

## ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ PŁASKICH FAL SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH WYWOŁANYCH UDAREM MASOWYM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Jedną z metod generacji dynamicznych niestacjonarnych obciążeń stosowanych w doświadczalnych badaniach fizyko-mechanicznych własności gruntów jest udar masowy [1 – 3]. Realizuje się go za pomocą młotów wahadłowych [1 – 2], kafarów itp. urządzeń [3]. Wytwarzane w ten sposób obciążenia mają (ze względu na pomiar prędkości propagacji fal sprężysto-plastycznych) dwa zasadnicze braki: są szybkozmienne w czasie oraz dla uzyskania średnich i dużych intensywności obciążeń ( $10 - 1000 \text{ kG/cm}^2$ ) wymagane są dość duże prędkości uderzenia (rzędu kilkudziesięciu a nawet kilkuset m/s) i duże masy.

Okazuje się jednak, że przy odpowiednim doborze parametrów udaru wspomaganego dodatkowym ciśnieniem  $p_0$  (wytwarzanym np. przez spalanie prochu w odpowiednio skonstruowanej komorze) można uzyskać praktycznie stałe nagle przyłożone ciśnienie o wystarczającej dla techniki intensywności.

W niniejszej pracy zbadamy analitycznie problem rozprzestrzeniania się sprężysto-plastycznych fal naprężenia w próbce gruntu umieszczonej w nieodkształcalnym cylindrze i obciążonej udarem masowym wspomaganym stałym ciśnieniem  $p_0$ . Na podstawie analitycznego rozwiązania dokonamy numerycznej analizy problemu, z której wynikną warunki masowego udaru, generującego stałe nagle przyłożone obciążenie próbki.

Wyniki niniejszej pracy będą podstawą do konstrukcji odpowiedniego stanowiska badawczego przeznaczonego do określania prędkości propagacji sprężysto-plastycznych fal naprężenia w gruntach skruszonych.

### 2. Sformułowanie problemu

Zbadamy jednowymiarowy ruch słupka gruntu umieszczonego w nieodkształcalnym cylindrze, przykrytego z góry krążkiem o masie  $m_2$  i obciążonego spadającą z prędkością  $v_0$  masą  $m_1$ , na którą działa stałe ciśnienie  $p_0$  (rys. 1). Zakładamy przy tym, że po zderzeniu masy  $m_1$  i  $m_2$  nie oddzielają się a proces zderzenia zachodzi nagle, tj. prędkość zderzenia mas  $v_0$  obniża się skokowo do początkowej prędkości  $V_0$  zgodnie z prawem zachowania ilości ruchu, mianowicie

$$(2.1) \quad V_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Związek fizyczny  $\sigma - \sigma(\varepsilon)$  opisujący fizyko-mechaniczne własności gruntu, przyjmijmy wg rys. 2.

Rozwiązanie skonstruujemy we współrzędnych Lagrange'a, przy czym oś  $x$  kierujemy w głąb ośrodka (rys. 1).

Tak sformułowany problem określony jest jednoznacznie następującym układem równań:

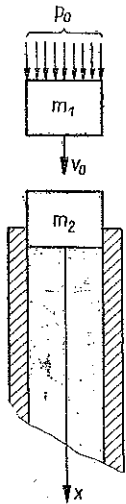
$$(2.2) \quad \begin{aligned} v_{,t} &= \frac{1}{\rho_0} \sigma_{,x}, & v_{,x} &= \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \sigma_{,t}, \\ v &= u_{,t}, & \varepsilon &= u_{,x}, \\ \sigma &= \sigma(\varepsilon), & \varepsilon &= \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \end{aligned}$$

z warunkiem brzegowym

$$(2.3) \quad -(m_1 + m_2) v_{,t}(0, t) + \sigma(0, t) = -m_1 g - p_0$$

i warunkami początkowymi

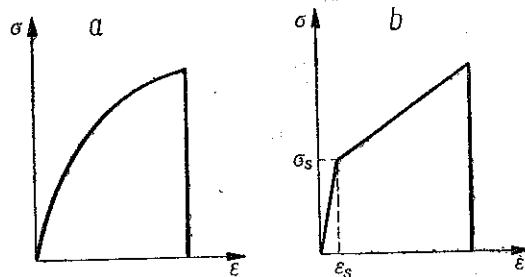
$$(2.4) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x > 0, \\ V_0, & \text{jeśli } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$



Rys. 1

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie grawitacyjne.

