKIN [67 i 46], KAPLAN [69], GYORGYFALVY [70], TAKEMATSU [71]; wszyscy ci badacze analizują stateczność przepływu nad ścianką podatną, ale o płaskiej powierzchni przed odkształceniem.

Pionier tych badań teoretycznych, BENJAMIN [58], zastosował do analizy tego zagadnienia metodę małych zaburzeń, którą już wcześniej z powodzeniem stosowano przy analizie stateczności przepływu nad ścianką sztywną.

Benjamin przyjmuje, że odkształcenie ścianki jest wynikiem działania na nią pulsacji ciśnienia zaburzenia w płynie, przy czym zakłada, że amplituda fali powierzchniowej, rozchodzącej się na ściance, jest mała. To ostatnie założenie pozwala w pierwszym przybliżeniu nie uwzględniać wpływu odkształcenia ścianki na rozkład prędkości w badanym przepływie podstawowym. Dzięki temu Benjamin sprowadza analizę stateczności przepływu nad ścianką podatną do badania zagadnienia brzegowego z równaniem różniczkowym, które jest identyczne z odpowiednim równaniem dla przypadku ścianki sztywnej (równanie Orr-Sommerfelda).

Wpływ podatności ścianki na stateczność przepływu uwzględnia Benjamin w ten sposób, że w porównaniu do ścianki sztywnej modyfikuje warunki brzegowe dla amplitudy funkcji prądu zaburzenia  $f(y)$  na dolnej granicy warstwy przyściennej. Konkretna postać tych zmodyfikowanych warunków brzegowych jest następująca:

$$f(0) = ca, \quad f'(0) + U_0'(0)a = 0,$$

gdzie  $c$  jest zespoloną prędkością fali zaburzeń w płynie, natomiast  $a$  jest zespoloną amplitudą fali odkształcenia ścianki. Obydwa te warunki wynikają z wymagania, aby dla przepływu lepkiego względna prędkość cząstek płynu względem ścianki zerowała się na powierzchni ścianki odkształconej (przy czym powyższa postać tych warunków jest spełniona, gdy  $a$  jest małe oraz gdy długość fali ścianki jest znacznie większa od amplitudy  $a$  tej fali).

Benjamin założył, że ścianka może odkształcać się jedynie w kierunku normalnym do jej konturu przed odkształceniem.

Jako model elastyczny ścianki Benjamin przyjmuje membranę o znanej masie na jednostkę pola powierzchni  $M$  [kg/m<sup>2</sup>] i znanej sile naciągu na jednostkę długości  $T$  [N/m] oraz zakłada, że na element membrany działa w czasie jego ruchu siła oporu, którą charakteryzuje współczynnik tłumienia wiskotycznego na jednostkę powierzchni membrany  $D$  [Ns/m<sup>3</sup>].

Nieznaną amplitudę fali ścianki  $a$ , występującą w powyższych dwóch warunkach brzegowych, Benjamin wyraża przez podatność dynamiczną ścianki oraz przez amplitudę fali ciśnienia zaburzenia na ściance, przy czym pierwszą wielkość wyznacza z równania ruchu ścianki, a drugą z równań Naviera-Stokesa dla przepływu zaburzającego (amplitudę fali ciśnienia zaburzenia na ściance Benjamin wyznacza konkretnie z dokładnością do wyrazów «nielepkich»).

Ograniczając się do takich profili prędkości przepływu podstawowego, dla których spełnione jest przybliżenie  $c \approx U_0'(0) y_c$ , Benjamin otrzymał bardzo prostą postać równania charakterystycznego. Równanie to różniło się od odpowiedniego równania charakterystycznego dla przypadku ścianki sztywnej jedynie prawą stroną, która zawierała dodatkowy wyraz, zależny od własności ścianki elastycznej oraz liczby falowej zaburzenia  $\alpha$  i prędkości  $c$ .

Benjamin ograniczył się do badań jakościowych uzyskanego równania charakterystycznego i dla konkretnych wartości parametrów, charakteryzujących elastyczną ściankę nie wyznaczył krzywej stateczności neutralnej.

Warto podkreślić, że zastosowanie elastycznej ścianki, oprócz ustafeczniającego wpływu na zaburzenia typu fal Tollmiena-Schlichtinga, może być związane z pojawieniem się nowych typów niestateczności, nie występujących w przypadku przepływu nad ścianką sztywną. W układzie ścianka podatna-przepływ mogą bowiem wystąpić jednocześnie trzy typy niestateczności, którym Benjamin [58] nadał nazwę niestateczności, odpowiednio «klasy A», «klasy B» oraz «klasy C» (do definicji powyższych typów niestateczności powrócimy w p. 2.3).

W pracy z r. 1963 [59] Benjamin podał najbardziej charakterystyczne cechy powyższych typów niestateczności dokonując tego na przykładzie analizy modelowego równania ruchu, a ponadto określił warunki występowania tych niestateczności w konkretnym przypadku lekko rozpraszającej ścianki elastycznej, opływanej nielepkim przepływem podstawowym.

Praca LANDALHA [60] stanowi dalsze rozwinięcie idei zawartych w pracy Benjamina [58]. Można ją uważać za pierwszy krok na drodze wyjaśnienia ogólnych zasad efektywnej pracy elastycznego pokrycia, zapewniającej laminaryzację warstwy

przyściennej. Landahl stosuje tę samą metodę analizy stateczności oraz ten sam typ modelu elastycznej ścianki, jaki zastosował Benjamin.

