

WPŁYW KRZYWIZNY I PODATNOŚCI ŚCIANKI NA STATECZNOŚĆ HYDRODYNAMICZNĄ LAMINARNEJ NIEŚCIŚLIWEJ WARSTWY PRZYŚCIENNEJ (II) *

EUGENIUSZ M Z Y K

I. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

W pracy rozpatruje się wpływ krzywizny wzdłuż kierunku prędkości — sztywnej i podatnej ścianki na stateczność hydrodynamiczną laminarnej, nieściśliwej warstwy przyściennej.

Zagadnienie to może znaleźć zastosowanie przy ocenie celowości budowania szybów z miękkimi pokryciami.

Przyjmuje się następujące założenia:

1) kontur ścianki przed odkształceniem jest wypukły (rys. 1) i ma stały promień krzywizny \bar{R} , znacznie większy od grubości warstwy przyściennej przepływu $\bar{\delta}$;

2) ścianka jest podatna jedynie w kierunku normalnym do jej konturu przed odkształceniem;

3) odkształcenie ścianki ma postać fali powierzchniowej o małej (w porównaniu do $\bar{\delta}$) amplitudzie \bar{a} ; odkształcenie to traktuje się jako reakcję na wędrującą falę ciśnienia zaburzenia w płynie $p_1(x, y, t)$;

4) przepływ podstawowy, którego stateczność się bada, jest w przybliżeniu przepływem równoległym o polu prędkości $V_0 [U_0(y), 0, 0]$.

Zgodnie z założeniem 1 i 3 można przyjąć, że profil prędkości przepływu podstawowego jest w przybliżeniu niezależny od krzywizny i podatności ścianki⁽¹⁾. W konkretnych obliczeniach liczbowych przyjęto dalej z góry daną postać tego profilu prędkości, biorąc pod uwagę dwa jego typy: aproksymowany przez LINA profil prędkości BLASIUSA oraz rodzinę profili prędkości POHLHAUSENA.

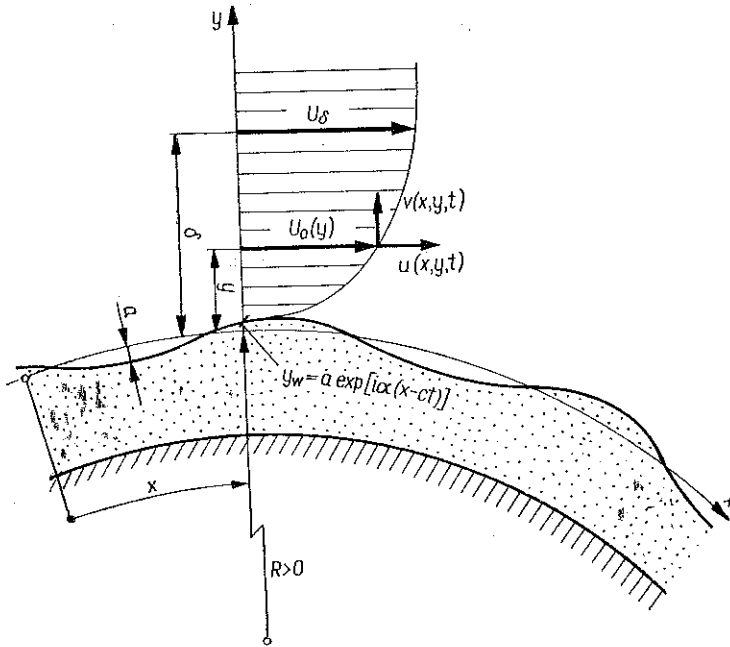
Stateczność przepływu podstawowego określa się w odniesieniu do małego, dwuwymiarowego zaburzenia o polu prędkości $V_1 [u(x, y, t), v(x, y, t), 0]$ i ciśnienia $p_1(x, y, t)$. Zaburzenie to przyjmuje się w postaci wirów poprzecznych, dla których funkcję prądu zaburzenia Ψ określa wzór

$$(1.1) \quad \Psi(x, y, t) = f(y) \exp [i\alpha(x - ct)],$$

* W części I pracy, opublikowanej w Rozpr. Inż., 18, 3, 1970, podana jest literatura cytowana w cz. II.