Równania (2.2) można, oczywiście, zastąpić równoważnym układem równań różniczkowych zwyczajnych wzdłuż charakterystyk



Rys. 2

$$(2.5) \quad d\sigma = \pm \rho_0 a(\sigma) dv$$

lub po scałkowaniu

$$(2.6) \quad v = \pm \frac{1}{\rho_0} \int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{a(\sigma_1)} + C^\pm \quad \text{dla} \quad dx = \pm a(\sigma) dt,$$

gdzie

$$(2.7) \quad a(\sigma) = \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon(\sigma)}^{1/2} = \left[ \rho_0 \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right]^{-1/2}.$$

## 3. Rozwiązanie problemu

Dla sformułowanego w poprzednim punkcie problemu nie można *a priori* określić falowego obrazu rozwiązania na płaszczyźnie fazowej  $x, t$ . Nie znamy tutaj bowiem (przed rozwiązaniem problemu) charakteru zmiany ciśnienia pod masą  $m_2$ , który łącznie ze związkem  $\sigma - \sigma(\varepsilon)$  określa falowy obraz rozwiązania. Dlatego w pierwszej kolejności skonstruujemy rozwiązanie dla ośrodka liniowo-sprężystego. Następnie na podstawie tego rozwiązania ocenimy jakościowo charakter zmiany naprężenia pod masą  $m_2$  i określimy falowy obraz rozwiązania dla ośrodka sprężysto-plastycznego oraz skonstruujemy rozwiązanie takiego problemu.

Dla ośrodka liniowo-sprężystego wzdłuż ujemnych charakterystyk mamy

$$(3.1) \quad v = -\frac{\sigma}{\rho_0 a_0} \quad \text{lub} \quad v_{,t} = -\frac{\sigma_{,t}}{\rho_0 a_0}.$$

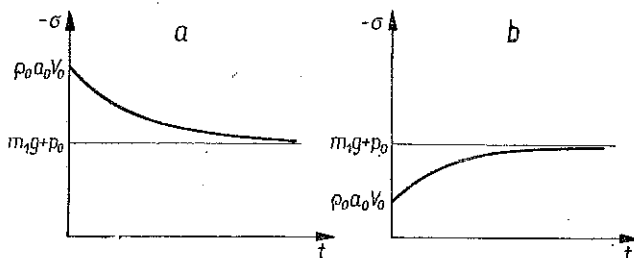
Wykorzystując (3.1) i warunek brzegowy (2.3) otrzymamy

$$(3.2) \quad \sigma_{,t}(0, t) + \frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2} \sigma(0, t) = -(m_1 g + p_0) \frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2};$$

stąd po rozwiązaniu i uwzględnieniu (2.4)<sub>2</sub> dostaniemy

$$(3.3) \quad \sigma(0, t) = -(m_1 g + p_0) - [\rho_0 a_0 V_0 - (m_1 g + p_0)] e^{-\frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2} t}.$$

Ze wzoru (3.3) wynika, że naprężenie pod masą  $m_2$  może mieć dwa charakterystyczne przebiegi. Dla  $\rho_0 a_0 V_0 > m_1 g + p_0$ , moduł naprężenia  $|\sigma(0, t)|$  jest malejącą funkcją czasu: maleje asymptotycznie od początkowej wartości  $|\sigma(0, 0)| = \rho_0 a_0 V_0$  do asymptoty  $|\sigma(0, \infty)| = m_1 g + p_0$  (rys. 3a). Natomiast dla  $\rho_0 a_0 V_0 < m_1 g + p_0$  — rośnie od wartości  $|\sigma(0, 0)| = \rho_0 a_0 V_0$  do wymienionej asymptoty (rys. 3b).