W stosunku do Benjamina krokiem naprzód jest uzyskanie konkretnej postaci krzywych stateczności neutralnej, które Landahl wyznaczał dla profilu Blasiusa i szeregu kombinacji parametrów, charakteryzujących elastyczną ściankę. Przy wyznaczaniu tych krzywych Landahl posłużył się metodą analityczno-wykreślną, przy czym występujące w równaniu charakterystycznym wyrażenie  $u+iv$  obliczał na podstawie «uproszczonego wzoru» Lina.

Przy pewnej kombinacji parametrów związanych z masą i siłą naciągu membrany oraz z wielkością tłumienia w ściance, Landahl otrzymał w płaszczyźnie  $Re, \alpha$  jednocześnie dwie krzywe stateczności neutralnej, z których jedna obejmowała obszar niestatecznych fal «klasy B» a druga — fal «klasy A». W przypadku ścianki o dwukrotnie większym parametrze związanym z tłumieniem ścianki i niezmiennymi wartościami pozostałych parametrów Landahl stwierdził brak istnienia obszaru niestatecznych fal «typu B».

Ponadto stwierdził on w tym przypadku, że obszar niestatecznych fal «typu A» przesunął się w kierunku niższych wartości liczb Reynoldsa (uzyskana wartość krytycznej liczby Reynoldsa była wtedy nawet niższa od odpowiedniej wartości dla przypadku ścianki sztywnej). Wynik ten jest zgodny z wynikami badań teoretycznych [58 i 61], wg których wzrost tłumienia wewnętrznego w ściance wpływa unistateczniająco na zaburzenia w postaci fal «typu A», a ustateczniająco na zaburzenia «typu B».

Landahl zanalizował ponadto warunki pojawienia się poszczególnych typów niestateczności oraz podał prostą metodę przybliżonego wyznaczania współczynnika wzrostu zaburzeń  $c_r$ , za pomocą której stwierdzał, czy obszar niestateczności znajduje się w jednej lub drugiej części płaszczyzny przedzielonej krzywą stateczności neutralnej.

Praca BETCHOVA [61] charakteryzuje się oryginalnością podejścia do analizy stateczności warstwy przyściennej nad ścianką elastyczną. Betchov dokonał w niej podziału zaburzeń, które występują w laminarnej warstwie przyściennej na trzy grupy: na zaburzenia, których zachowanie się opisuje «nielepkie» równanie Orr-Sommerfelda, na zaburzenia związane z istnieniem wtórnej warstwy przyściennej w bezpośredniej bliskości ścianki, oraz zaburzenia określone działaniem lepkości w otoczeniu krytycznej linii prądu (dla której  $U_0(y_c)=c$ ). Jako punkt wyjścia przy wyznaczaniu równania charakterystycznego Betchov zastosował warunek, aby składowa styczna prędkości zaburzenia była równa zeru dla współrzędnej  $y=0$  (współrzędna  $y$  mierzona jest od konturu ścianki przed odkształceniem w kierunku normalnym do tego konturu). Betchov wskazał na metodę wykreślną rozwiązania tego równania.

Praca BOGGSa i TOKITY [62] wyróżnia się ścisłością sformułowania zagadnienia stateczności laminarnej warstwy przyściennej nad elastyczną ścianką. Zasadnicze znaczenie posiada przyjęta w tej pracy więź między deformacją ścianki oraz styczną i normalną składową naprężenia w płynie. Badacze ci pominęli jednak w swych rozważaniach warunki brzegowe na górnej granicy warstwy przyściennej, co nie

pozwoilo im na wskazanie konkretnej drogi wyznaczenia krzywych stateczności neutralnej.

HAINS i PRICE [72 i 63] zajmowali się analizą wpływu elastyczności na stateczność płaskiego przepływu Poiseuille'a. Otrzymali oni bardzo ciekawe wyniki dotyczące niestateczności «typu A». Stwierdzili bowiem, że w przypadku skończonych wartości parametru związanego z siłą naciągu membrany oraz przy zerowych wartościach pozostałych parametrów ścianki krzywe stateczności neutralnej przybrały postać krzywych zamkniętych. Ponadto stwierdzili oni, że przy zmniejszaniu naciągu membrany krzywe te obejmują coraz mniejszy obszar i że wreszcie przy pewnej wartości wspomnianego parametru obszar ten degeneruje się do punktu.

Badania wykazały, że korzyści wynikające z zastosowania elastycznej ścianki mogą w odniesieniu do niestateczności «typu A» wyrażać się nie tylko we wzroście krytycznej liczby Reynoldsa  $Re$  lecz również w redukcji maksymalnej (dla danej liczby  $Re > Re_{kr}$ ) wartości współczynnika wzrostu zaburzeń  $c_i$ .

Wyniki obliczeń KAPLANA [69], który dla określonych wartości liczb Reynoldsa wyznaczył krzywe zależności współczynnika wzrostu  $c_i$  od liczby falowej zaburzenia  $\alpha$  (dla profilu Blasiusa) świadczą o tym, że ten drugi korzystny efekt zastosowania elastycznej ścianki może być dość znaczny.

Inne wyniki obliczeń Kaplana mają postać układu krzywych stateczności neutralnych, z których każda związana jest z inną wartością parametru połączonego z tłumieniem wewnętrznym w ściance, ale niezmiennymi wartościami pozostałych parametrów ścianki. Wyniki te są zgodne z teoretycznym wynikiem BETCHOVA [61] i BENJAMINA [58], którzy w ogólny sposób doszli do wniosku o uniestateczniającym wpływie tłumienia wewnętrznego w ściance na zaburzenia w postaci fal «typu A».