⁽¹⁾ Doświadczenia LIEPMANNA pokazały [10], że niezmiennosc profilu prędkości od krzywizny ścianki jest bliska rzeczywistości dla ścianki o małej krzywiznie $K \equiv \bar{\delta}/\bar{R} \ll 1$; założenie 3 pozwala ponadto w pierwszym przybliżeniu nie uwzględniać wpływu odkształcenia ścianki na profil prędkości przepływu podstawowego.

gdzie $f(y)$ jest zespoloną amplitudą funkcji prądu zaburzenia, α liczbą falową (długość fali zaburzenia $\lambda = 2\pi/\alpha$), $c = c_r + ic_i$, gdzie c_r jest prędkością rozchodzenia się zaburzeń w kierunku osi x , a wielkość αc_i jest współczynnikiem wzrostu zaburzeń (gdy $c_i > 0$ uważamy, że przepływ jest niestacyczny, gdy $c_i < 0$, że przepływ jest stacyczny, a przy $c_i = 0$ mówimy o przypadku «stacyczności neutralnej»).



Rys. 1

Po przedstawieniu w przyjętym układzie współrzędnych (por. rys. 1, gdzie x, y są współrzędnymi ortogonalnymi układu osi, mierzonymi odpowiednio wzdłuż i normalnie do konturu ścianki przed odkształceniem) równań Naviera-Stokesa i równania ciągłości [87] dla wypadkowego przepływu $V = V_0 + V_1$ i zlinearyzowaniu tych równań względem V_1 otrzymuje się następujące trzy równania dla składowych u, v prędkości zaburzenia oraz ciśnienia zaburzenia p_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_0}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(U_0' + \frac{KU_0}{1+Ky} \right) v &= -\frac{1}{1+Ky} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \Delta u + \frac{2K}{(1+Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2}{(1+Ky)^2} u \right\}, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_0}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2KU_0}{1+Ky} u &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \\
 &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \Delta v - \frac{2K}{(1+Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2}{(1+Ky)^2} v \right\}, \\
 \frac{1}{1+Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{K}{1+Ky} v &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

gdzie $K = \bar{\delta}/\bar{R}$ jest bezwymiarową krzywizną konturu ścianki przed odkształceniem, $Re = \bar{U}_\delta \bar{\delta}/\bar{\nu}$ liczbą Reynoldsa, odniesioną do grubości warstwy przyściennej $\bar{\delta}$ (gdzie $\bar{\nu}$ jest lepkością kinematyczną płynu), natomiast Δ określone jest następująco:

$$\Delta = \frac{1}{(1+Ky)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{K}{1+Ky} \frac{\partial}{\partial y}$$

Układ równań (1.2) ma postać bezwymiarową; przy przechodzeniu do wielkości bezwymiarowych za charakterystyczną prędkość odniesienia przyjęto prędkość przepływu podstawowego na granicy warstwy przyściennej \bar{U}_δ , a za charakterystyczną długość odniesienia $-\bar{\delta}$.

Wprowadźmy teraz spełniającą równanie ciągłości taką funkcję prądu $\Psi(x, y, t)$, że

$$(1.3) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{1+Ky} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

oraz wyeliminujmy ciśnienie zaburzenia p_1 z pozostałych dwóch równań układu (1.2); otrzymujemy wtedy następujące równanie dla funkcji prądu zaburzenia Ψ :

$$(1.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U_0}{1+Ky} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \Psi - \frac{1}{1+Ky} \left[U_0'' + \frac{KU_0'}{1+Ky} - \frac{K^2 U_0}{(1+Ky)^2} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{Re} \Delta \Delta \Psi = 0.$$

Podstawiając (1.1) do (1.4), pomijając Ky w stosunku do 1⁽¹⁾ oraz uwzględniając tylko wyrazy liniowe względem K , otrzymuje się ostatecznie następującą postać równania różniczkowego dla amplitudy funkcji prądu zaburzenia $f(y)$:

$$(1.5) \quad (U_0 - c)(f'' + Kf' - \alpha^2 f) - (U_0'' + KU_0')f = -\frac{i}{\alpha Re} (f^{IV} + 2Kf''' - 2\alpha^2 f'' + 2K\alpha^2 f' + \alpha^4 f).$$

Równanie to, odgrywające zasadniczą rolę przy badaniu stateczności przepływu, przechodzi w przypadku ścianki płaskiej ($K=0$) w znane równanie Orra-Sommerfelda.