Rys. 3

Z uzyskanych wyżej wyników widać, że początkowa wartość prędkości  $V_0$ , jaką uzyskują masy po zderzeniu, określa rodzaj obciążenia ośrodka. Na podstawie tych wyników postulujemy, że w ośrodku sprężysto-plastycznym przy małych wartościach  $V_0$  powstanie tylko układ fal obciążenia — fale typu Riemanna. Natomiast dla dużych  $V_0$  ośrodek po nagłym obciążeniu wejdzie w strefę odciążenia. Konstrukcja rozwiązania problemu dla wymienionych przypadków jest odmienna i należy rozpatrzyć je oddzielnie.

Przypadek fali obciążenia ( $|\sigma_0| \leq m_1 g + p_0$ ). Zgodnie z (2.5) dla krzywoliniowego związku (rys. 2a) wzdłuż ujemnych charakterystyk mamy

$$(3.4) \quad v = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{a(\sigma_1)},$$

Różniczkując względem czasu funkcję (3.4) i następnie przyjmując w niej  $x=0$ , otrzymamy wzór na przyspieszenie mas  $m_1+m_2$  w następującej postaci:

$$(3.5) \quad v_{,t}(0, t) = -\frac{1}{\rho_0 a [\sigma(0, t)]} \sigma_{,t}(0, t).$$

Podstawiając z kolei (3.5) do warunku brzegowego (2.3), otrzymamy na naprężenie pod masą  $m_2$  równanie różniczkowe

$$(3.6) \quad \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\rho_0 a [\sigma(t)]}{m_1+m_2} [\sigma(t) + (m_1 g + p_0)] = 0.$$

Wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(3.7) \quad \tau = \frac{\rho_0 a_0}{m_1+m_2} t, \quad y(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{m_1 g + p_0},$$

$$f[y(\tau)] = \frac{a[\sigma(\tau)]}{a_0}, \quad a_0 = a(0).$$

Wówczas równanie (3.6) przyjmuje postać

$$(3.8) \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} + f[y(\tau)] [y(\tau) + 1] = 0,$$

przy czym  $f(y)$  zgodnie z rys. 2a i wzorem (2.7) jest dodatnią funkcją malejącą.

Ze struktury równania (3.8) wynika, że jedną z całek szczególnych jest

$$y(\tau) \equiv -1$$

co w wielkościach wymiarowych oznacza, że

$$(3.9) \quad \sigma(0, t) = -(m_1 g + p_0) = \text{const.}$$

Z drugiej strony w chwili początkowej mamy

$$(3.10) \quad \sigma(0, 0) = \sigma_0 = -\rho_0 a(\sigma_0) V_0.$$

Na podstawie (3.9), (3.10) i (2.1) możemy wyliczyć wartość prędkości zderzenia  $v_0$ , przy której otrzymujemy nagłe obciążenie próbki gruntu stałym ciśnieniem  $p = m_1 g + p_0$ . Prędkość ta wynosi

$$(3.11) \quad v_0 = \frac{(m_1+m_2)(m_1 g + p_0)}{\rho_0 a [-(m_1 g + p_0)] m_1}.$$

W ten sposób, wykorzystując szczególną postać równania (3.8), określiliśmy warunki (bez rozwiązywania problemu), w których metodą udaru masowego można generować stałe, nagle przyłożone obciążenie próbki gruntu.

Dla prędkości  $v_0$  mniejszych od (3.11) (tylko takie w procesie obciążenia mogą być brane pod uwagę) z równania (3.8) po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.12) \quad \tau = \int_{y_0}^y d\eta / f(\eta) (\eta + 1).$$

Łatwo pokazać, że w tym przypadku funkcja  $y(\tau)$  posiada ekstremum, które występuje przy  $\tau \rightarrow \infty$  i wynosi

$$(3.13) \quad y(\infty) = -1 \quad \text{lub} \quad \sigma(\infty) = -(m_1 g + p_0).$$

Oznacza to, że (3.13) jest asymptotą, do której dąży naprężenie  $\sigma$ , rosnąc od wartości początkowej (3.10). Charakter wzrostu określa wzór (3.12).