W r. 1966 ukazała się praca GYORGYFALVY'EGO [70], który rozpatruje stateczność przepływu Blasiusa nad ścianką elastyczną, przy czym ściankę tę charakteryzuje za pomocą czterech parametrów związanych odpowiednio z masą i siłą naciągu membrany oraz ze sztywnością i tłumieniem podłoża membrany.

Uzyskane przez Gyorgyfalvy'ego wyniki liczbowe określają zależność między powyższymi czterema parametrami, a wielkością zdefiniowaną przez stosunek liczby Reynoldsa przejścia do turbulencji dla ścianki elastycznej do odpowiedniej liczby Reynoldsa dla ścianki sztywnej. Gyorgyfalvy zastosował przy tym empiryczny związek SMITHA [74] (podający zależność między uzyskanym z teorii małych zaburzeń współczynnikiem wzrostu zaburzeń  $c_i$  a punktem przejścia do turbulencji). Zastosował on ponadto wspomnianą powyżej metodę Landahla, pozwalającą w sposób przybliżony, ale za to względnie prosty, wyznaczyć przy danej liczbie Reynoldsa zależność między współczynnikiem wzrostu zaburzeń  $c_i$  a liczbą falową zaburzenia  $\alpha$ . Wyniki te wskazują na to, że nieznacznemu podwyższeniu krytycznej liczby Reynoldsa, uzyskanemu dzięki zastosowaniu elastycznej ścianki może towarzyszyć znaczny przyrost liczby Reynoldsa przejścia do turbulencji.

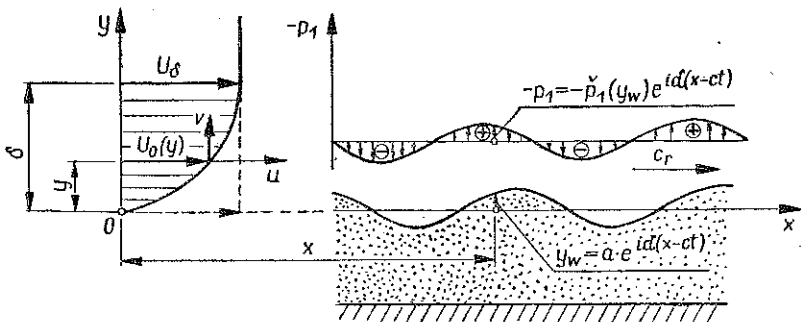
Gyorgyfalvy wyznaczył również zależność między teoretycznie możliwym do osiągnięcia zmniejszeniem oporu ciała, wynikającym z zastosowania elastycznego pokrycia, a bieżącą liczbą Reynoldsa  $Re_x$  (która odniesiona jest do odległości  $x$ , mierzonej wzdłuż ścianki od jej krawędzi natarcia.) Z zależności tej wynika, że

zakres wartości  $Re_x$ , dla których można uzyskać wspomniane zmniejszenie oporu ciała, znajduje się powyżej wartości  $Re_x = 3 \times 10^6$ , przy czym dla powietrza maksimum możliwej redukcji oporu ciała wynosi około 80% (przy  $Re_x \approx 10^7$ ), a dla wody około 90% (przy  $Re_x \approx 3 \times 10^7$ ) w odniesieniu do oporu ciała sztywnego.

Praca TAKEMATSU z r. 1968 [71] dotyczy ścianki, którą scharakteryzowano za pomocą dwóch parametrów (związanych odpowiednio z masą i siłą naciągu membrany) oraz przepływu równoległego o liniowym rozkładzie prędkości wewnątrz warstwy przyściennej. Jak wiadomo, to ostatnie założenie pozwala na znalezienie ścisłych rozwiązań równania Orr-Sommerfelda. Dla różnych wartości wspomnianych powyżej parametrów Takematsu wyznaczył przebieg dolnej gałęzi krzywej stateczności neutralnej, związanej z niestatecznością «typu C» (czyli typu Kelvina-Helmholtza).

Na zakończenie powyższego przeglądu prac teoretycznych, poświęconych problemowi stateczności przepływu nad ścianką elastyczną, warto wymienić prace MILESA [75 i 76], który analizował mechanizm powstawania fal na powierzchni wody pod działaniem wiatru. Miles stwierdził, że tłumienie wewnętrzne w wodzie wpływa zawsze ustępcznie na ten typ fal, co stanowi analogię do ustępczniego wpływu tłumienia w ściance elastycznej na zaburzenia «typu B».

2.3. Stateczność układu: ścianka podatna-przepływ. Trzy wspomniane uprzednio typy niestateczności, jakie mogą wystąpić w przypadku układu ścianka podatna-przepływ, można zdefiniować w zależności od przesunięcia fazowego między odkształceniem  $y_w(x, t)$  konturu opływanej ścianki i pulsacją ciśnienia zaburzenia —  $p_1(x, y_w, t)$  na powierzchni tej ścianki (rys. 1).



Rys. 1

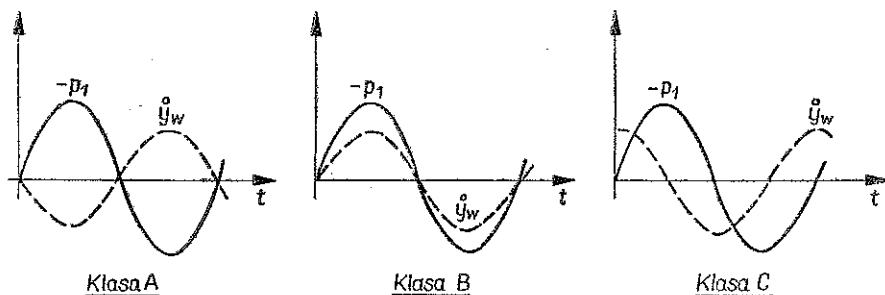
Niestateczności klasy A, klasy B i klasy C można zdefiniować jako niestateczności, przy których uśredniona w ciągu dłuższego okresu czasu praca, wykonana przez siły związane z pulsacją ciśnienia zaburzenia  $-p_1(x, y_w, t)$  na elementarnym przemieszczeniu konturu ścianki  $\dot{y}_w dt$ , jest odpowiednio ujemna, dodatnia oraz zerowa (por. rys. 2, gdzie naniesiono wykres  $-p_1$  oraz  $\dot{y}_w$  dla ustalonego punktu powierzchni ścianki o współrzędnej  $x$ ).