2. WARUNKI BRZEGOWE

Ponieważ nie uwzględniamy wpływu odkształcenia ścianki na profil prędkości przepływu podstawowego, to równanie powyższe jest identyczne w przypadku ścianki sztywnej i podatnej. Różnica między tymi dwoma rodzajami ścianek występuje w rozpatrywanym przybliżeniu tylko w warunkach brzegowych.

Pierwsze dwa warunki dla funkcji $f(y)$ wynikają z wymagania, aby składowe prędkości względnej płynu względem elementu konturu ścianki zerowały się na tym konturze. Natomiast pozostałe dwa warunki wynikają z żądania, aby składowe u, v

(1) Z założenia 1 wynika, że $K \ll 1$; a więc wewnątrz warstwy przyściennej, gdzie $y \ll 1$, spełniona jest nierówność $Ky \ll 1$.

prędkości zaburzenia zerowały się w nieskończenie wielkiej odległości w kierunku normalnym do konturu ścianki przed odkształceniem. Powyższe cztery warunki można zapisać następująco:

dla $y = y_w$

$$(2.1) \quad \frac{\partial y_w}{\partial t} = v(x, y, t), \quad U_0(y) + u(x, y, t) = 0,$$

dla $y \rightarrow \infty$

$$u(x, y, t) \rightarrow 0, \quad v(x, y, t) \rightarrow 0,$$

gdzie $y_w(x, t)$ jest funkcją określającą odkształcenie konturu ścianki, a wyraz $\partial y_w / \partial t$ określa prędkość elementu konturu ścianki w kierunku osi y .

Zgodnie z założeniem 3 odkształcenie ścianki ma postać fali powierzchniowej, określonej związkami

$$(2.2) \quad y_w(x, t) = a \exp [i\alpha(x - ct)],$$

gdzie $a = \bar{a}/\delta$ jest zespoloną, bezwymiarową amplitudą fali ścianki odniesioną do $\bar{\delta}$.

Uwzględniając, że odkształcenie y_w konturu ścianki jest małe (w tym sensie, że $a \ll 1$) oraz że dla rozpatrywanych profili prędkości spełniona jest zależność $U_0(0) = 0$, można warunkom (2.1)_{1,2} nadać w pierwszym przybliżeniu następującą postać:

$$(2.3) \quad \frac{\partial y_w}{\partial t} = v(x, 0, t), \quad U_0'(0) y_w + u(x, 0, t) = 0.$$

Postępując tak, jak przy badaniu stateczności przepływu nad ścianką płaską, zastępujemy warunek (2.1)₃ przez warunek zgodności na granicy warstwy przyściennej rozwiązania «lepkiego» równania (1.5) z rozwiązaniem dla płynu nielepkiego⁽¹⁾. Otrzymujemy w ten sposób następującą postać trzeciego warunku:

$$f'(1) + \alpha_K f(1) = 0, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_K = \sqrt{\alpha^2 + (K/2)^2} + K/2.$$

Po uwzględnieniu związków (1.1), (1.3) i (2.2) warunki (2.3) można sformułować następująco:

$$(2.4) \quad ca = f(0), \quad U_0'(0) a + f'(0) = 0.$$

W celu eliminacji z powyższych warunków amplitudy fali ścianki a przyjmujemy za B. BENJAMINEM następującą postać zależności między tą wielkością i bezwymiarową podatnością dynamiczną ścianki Y :

$$(2.5) \quad a = \frac{Y \hat{p}(0)}{U_0'(0) c},$$

gdzie $\hat{p}(0)$ jest określoną na powierzchni ścianki nieodkształconej (tzn. dla $y=0$) amplitudą fali ciśnienia zaburzenia