Dla charakterystyki  $\sigma - \sigma(\varepsilon)$  odcinkami liniowej (rys. 2b) równanie (3.6) upraszcza się do postaci:

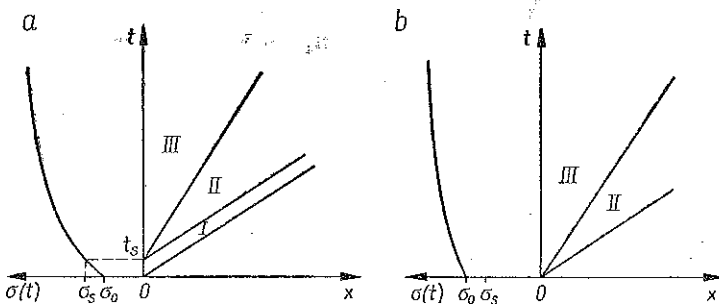
w strefie odkształceń sprężystych

$$(3.14) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2} \sigma(t) = -(m_1 g + p_0) \frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2};$$

w strefie odkształceń plastycznych

$$(3.15) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\rho_0 a_1}{m_1 + m_2} \sigma(t) = -(m_1 g + p_0) \frac{\rho_0 a_1}{m_1 + m_2}.$$

Możliwe są tutaj dwa rodzaje układów fali obciążenia typu Riemanna (rys. 4).



Rys. 4

Dla  $|\sigma_0| = \rho_0 a_0 V_0 < |\sigma_s|$  w próbce gruntu propaguje się układ fali Riemanna pokazany na rys. 4a. Naprężenie i prędkość wyrażają się tutaj następującymi wzorami:

dla obszaru I (odkształcenia sprężyste)

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_1(x, t) &= -(m_1 g + p_0) - [\rho_0 a_0 V_0 - (m_1 g + p_0)] e^{-\frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2} \left(t - \frac{x}{a_0}\right)}, \\ v_1(x, t) &= -\frac{\sigma_1(x, t)}{\rho_0 a_0}; \end{aligned}$$

dla obszaru II (stałe odkształcenia sprężyste)

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_2(x, t) &\equiv \sigma_s, \\ v_2(x, t) &\equiv v_s = -\frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0}; \end{aligned}$$

dla obszaru III

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \sigma_3(x, t) &= -(m_1 g + p_0) + (m_1 g + p_0 - |\sigma_s|) e^{-\frac{\rho_0 a_1}{m_1 + m_2} \left( t - t_s - \frac{x}{a_1} \right)}, \\ v_3(x, t) &= -\frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right) - \frac{\sigma_3(x, t)}{\rho_0 a_1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.19) \quad t_s = \frac{m_1 + m_2}{\rho_0 a_0} \ln \frac{m_1 g + p_0 - \rho_0 a_0 V_0}{m_1 g + p_0 - \rho_0 a_0 v_s}.$$

W przypadku gdy przy uderzeniu w chwili początkowej przekroczona zostanie granica sprężystości ośrodka, tj.  $|\sigma_0| > |\sigma_s|$ , układ fal na płaszczyźnie  $x, t$  ma postać przedstawioną na rys. 4b, a rozwiązanie w obszarze III określamy następującymi wzorami:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \sigma_3(x, t) &= -(m_1 g + p_0) + (m_1 g + p_0 - |\sigma_0|) e^{-\frac{\rho_0 a_1}{m_1 + m_2} \left( t - \frac{x}{a_1} \right)}, \\ v_3(x, t) &= -\frac{\sigma_s}{\rho_0 a_0} \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right) - \frac{\sigma_3(x, t)}{\rho_0 a_1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.21) \quad \sigma_0 = \sigma_s \left( 1 - \frac{a_1}{a_0} \right) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \rho_0 a_1 v_0.$$