Wynika stąd, że np. w przypadku niestateczności klasy B ma miejsce doprowadzenie energii do ścianki, przy czym część tej doprowadzonej energii zostaje rozproszona w ściance, a pozostała część odpowiedzialna jest za wzrost zaburzeń układu



ścianka podatna-przeptyw. Można się więc spodziewać, że tłumienie wewnętrzne w ścianie będzie wpływało ustaleczniająco na zaburzenia klasy B, unistaleczniająco — na zaburzenia klasy A oraz że tłumienie wewnętrzne w ścianie nie będzie wpływało na warunki wystąpienia niestateczności klasy C.

Dokonyamy obecnie analizy stateczności układu ścianka podatna-przeptyw w prostym przypadku, gdy przepływ jest nielepki i nieściśliwy, przy czym wykorzystamy m.in. rozważania LANDAHLA [60] i BENJAMINA [59].



Rys. 2

Niech  $V_0 [U_0, 0, 0]$  określa jednorodne pole prędkości przepływu podstawowego nad płaską ścianką, której kontur przed odkształceniem pokrywa się z osią  $x$  (dodatni zwrot osi  $y$  kierujemy w stronę płynu prostopadle do konturu ścianki przed odkształceniem). Jako model podatnej ścianki przyjmujemy membranę o masie na jednostkę powierzchni  $M$  [kg/m<sup>2</sup>] i sile naciągu na jednostkę długości  $T$  [N/m], połączoną z podłożem winklerowskim o stałej sprężystej na jednostkę powierzchni  $C$  [N/m<sup>3</sup>] oraz współczynniku tłumienia liniowego na jednostkę powierzchni  $D$  [Ns/m<sup>3</sup>].

Niech funkcja  $y_w(x, t)$  określa kontur ścianki po odkształceniu, spowodowanym działaniem przepływu zaburzającego o polu prędkości  $v_1 [u(x, y, t), v(x, y, t), 0]$  i ciśnienia  $p_1(x, y, t)$ . Przy założeniu, że maksymalny kąt pochylenia elementu membrany w stosunku do jego położenia przed odkształceniem jest mały, można w następujący sposób napisać równanie ruchu tego elementu w kierunku osi  $y$ :

$$(2.1) \quad M \frac{\partial^2 y_w}{\partial t^2} + D \frac{\partial y_w}{\partial t} + M \omega_0^2 y_w - M c_0^2 \frac{\partial^2 y_w}{\partial x^2} = - [p_1(x, y, t)]_{y=y_w},$$

gdzie  $\omega_0 = (C/M)^{1/2}$  jest częstością kołową drgań swobodnych nietłumionych sprężystego podłoża, natomiast  $c_0 = (T/M)^{1/2}$  jest prędkością fali odkształcenia swobodnej membrany.

Założmy, że zaburzenia w płynie oraz wywołane przez nie odkształcenie ścianki jest małe i ma postać fali wędrującej o długości fali  $\lambda = 2\pi/\alpha$  oraz zespolonej prędkości fali  $c = c_r + ic_i$  (gdzie  $c_r$  jest prędkością rozchodzenia się fali w kierunku osi  $x$ , a  $c_i$  jest współczynnikiem wzrostu zaburzeń). Można wtedy w następujący sposób napi-

sać wyrażenie na ciśnienia zaburzenia, składowe prędkości zaburzenia oraz funkcję charakteryzującą odkształcenie ścianki:

$$(2.2) \quad \begin{cases} p_1(x, y, t) \\ u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{cases} = \begin{cases} \check{p}_1(y) \\ \check{u}(y) \\ \check{v}(y) \end{cases} e^{i\alpha(x-ct)},$$

$$y_w(x, t) = \check{a} e^{i\alpha(x-ct)},$$

przy czym sens fizyczny mają oczywiście tylko rzeczywiste (lub urojone) części powyższych wyrażeń. Znak współczynnika wzrostu zaburzeń  $c_i$  określa stateczność lub niestateczność układu; gdy  $c_i > 0$  układ jest niestateczny, gdy  $c_i < 0$  układ jest stateczny, a warunek  $c_i = 0$  określa przypadek stateczności neutralnej.

Po podstawieniu (2.2)<sub>2</sub> do (2.1) otrzymujemy następującą zależność:

$$(2.3) \quad M\alpha^2(c_*^2 - c^2 - iD_*c)\check{a} = -\check{p}_1(y_w),$$

gdzie

$$c_* = (c_0^2 + \omega_0^2/\alpha^2)^{1/2}, \quad D_* = D/\alpha M.$$

W celu wyznaczenia amplitudy ciśnienia zaburzenia na powierzchni ścianki  $\check{p}_1(y_w)$  — wypiszmy równanie ciągłości oraz zlinearyzowane względem prędkości zaburzenia  $v_1$  równanie pędu dla  $v_1$ :

$$(2.4) \quad \nabla v_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\nabla p_1}{\rho},$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu, a drugi wyraz lewej strony równania (2.4)<sub>2</sub> wynika stąd, że dla rozpatrywanego przepływu spełniona jest zależność  $(v_0 \nabla) v_1 = U_0(\partial v_1/\partial x)$ .