$$(2.6) \quad p_1(x, y, t) = \hat{p}(y) \exp [i\alpha(x - ct)].$$

(1) W obszarze poza warstwą przyścinną ($y \geq 1$) równanie (1.5) redukuje się do postaci $f_{nl}'' + K f_{nl}' - \alpha^2 f_{nl} = 0$. Z dwóch liniowo niezależnych rozwiązań tego równania trzeba odrzucić rozwiązanie rosnące ze wzrostem y , jako nie spełniające warunku (2.1)₄. W ten sposób otrzymuje się rozwiązanie $f_{nl}(y) = \text{const} e^{-\alpha_K y}$ (gdzie $\alpha_K = \sqrt{\alpha^2 + (K/2)^2} + K/2$) dla $y \geq 1$.

Postępując podobnie jak B. BENJAMIN [58] w przypadku ścianki płaskiej otrzymano (por. Dodatek A) następującą zależność na wielkość $\hat{p}(0)$:

$$(2.7) \quad \hat{p}(0) = cf'_{nl}(0) + [U'_0(0) + Kc]f_{nl}(0),$$

gdzie $f_{nl}(y)$ jest kombinacją liniową rozwiązań «nielepkich» równania (1.5).

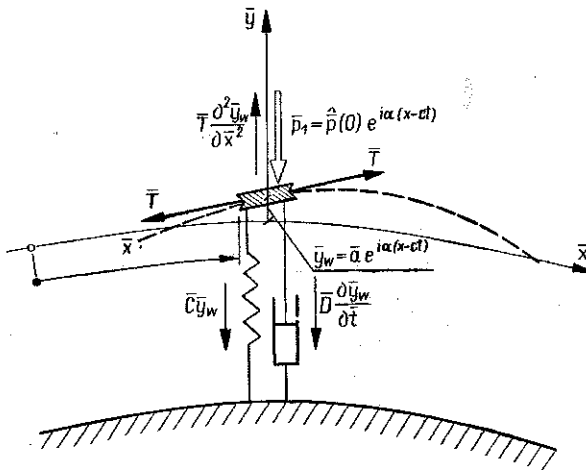
Po zastąpieniu warunku (2.4)₁ przez kombinację liniową obydwu warunków układu (2.4) oraz po uwzględnieniu zależności (2.5) i (2.7) otrzymano następujący układ warunków dla funkcji $f(y)$:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f'(0) + \frac{U'_0(0)}{c}f(0) = 0, \quad f'(1) + \alpha_K f(1) = 0, \\ f'(0) + Y \left\{ f'_{nl}(0) + \left[\frac{U'_0(0)}{c} + K \right] f_{nl}(0) \right\} = 0, \quad [f(y)]_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Warunki (2.8) obejmują również przypadek ścianki sztywnej, dla której podatność dynamiczna Y jest równa zero.

3. PODATNOŚĆ DYNAMICZNA ŚCIANKI

Jako model podatnej ścianki przyjmujemy membranę o masie na jednostkę pola powierzchni \bar{M} [kg/m²] i sile naciągu na jednostkę długości \bar{T} [N/m], powiązaną z podłożem winklerowskim o stałej sprężystej na jednostkę pola powierzchni



Rys. 2

\bar{C} [N/m³] i współczynnika tłumienia wiskotycznego na jednostkę pola powierzchni membrany \bar{D} [Ns/m³]. Równanie ruchu elementu membrany w kierunku osi y może być napisane następująco:

$$(3.1) \quad \bar{M} \frac{\partial^2 \bar{y}_w}{\partial t^2} = \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{y}_w}{\partial \bar{x}^2} - \bar{D} \frac{\partial \bar{y}_w}{\partial t} - \bar{C} \bar{y}_w - \bar{p}_1(\bar{x}, 0, t).$$