Z uzyskanych wyżej rozwiązań wynika, że zbadany przypadek fali obciążenia występuje wówczas, gdy wartość początkowego naprężenia pod masą  $m_2$  spełnia nierówność

$$(3.22) \quad |\sigma_0| \leq m_1 g + p_0.$$

Natomiast dla warunku

$$(3.23) \quad |\sigma_0| > m_1 g + p_0$$

moduł naprężenia  $|\sigma(0, t)|$ , określony wyprowadzonymi wyżej wzorami, jest malejącą funkcją czasu, co jest sprzeczne z procesem obciążenia. Zatem dla  $|\sigma_0| > m_1 g + p_0$  należy skonstruować nowe rozwiązanie z uwzględnieniem fali odciążenia.

*Przypadek fali odciążenia* ( $|\sigma_0| > m_1 g + p_0$ ). W pierwszej kolejności rozpatrzmy krzywoliniowy związek  $\sigma - \sigma(\epsilon)$  ze sztywnym odciążeniem (rys. 2a). Obraz rozwiązania dla tego przypadku ma postać pokazaną na rys. 5.

W obszarze I propaguje się pęk fal Riemanna ograniczony od góry falą odciążenia, za którą występuje proces sztywnego odciążenia (obszar II). Ruch ośrodka określa tutaj następujące równanie:

$$(3.24) \quad \sigma_2(x, t) = \rho_0 x v_0'(t) + C,$$

które po wykorzystaniu warunku bieżącego (2.3) przyjmuje postać

$$(3.25) \quad \sigma_2(x, t) = (\rho_0 x + m_1 + m_2) v_0'(t) - (m_1 g + p_0),$$

gdzie  $v_0(t)$  jest prędkością masową ośrodka na fali odciążenia.

Równanie frontu fali odciążenia można napisać w następującej formie:

$$(3.26) \quad x = \varphi(t) = a[\sigma_0(t)] t.$$

Wówczas naprężenie na fali odciążenia zgodnie z (3.25) i (3.26) wyrazimy wzorem

$$(3.27) \quad \sigma_2[\varphi(t), t] = \sigma_0(t) = [\rho_0 \varphi(t) + m_1 + m_2] v_0'(t) - (m_1 g + p_0).$$

Z drugiej strony z obszaru obciążenia I na podstawie (2.6) mamy

$$(3.28) \quad v_0'(t) = -\frac{\sigma_0'(t)}{\rho_0 a[\sigma_0(t)]}.$$

Biorąc pod uwagę (3.26) i (3.28), z (3.27) otrzymamy końcowe równanie problemu

$$(3.29) \quad \sigma_0'(t) + \frac{\rho_0 a[\sigma_0(t)]}{\rho_0 a[\sigma_0(t)] t + m_1 + m_2} [\sigma_0(t) + m_1 g + p_0] = 0$$

lub

$$(3.29') \quad \sigma_0(t) = \sigma_0(0) - \int_0^t \frac{\rho_0 a[\sigma_0(\xi)]}{\rho_0 a[\sigma_0(\xi)] \xi + m_1 + m_2} [\sigma_0(\xi) + m_1 g + p_0] d\xi.$$

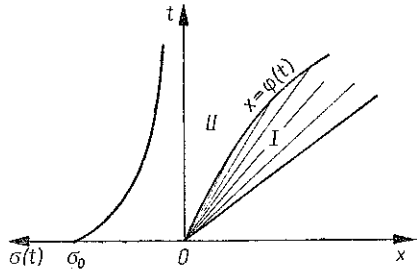
Stąd przez kolejne iteracje (przy założeniu, że funkcja podcałkowa jest ograniczona i spełnia warunek Lipschitza) określamy naprężenie na froncie fali odciążenia. Dla szczególnych postaci funkcji  $a[\sigma_0(t)]$  można uzyskać zamknięte rozwiązanie problemu [4].