Stosując do równania (2.4)<sub>2</sub> operator  $\nabla$  i uwzględniając równanie ciągłości (2.4)<sub>1</sub> otrzymujemy równanie  $\Delta p_1 = 0$ , czyli  $(d^2 \check{p}_1/dy^2) - \alpha^2 \check{p}_1 = 0$ . Jedynym możliwym rozwiązaniem, które spełnia warunek ograniczoności dla  $y \rightarrow \infty$ , jest rozwiązanie  $\check{p}_1(y) = \text{const } e^{-\alpha y}$ .

Otrzymujemy stąd związek

$$(2.5) \quad \frac{d\check{p}_1}{dy} = -\alpha \check{p}_1(y).$$

Napiszmy następnie równanie (2.4)<sub>2</sub> dla kierunku osi  $y$ :

$$(2.6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y}.$$

Warunek brzegowy dla składowej  $v(x, y, t)$  prędkości zaburzenia może być napisany w następującej postaci:

$$(2.7) \quad v = \frac{\partial y_w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial y_w}{\partial x} \quad \text{dla} \quad y = y_w.$$

Podstawiając do równania (2.6) wyrażenia (2.2) i (2.5), a do warunku brzegowego (2.7) wyrażenia (2.2) otrzymujemy

$$(2.8) \quad i(U_0 - c) \check{v}(y) = \frac{1}{\rho} \check{p}_1(y), \quad \check{v}(y_w) = i\alpha(U_0 - c) \check{a}.$$

Z powyższych dwóch zależności wynika więc, że amplituda fali ciśnienia zaburzenia na powierzchni ścianki elastycznej wyraża się zależnością:

$$(2.9) \quad \check{p}_1(y_w) = -\rho(U_0 - c)^2 \alpha \check{a}.$$

Po podstawieniu (2.9) do (2.3) można ostatecznie otrzymać następującą postać równania charakterystycznego, pozwalającego określić warunki pojawiania się niestateczności układu ścianka elastyczna-przepływ:

$$(2.10) \quad M\alpha(c_*^2 - c^2 - iD_*c) = \rho(U_0 - c)^2.$$

Zależność (2.9) uzyskaliśmy przy założeniu, że przepływ jest nielepki, a rozkład prędkości w przepływie podstawowym jest jednorodny. W przypadku przepływu nielepkiego, ale o niejednorodnym rozkładzie prędkości  $U_0(y)$  w przepływie podstawowym, Benjamin [59] przyjmuje następującą zależność na amplitudę ciśnienia zaburzenia:

$$(2.11) \quad \check{p}_1(y_w) = \rho \{ -(U_0 - c)^2 + iSc \} \alpha \check{a},$$

przy czym dla rzeczywistych wartości  $c$  przyjmuje następującą aproksymację dla funkcji  $Sc$ :

$$Sc = -\pi\alpha(U_0 - c)^4 U_c'' / U_c'^3,$$

gdzie  $U_c'$  i  $U_c''$  są pochodnymi funkcji  $U_0(y)$  obliczonymi w «krytycznym» punkcie  $y_c$ , dla którego  $U_0(y_c) = c$ .

Podstawiając (2.11) do (2.3) otrzymuje się następującą postać równania charakterystycznego:

$$(2.12) \quad (U_0 - c)^2 - iSc = \zeta(c_*^2 - c^2 - iD_*c),$$

gdzie  $\zeta = M\alpha/\rho$  jest wielkością bezwymiarową.

Pomimo tego, że wielkość  $S$  jest zależna od  $c$  (dla małych wartości  $c$  i profilu Blasiusa wielkość  $S$  jest w przybliżeniu liniową funkcją  $c$ ), Benjamin traktuje ją w powyższym równaniu jako parametr, co pozwala mu na dokonanie stosunkowo prostej analizy warunków pojawienia się poszczególnych trzech typów niestateczności układu ścianka-przepływ.

Po przyjęciu  $S$  jako parametru równanie (2.12) staje się równaniem kwadratowym względem  $c$  i jego rozwiązania mogą być napisane następująco:

$$(2.13) \quad c_{1,2} = \frac{1}{\zeta + 1} \left\{ U_0 - \frac{i}{2} (\zeta D_* - S) \pm \sqrt{\zeta(\zeta + 1) c_*^2 - \zeta U_0^2 - \frac{1}{4} (\zeta D_* - S)^2 - i(\zeta D_* - S) U_0} \right\}.$$

Założmy, że zarówno tłumienie wewnętrzne w ścianie jak i wielkość  $S$  są małe oraz, że

$$|\zeta(\zeta+1)c_*^2 - \zeta U_0^2| > \frac{1}{4}(\zeta D_* - S)^2.$$

Rozwijając pierwiastek kwadratowy występujący w (2.13) w szereg potęgowy względem małej wielkości  $\zeta D_* - S$  otrzymamy

$$(2.14) \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{\zeta+1} \left[ U_0 \mp R - \frac{i}{2}(\zeta D_* - S_{a,b}) \left( 1 \mp \frac{U_0}{R} \right) \right] + 0 [(\zeta D_* - S_{a,b})^2],$$

gdzie

$$R = \sqrt{\zeta(\zeta+1)c_*^2 - \zeta U_0^2}.$$

W ślad za Benjaminem można z punktu widzenia stateczności rozwiązań wyróżnić trzy charakterystyczne przypadki:

1. Gdy  $R > U_0$ . Części rzeczywiste i urojone rozwiązań (2.14) można z podaną we wzorze (2.14) dokładnością ocenić następująco:

$$a_r < 0, \quad b_r > 0,$$

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(\zeta+1)} (S_{a,b} - \zeta D_*) \begin{Bmatrix} \eta \\ 2-\eta \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \eta < 1.$$

Ponieważ dla  $a_r < 0$  fala zaburzenia porusza się w kierunku przeciwnym do kierunku przepływu podstawowego, więc w tym przypadku nie istnieje wspomniany powyżej «punkt krytyczny» i nie można wówczas zastosować powyższej procedury wyznaczania  $c$ . W przypadku fali zaburzenia z  $c_2 = b$  widać natomiast, że jest ona tłumiona tylko wtedy, gdy  $\zeta D_* > S_b$ , a nie tłumiona, gdy  $\zeta D_* < S_b$ .

Wynika stąd, że z punktu widzenia stateczności rozwiązania tłumienie wewnętrzne w ścianie odgrywa tutaj rolę jakościową, przy czym wzrost wielkości tego tłumienia wpływa ustajechniająco na zaburzenia. Występujący tutaj przypadek niestateczności Benjamin klasyfikuje jako niestateczność klasy B.

2. Gdy  $0 < R < U_0$ . Części rzeczywiste obydwu rozwiązań (2.14) są dodatnie, a części urojone można oszacować następująco:

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(\zeta+1)} (S_{a,b} - \zeta D_*) \begin{Bmatrix} -\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{Bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon > 0.$$

Rozwiązanie niestateczne z  $b_i > 0$  ma więc miejsce wtedy, gdy  $\zeta D_* < S_b$  i niestateczność ta jest znów niestatecznością klasy B. Natomiast warunkiem wystąpienia niestateczności z  $a_i > 0$  jest warunek  $\zeta D_* > S_a$ , przy czym można stwierdzić, że wzrost tłumienia wewnętrznego w ścianie (a więc wzrost  $D_*$ ) wpływa unistateczniająco na ten typ zaburzeń. Benjamin klasyfikuje tę niestateczność jako niestateczność klasy A.

3. Natomiast w przypadku, gdy  $U_0^2 > (\zeta+1)c_*^2$ , tzn. gdy  $R$  jest często wielkością urojoną, pierwiastek kwadratowy w (2.13) ma dużą część urojoną i w ten sposób

jedno z rozwiązań na  $c$  posiada dużą dodatnią część urojoną. Pierwiastek kwadratowy w (2.13) jest czysto urojony w przypadku, gdy  $D_* = S = 0$ , tzn. przy zerowym tłumieniu wewnętrznym w ściance i np. potencjalnym przepływie podstawowym. Występujący tutaj przypadek niestateczności nie zależy jakościowo od wielkości tłumienia wewnętrznego w ściance. Benjamin klasyfikuje tę niestateczność jako niestateczność klasy C.

Na zakończenie zauważmy, że w przypadku nielepkiego przepływu podstawowego o jednorodnym rozkładzie prędkości (dla którego  $S = 0$ ) równanie charakterystyczne ma postać równania (2.10). Z równania tego wynika, że przy zerowym tłumieniu wewnętrznym w ściance ( $D_* = 0$ ) oraz zerowej sztywności ścianki ( $\omega_0 = 0$ ) warunek wystąpienia niestateczności klasy C jest następujący:

$$(2.15) \quad \alpha < \frac{\rho}{M} \frac{U_0^2 - c_0^2}{c_0^2}$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. FISZDON, *Some aeroelastic problems of sailplane design trends*, *Acro Revue*, No. 5, May, 270 - 274 (1969).
2. J. PRETSCH, *Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckansteig*, Jahresber. deutsch. Luftfahrtf., 1, 158 - 175 (1941).
3. C. C. LIN, *The theory of hydrodynamic stability*, Cambridge, Univ. Press (1955).
4. G. B. SCHUBAUER, H. K. SKRAMSTAD, *Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow*, *J. Aeronaut. Sci.*, 14, No. 2, 69 - 78 (1947).
5. H. B. SQUIRE, *On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls*, *Proc. Roy. Soc., A* 142, No. 847, 621 - 628 (1933).
6. D. MEKSYN, J. T. STUART, *Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances*, *Proc. Roy. Soc., A* 208, No. 1095, 517 - 526 (1951).
7. J. T. STUART, *On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability*, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 1, 1 - 21 (1958).
8. Л. Д. ЛАНДАУ, *К проблеме турбулентности*, Докл. АН СССР, 44, № 8, 339 - 342 (1944).
9. H. GÖRTLER, *Über den Einfluss der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz*, *ZAMM*, 20, 138 - 147 (1940).
10. H. W. LIEPMANN, *Investigations on laminar boundary-layer stability and transition on curved boundaries*, *NACA Rep. ACR*, No. 3H30 (1943).
11. H. SCHLICHTING, A. ULRICH, *Zur berechnung des Umschlages laminar|turbulent*, *Ber. Lilienthal-Ges.*, 10, 75 (1940).
12. H. SCHLICHTING, A. ULRICH, *Zur berechnung des Umschlages laminar|turbulent*, *Jb.d.d. Luftfahrtforschung*, S. 18 (1942).
13. H. GÖRTLER, *Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden gegenüber gewissen drei-dimensionalen Störungen*, *ZAMM*, 21, 250 - 252 (1941).
14. H. SCHLICHTING, *Entstehung der Turbulenz*, *Handbuch der Physik*, Berlin 1959.
15. H. L. DRYDEN, *Transition from laminar to turbulent flow. Turbulent flow and heat transfer* (ed. by C. C. LIN), Princeton, Univ. Press, 3 - 74 (1959).
16. J. T. STUART, *Hydrodynamic stability. Laminar boundary layers* (ed. by L. ROSENHEAD), London, Oxford Univ. Press, 492 - 579 (1963).
17. C. C. LIN, *On the stability of two-dimensional parallel flows*, Parts I, II, III, *Quart. Appl. Math.*, 3, No. 2, 117 - 142; No. 3, 218 - 234 (1945); No. 4, 277 - 301 (1946).
18. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford, Clarendon Press (1961).