Po sprowadzeniu powyższego równania do postaci bezwymiarowej i uwzględnieniu, że zarówno ciśnienie zaburzenia $p_1(x, y, t)$ jak i odkształcenie ścianki $y_w(x, t)$ ma postać fal poprzecznych (2.6) i (2.2), można z niego otrzymać następujący wzór na podatność dynamiczną ścianki:

$$(3.2) \quad Y \equiv U'_0(0) c \frac{a}{\hat{p}(0)} = \frac{U'_0(0) c}{m \{ \alpha^2 (c^2 - c_0^2) - \omega_0^2 \} + i \alpha c d},$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ oraz m, d, c_0, ω_0 to cztery bezwymiarowe wielkości, charakteryzujące własności mechaniczne podatnej ścianki:

$$(3.3) \quad m = \frac{\bar{M}}{\rho \delta}, \quad d = \frac{\bar{D}}{\rho \bar{U}_s},$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{\bar{T}}{\bar{M}}} \frac{1}{\bar{U}_s}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{M}}} \frac{\delta}{\bar{U}_s}.$$

Powyższe wielkości mają określony sens fizyczny: m i d są to odpowiednio współczynnik masowy i współczynnik tłumienia wewnętrznego ścianki, c_0 jest prędkością swobodnej fali odkształcenia membrany, a ω_0 oznacza bezwymiarową częstość kołową drgań swobodnych, nietłumionych sprężystego podłoża membrany.

W przypadku stateczności neutralnej ($c_r = c, c_i = 0$) część rzeczywista i urojona podatności dynamicznej przybiera odpowiednio następującą postać:

$$(3.4) \quad Y_r = Y_r(c, \alpha; m, c_0, \omega_0, d) = - \frac{U'_0(0) m c (c_0^2 + \omega_0^2 / \alpha^2 - c^2)}{(dc)^2 + [m \alpha (c_0^2 + \omega_0^2 / \alpha^2 - c^2)]^2},$$

$$Y_i = Y_i(c, \alpha; m, c_0, \omega_0, d) = - \frac{U'_0(0)}{\alpha} \frac{dc^2}{(dc)^2 + [m \alpha (c_0^2 + \omega_0^2 / \alpha^2 - c^2)]^2}.$$

4. KONSTRUKCJA ROZWIĄZAŃ RÓWNIANIA (1.5)

Cztery liniowo niezależne rozwiązania równania (1.5) znajdziemy w przybliżony sposób, podobnie jak w przypadku klasycznego równania Orra-Sommerfelda. Dwa rozwiązania znajdziemy więc w postaci tzw. rozwiązań «nielepkich», nie związanych z liczbą Reynoldsa Re , a dwa pozostałe rozwiązania — w postaci tzw. rozwiązań «lepkich». Zastosujemy przy tym metodę Heisenberga-Lina, wykorzystując w dalszej analizie rozwiązania nielepkie, które są określone w obszarze o grubości rzędu $(\alpha Re)^{-1/2}$, oraz rozwiązania lepkie, dla których obszar ważności ma grubość rzędu $(\alpha Re)^{-1/3}$ i położony jest blisko «punktu krytycznego» y_c (punkt ten określa równanie $U_0(y_c) = c$).

a. *Rozwiązania nielepkie.* Z doświadczenia wiadomo, że utrata stateczności następuje przy dużych liczbach Reynoldsa Re . Pozwala to traktować $1/\alpha Re$ jako mały parametr i poszukiwać rozwiązania równania (1.5) w postaci szeregu funkcyjnego ze wzrastającymi potęgami tego parametru. W pierwszym przybliżeniu zamiast równania (1.5) otrzymuje się na tej drodze tzw. równanie nielepkie

$$(4.1) \quad (U_0 - c)(f''_{nt} + K f'_{nt} - \alpha^2 f_{nt}) - (U'_0 + K U_0) f_{nt} = 0.$$

Dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania znajdziemy stosując metodę HEISENBERGA [35], która jest poprawna dla odpowiednio małych liczb falowych zaburzenia α . Zgodnie z tą metodą przewidujemy rozwiązanie równania (4.1) w postaci szeregu

$$(4.2) \quad f_{nl}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} q_n(y).$$