Z równania (3.29) wynika, że dla dowolnej funkcji  $a[\sigma_0(t)] \neq 0$  istnieje całka szczególna typu

$$(3.30) \quad \sigma_0(t) \equiv -(m_1 g + p_0).$$

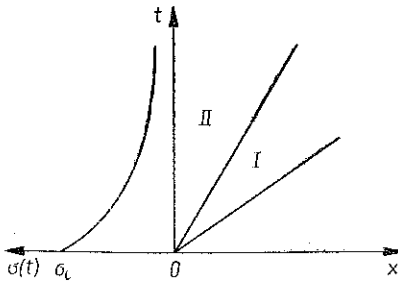
Wówczas  $\sigma_0'(t) = v_0'(t) \equiv 0$ . Zatem zgodnie z (3.25) naprężenie pod masą  $m_2$  wynosi

$$(3.31) \quad \sigma_2(0, t) = \sigma(t) = -(m_1 g + p_0).$$



Rys. 5

W ten sposób otrzymaliśmy taką samą asymptotę rozwiązania jak w przypadku fali obciążenia. Wynik ten jest bardzo korzystny dla praktycznej realizacji nagłego obciążenia próbki gruntu stałym ciśnieniem  $p = m_1 g + p_0$ .



Rys. 6

Przejdziemy obecnie do skonstruowania zamkniętego rozwiązania problemu fali odciążenia dla ośrodka z liniowym wzmocnieniem i sztywnym odciążeniem (rys. 2b). Dla takiego ośrodka przy warunku  $|\sigma_0(0)| > m_1 g + p_0$  otrzymamy układ frontów fal jak na rys. 6.

W obszarze I stan naprężenia i prędkości określony jest wzorami (3.17). Na froncie fali odciążenia

$$(3.32) \quad x = a_1 t$$

następuje nagłe obciążenie ośrodka do maksymalnej wartości  $\sigma_{\max} = \sigma_0(t)$ , a w obszarze II zachodzi proces sztywnego odciążenia określony równaniem (3.25).

Na froncie fali odciążenia (silna nieciągłość) musi być spełniony warunek dynamicznej ciągłości

$$(3.33) \quad \sigma_0(t) - \sigma_s = -\rho_0 a_1 [v_0(t) - v_s].$$

Podstawiając (3.33) do (3.25) otrzymujemy

$$(3.34) \quad v_0'(t) + \frac{1}{t+m} v_0(t) = \frac{\kappa}{t+m},$$

a po rozwiązaniu

$$(3.34') \quad v_0(t) = e^{-\int_0^t \frac{d\xi}{\xi+m}} \left( \kappa \int_0^t \frac{1}{\xi+m} e^{\int_0^\xi \frac{d\eta}{\eta+m}} d\xi + C \right),$$

gdzie

$$(3.35) \quad m = \frac{m_1 + m_2}{\rho_0 a_1}, \quad \kappa = \frac{m_1 g + p_0 + (1 - a_1/a_0) \sigma_s}{\rho_0 a_1}.$$

Na podstawie warunku początkowego (2.1) stała  $C$  wynosi

$$(3.36) \quad C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Ostatecznie w obszarze sztywnego odciążenia dla ośrodka z liniowym wzmocnieniem mamy

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \sigma_2(x, t) &= -(\rho_0 x + m_1 + m_2) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 - \kappa \right) \frac{m}{(t+m)^2} - m_1 g - p_0, \\ v_2(x, t) &= v_0(t) = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 - \kappa \right) \frac{m}{t+m} + \kappa. \end{aligned}$$



Stąd na brzegu próbki (pod masą  $m_2$ ) otrzymujemy

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \sigma_2(0, t) = \sigma(t) &= -(m_1 g + p_0) - [m_1 v_0 - \kappa(m_1 + m_2)] \frac{m}{(t+m)^2}, \\ v_2(0, t) &= v_0(t). \end{aligned}$$

Tym samym uzyskaliśmy pełne rozwiązanie problemu.