19. S. F. SHEN, *Stability of laminar flows. Theory of laminar flows* (ed. by F. K. MOORE), Princeton, Univ. Press, (1964).
20. А. С. МОНИН, А. М. ЯГЛОМ, *Статическая гидромеханика*, ч. 1, Изд. Наука, Москва 1965.
21. А. М. БАЗИЦ, А. И. КОРОТКИН, Л. Ф. КОЗЛОВ, *Управление пограничным слоем судна*, Изд. Судостроение, Ленинград (1968); *Устойчивость ламинарного пограничного слоя*, 16 – 111, *Влияние упругости поверхности обтекаемого тела на устойчивость ламинарного пограничного слоя*, 112 – 145.
22. T. B. BENJAMIN, *Fluid flow with flexible boundaries*, Proc. of Eleventh Internat. Congres of Applied Mech., Munich, Applied Mechanics, 109 – 128 (1964).
23. G. HAGEN, *Über die Bewegung des Wassers in einen zylindrischen Röhren*, Pogg. Ann., 46, 423 – 442 (1839).
24. O. REYNOLDS, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of ristance in parallel channels*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 174, 935 – 982 (1883).
25. O. REYNOLDS, *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterium*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 186, 123 – 161 (1894).
26. Lord Rayleigh (J. W. STRUTT), *On the stability, or instability, of certain fluid motions*, I, II, III, Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, 1, 474 – 487 (1880); 3, 17 – 23 (1887); 4, 203 – 209 (1895).
27. W. TOLLMIEIN, *Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 50, 79 – 114 (1935); NACA, Tech. Memo., 792 (1936).
28. A. SOMMERFELD, *Ein beitrug zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen*, Atti Del IV Congresso Internazionale Del Matematici, Roma, 3 (1908).
29. R. MISES, *Kleine Schwingungen und Turbulenz*, Iber. dtsch. Mat.-Ver., 21, 241 – 248 (1912).
30. L. HOPF, *Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Stromung reibender Flüssigkeit*, Ann. Phys., Lpz., (4), 44, 1 – 60 (1914).
31. W. MC F. ORR, *The stability or instability of the steady motions of a liquid*, Proc. R. Irish. Acad., A, 27, 9 – 27 (1906), 69 – 138 (1907).
32. L. PRANDTL, *Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz*, ZAMM, 1, 431 – 436 (1921).
33. O. TIETJENS, *Beitrage zur Entstehung der Turbulenz*, ZAMM, 5, 200 – 217 (1925).
34. W. TOLLMIEIN, *Über die Entstehung der Turbulenz*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 21 – 44 (1929).
35. W. HEISENBERG, *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*, Ann. Physik, 74, 577 – 627 (1924).
36. C. L. PEKERIS, *Stability of laminar parabolic flow of a viscous fluid between parallel fixed walls*, Phys. Rev., (2), 74, 191 – 199 (1948).
37. W. TOLLMIEIN, *Beitrag zur Theorie der Turbulenz*, Proc. 3rd. Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm, 1, 105 – 108 (1930).
38. W. TOLLMIEIN, *Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen*, ZAMM, 25/27, 33 – 50, 70 – 83 (1947).
39. H. SCHLICHTING, *Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 160 – 198 (1933).
40. H. SCHLICHTING, *Amplitudenverteilung und Energiebilanz der Kleinen Störungen bei der Platten-grenzschicht*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1, 47 – 78 (1935).
41. H. SCHLICHTING, *Über die Entstehung der Turbulenz in einer rotierenden Zylinder*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 160 – 198 (1932).
42. H. SCHLICHTING, *Turbulenz bei Wärmeschichtung*, ZAMM, 15, No. 6, 313 – 338 (1935).
43. H. GÖRTLER, *Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N.F., 2, No. 1, 1 – 26 (1940).
44. E. HAHNEMAN, J. C. FREEMAN, M. FINSTON, *Stability of boundary layers and of flow in entrance section of a channel*, J. Aero. Sci., 15, 493 – 496 (1948).

45. G. I. TAYLOR, *Some recent developments in the study of turbulence*, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, USA, 294 – 310 (1938).
46. А. И. КОРОТКИН, *Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности*, Изд. АН СССР, МГЖ, № 3 (1966).
47. Н. В. ЛЬЕРМАН, *Investigation of boundary layer transition on concave walls*, NACA Rep. ACR, 4 J28 (1945).
48. В. Е. ПЯТЕЦКИЙ, Ю. Н. САВЧЕНКО, А. П. МАКАРЕНКОВ, *Кодовый киобокс для выполнения съемок с движущегося судна*, Бионика, 3, 111 – 117 (1969).
49. Н. ФОСКЕ, *Über die Ursachen der hohen Schwimgeschwindigkeiten der Delphine*, Z.f. Flugwiss., Bd. 13, H. 2 (1956).
50. Б. Н. СЕМЕНОВ, *О существовании гидродинамического феномена дельфина афалины*, Бионика, 3, 54 – 61 (1969).
51. LANG, *Naval Eng.*, 5 (1963).
52. В. В. БАБЕНКО, Р. М. СУРКИНА, *Некоторые гидродинамические особенности плавания дельфинов*, Бионика, 3, 19 – 26 (1969).
53. Л. Ф. КОЗЛОВ, *Зарубежные исследования в области управления пограничным слоем с целью снижения сопротивления судов*, Современные вопросы гидродинамики, Изд. Научная Думка, Киев, 313 – 324 (1967).
54. М. О. КРÄMER, *Boundary layer stabilization by distributed damping*, J.A.S., 24, No. 6 (1957).
55. М. О. КРÄMER, *Boundary layer stabilization by distributed damping*, J. Amer. Soc. Naval Engin., 72, 25 – 33 (1960).
56. М. О. КРÄMER, *Boundary layer stabilization by distributed damping*, Naval Engin. J. 74, 341 – 348 (1962).
57. Т. В. BENJAMIN, *Shearing flow over a wavy boundary*, J. Fluid Mech., 6, 161 (1959).
58. Т. В. BENJAMIN, *Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability*, J. Fluid Mech., 9, 513 – 532 (1960).
59. Т. В. BENJAMIN, *The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows*, J. Fluid Mech., 16, 436 – 450 (1963).
60. М. Т. LANDAHL, *On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface*, J. Fluid Mech., 13, 609 – 632 (1962).
61. Р. ВЕТСОВ, *Simplified analysis of boundary layer oscillations*, J. Ship. Res., 4, No. 2, 37 – 54 (1960).
62. E. BOGGS, N. TOKITA, *A theory of the stability of laminar flow along compliant plates*, Proc. Thierd Symposium on Naval Hydrodynamics, Scheveningen, Holland (1960).
63. F. D. HAINS, J. F. PRICE, *Effect of a flexible wall on the stability of Poiseuille flow*, Phys. Fluids, 5, No. 3 (1962).
64. E. BECKER, *Die laminare incompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand*, Z.f. Flugwiss., H. 10/11 (1960).
65. E. BECKER, *Die laminare incompressible Grenzschicht an einer durch laufende Wellen deformierten ebenen Wand*, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt., No. 132 (1960).
66. T. NONWEILER, *Qualitative solutions of the stability equations for a boundary layer in contact with viscous forms of flexible surface*, A.R.C. Rep. no. 22, 670 (1961).
67. А. И. КОРОТКИН, *Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ*, П. М. М. № 6 (1965).
68. M. VAN DYKE, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Acad. Press, New York 1964.
69. R. E. KAPLAN, *The Stability of Laminar Incompressible Boundary Layer in the Presence of Compliant Boundaries*, ScD Thesis, M.I.T. ASRL TR 116 – 1 (1964).
70. DEZSO GYORGYFALVY, *The Possibilities of Drag Reduction by the Use of Flexible Skin*, AIAA Paper No. 66 – 430, AIAA 4th Aerospace Sci. Meeting, Los Angeles, California 1966.
71. М. ТАКЕМАТСУ, *Stability of a laminar flow along a flexible boundary (I)*, Reports of Reserach Institute for Applied Mechanics, XVI, No. 53, 109 – 120 (1968).

72. F. D. HAINS, J. F. PRICE, *Stability of plane Poiseuille Flow Between Flexible Walls*, Boeing Document No. D1-82-0092, Febr. (1961).
73. F. D. HAINS, *Comparison of the Stability of Poiseuille Flow and the Blasius Profile for Flexible Walls*, Boeing Document D-1-82-0264, June (1963).
74. M. O. SMITH, N. GAMBERONI, *Transition, Pressure Gradient, and Stability Theory*, Douglas Co. Rep. No. ES 26388 (1956); Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech., 4, 234-244 (1957).
75. J. W. MILES, *On the generation waves by shear flows*; Part 1, J. Fluid Mech., 3, 185 (1957); Part 2, J. Fluid Mech., 6, 568 (1959); Part 4, J. Fluid Mech., 13, 433 (1962).
76. Д. В. Майлс, *Генерация поверхностных волн потоками с градиентом скорости*, Сб. Гидродинамическая неустойчивость Москва, Изд. Мир (1964).
77. W. P. GRAEBEL, *On determination of the characteristic equations for the stability of parallel flows*, J. Fluid Mech., 24, 497-508 (1966).

## Резюме

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ И ПОДАТЛИВОСТИ СТЕНКИ,  
НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ЛАМИНАРНОГО НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (I)

В работе дается обзор современных исследований в области гидродинамической устойчивости ламинарных несжимаемых течений. Дается описание исторического развития вышеприведенных исследований, для течений в соседстве как жестких так и податливых стенок. Кроме того обращается внимание на новые элементы, которые вводит, искривление стенки в расчеты устойчивости, а также характеризуется три типа неустойчивости, которые могут возникнуть в системе: податливая стенка-течение.

## Summary

THE INFLUENCE OF A CURVATURE AND FLEXIBILITY WALL  
ON THE HYDRODYNAMIC STABILITY OF A NON-COMPRESSIVE  
BY LAMINAR BOUNDARY LAYER. I

In the paper a review of the previous investigations in the range of hydrodynamic stability of a laminar non-compressive flows was introduced.

A historical development of the investigations given above was described both for the flows in the neighbourhood of a rigid and flexible walls. Moreover, the consideration was given to new elements, enabling the measurements of flow stability by introducing the curvature of a wall, and, three types of non-stabilities were characterized, which might, in the susceptible wall-flow formation appear.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lutego 1970 r.*