#### 4. Przykład

Do obliczeń przyjmijmy następujące wartości liczbowe:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a_0 &= 4 \cdot 10^4 \text{ cm/s}, & a_1 &= 2 \cdot 10^4 \text{ cm/s}, \\ \sigma_s &= -2 \text{ kG/cm}^2, & p_0 &= 19 \text{ kG/cm}^2, \\ \rho_0 &= 2 \cdot 10^{-6} \text{ kGs}^2/\text{cm}^4, & gm_1 &= gm_2 = 1 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

Oprócz tego wprowadzimy wielkości bezwymiarowe

$$(4.2) \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma(t)}{m_1 g + p_0}, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{m_1 g + p_0}, \quad \bar{\sigma}_s = \frac{\sigma_s}{m_1 g + p_0}.$$

Analizę numeryczną problemu ograniczymy tylko do naprężenia (wielkość ta limituje dobór parametrów udaru masowego, generującego stacjonarną falę naprężenia). Charakter zmiany pozostałych parametrów ruchu gruntu wynika bezpośrednio z otrzymanych zamkniętych wzorów i nie będziemy ich tutaj szczegółowo badać.

Na podstawie wzorów (3.16)<sub>1</sub>, (3.20)<sub>1</sub>, (3.21) i (3.38)<sub>1</sub> po wprowadzeniu (4.2) otrzymujemy

w przypadku fali obciążenia —  $|\bar{\sigma}| \leq 1$

dla  $|\bar{\sigma}| \leq |\bar{\sigma}_s|$

$$(4.3) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 + \left(1 - \frac{\rho_0 a_0 m_1}{m_1 + m_2} v_0\right) e^{-\frac{\rho_0 a_0}{m_1 + m_2} t},$$

dla  $|\bar{\sigma}_s| \leq |\bar{\sigma}| \leq 1$

$$(4.4) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 + (1 - |\bar{\sigma}_0|) e^{-\frac{\rho_0 a_1}{m_1 + m_2} t},$$

gdzie

$$(4.5) \quad \bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_s \left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{m_1 \rho_0 a_1 v_0}{(m_1 + m_2)(m_1 g + p_0)};$$

w przypadku fali odciążenia —  $|\bar{\sigma}| > 1$

$$(4.6) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 - \left[ \frac{m_1 v_0 - \kappa(m_1 + m_2)}{m_1 g + p_0} \right] \frac{m}{(t+m)^2}.$$

Podstawiając do powyższych wzorów dane (4.1) otrzymamy:

dla  $|\bar{\sigma}| \leq |\bar{\sigma}_s|$

$$(4.7) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 + (1 - 0,04 v_0) e^{-40t},$$

dla  $|\bar{\sigma}_s| \leq |\bar{\sigma}| \leq 1$

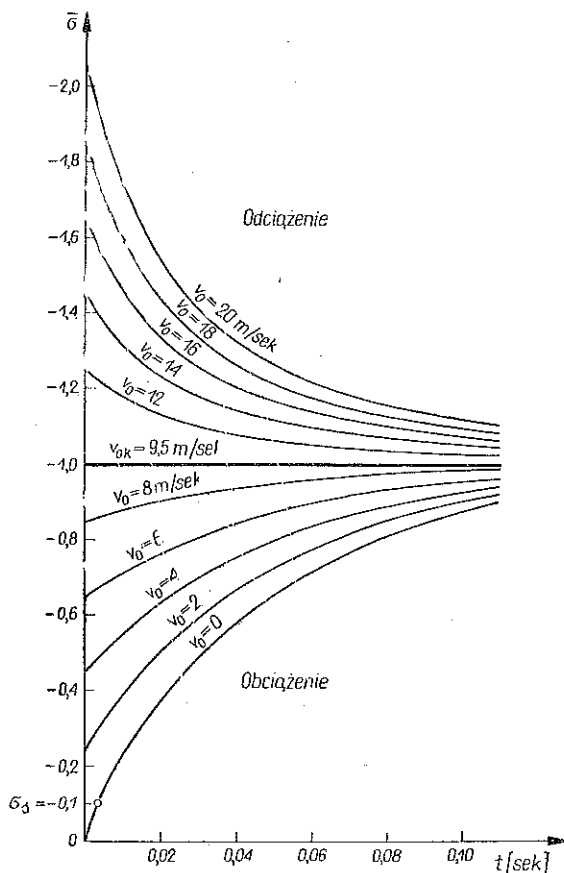
$$(4.8) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 + (0,95 - 0,001 v_0) e^{-20t},$$

dla  $|\bar{\sigma}| > 1$

$$(4.9) \quad \bar{\sigma}(t) = -1 - (0,00005 v_0 - 0,0475) \frac{0,05}{(t + 0,05)^2},$$

gdzie  $v_0$  w cm/s,  $t$  w sekundach.

Na podstawie powyższych wzorów wykonano obliczenia liczbowe. Wyniki obliczeń pokazujemy na rys. 7.



Rys. 7

Z wykresów widać, że w doświadczeniach (poświęconych pomiarom prędkości propagacji fal sprężysto-plastycznych) należy tak dobrać parametry uderzenia masowego, wspomaganego dodatkowym ciśnieniem, aby maksymalnie zbliżyć się do krytycznej prędkości zderzenia  $v_{ok}$ . Zaleca się przy tym nie przekraczać tej wartości, bowiem otoczenie linii  $v_0 = v_{ok}$  od strony obszaru obciążenia jest korzystniejsze pod względem stacjonarności fali naprężenia, propagującej się w badanej próbce gruntu.

## Literatura cytowana w tekście

1. X. A. Рахматулин, А. Я. Саломонян, Н. Я. Алексеев, *Вопросы динамики грунтов*, Изд. МГУ, Москва 1964.
2. Л. Р. Ставняцер, *Исследование динамической сжимаемости грунтов*, Основания и фундаменты, Сборник № 56, Изд. Лит. стр., Москва 1966.
3. W. GOLDSMITH, *Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1963.
4. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Гос. изд. физ.-мат. Лит., Москва 1961.
5. E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężystoplastycznym podłożu*, Biul. WAT, Nr 4 (188), 1968.

## Резюме

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН,  
ВЫЗВАННЫХ МАССОВЫМ УДАРОМ

В настоящей работе, исследуется одномерное движение столбика грунта, размещенного в недеформируемом цилиндре, накрытого сверху кружком с массой  $m_2$  и нагруженного падающей со скоростью  $v_0$  массой  $m_1$ , на которую действует постоянное давление  $p_0$  (рис. 1). Дается решение задачи для криволинейной зависимости  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , с жесткой разгрузкой, а также для среды с линейным упрочнением. На базе полученного решения устанавливаются условия массового удара, при котором может возникнуть стационарная волна давления, загружающая исследуемый образец грунта.

Результаты настоящей работы будут основанием для конструкции соответствующего испытательного стенда, предназначенного для определения скорости распространения упруго-пластических волн напряжения, в раздробленных грунтах.

## Summary

THE PROPAGATION OF PLANE ELASTO-PLASTIC WAVES GENERATED  
BY MASS SHOCK

In this paper the one-dimensional motion of a column of soil, is investigated, emplaced in a non-deformable cylinder covered from the top by a disk having mass  $m_2$  and loaded by a falling mass  $m_1$  with velocity  $v_0$ , and on which there acts a constant pressure  $p_0$  (Fig. 1). The solution of the problem is given for the curvilinear relationship  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  with a rigid unloading and for a medium with linear hardening. On the basis of the solution obtained the conditions of mass shock have been established at which it is possible to generate a stationary pressure wave loading the sample of soil under investigation.

The results of this paper will form the basis for the design of a suitable test stand designated to determine the velocities of propagation of elasto-plastic stress waves in granular soils.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1970 r.*