Po podstawieniu (4.2) do (4.1) i porównaniu w uzyskanym równaniu wyrazów stojących przy tych samych potęgach α^2 otrzymujemy układ równań różniczkowych dla funkcji $q_n(y)$. Całkując bezpośrednio równanie pierwsze tego układu i stosując metodę uzmiennienia stałych całkowania do uzyskania pozostałych rozwiązań tego układu, otrzyma się następujące dwa rozwiązania równania nielepkiego (4.1):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_1(y) &= (U_0 - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} q_{n,1}(y), & q_{0,1} &= 1, \\ f_2(y) &= (U_0 - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} q_{n,2}(y), & q_{0,2}(y) &= \int_0^y e^{-Ky} (U_0 - c)^{-2} dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$q_{n,v}(y) = \int_0^y e^{-Ky} (U_0 - c)^{-2} \left[\int_0^y e^{Ky} (U_0 - c)^2 q_{n-1,v}(y) dy \right] dy,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad v = 1, 2.$$

Rozwiązanie ogólne równania nielepkiego ma więc postać

$$(4.4) \quad f_{nl}(y) = C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y), \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

b. *Rozwiązania lepkie.* Jako dwa pozostałe liniowo niezależne rozwiązania równania pełnego (1.5) zastosujemy przybliżone rozwiązania o obszarze ważności rozpościerającym się w bliskim otoczeniu punktu krytycznego y_c , gdzie ze względu na występowanie logarytmicznej osobliwości w rozwiązaniu nielepkiem (4.3) można spodziewać się silnego wpływu sił lepkości.

Po podstawieniu do równania (1.5) wyrażenia $f(y) = e^{-Ky/2} F(y)$, wprowadzeniu nowej funkcji $\chi(\zeta) = F(y)$, gdzie ζ jest nową zmienną niezależną tego równania

$$\zeta = (y - y_c)/\varepsilon, \quad \varepsilon = (\alpha \text{Re})^{-1/3} \ll 1,$$

po rozwinięciu funkcji $U_0(y) - c$, $U'_0(y)$ oraz $U''_0(y)$ w szeregi Taylora względem potęg $y - y_c = \varepsilon\zeta$, przewiduje się rozwiązanie uzyskanego równania w postaci szeregu

$\chi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \chi_n(\zeta)$. Porównując następnie w uzyskanym równaniu współczynniki stojące przy tych samych potęgach ε , otrzymuje się układ równań różniczkowych dla funkcji $\chi_n(\zeta)$; pierwsze równanie tego układu ma postać

$$\chi_0^{IV} - iU'_c \zeta \chi_0'' = 0, \quad \text{gdzie} \quad U'_c = \left[\frac{dU_0}{dy} \right]_{y=y_c}.$$

Przy zaniedbaniu wyrazów rzędu 0 (αRe)^{-1/3} w rozwiązaniu pełnego równania (1.5) można więc ograniczyć się do znalezienia rozwiązań powyższego równania dla χ_0 i uzyskać w ten sposób

$$(4.5) \quad \begin{aligned} f_1^*(y) &= e^{-Ky/2} \zeta, \\ f_2^*(y) &= e^{-Ky/2}, \\ f_3(y) &= e^{-Ky/2} \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta \int_{-\infty}^{\zeta} \sqrt{\zeta} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\zeta)^{3/2} \right] d\zeta, \\ f_4(y) &= e^{-Ky/2} \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta \int_{-\infty}^{\zeta} \sqrt{\zeta} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\zeta)^{3/2} \right] d\zeta, \end{aligned}$$

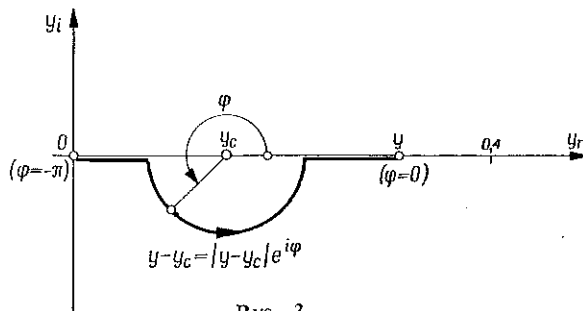
gdzie $H_{1/3}^{(1)}$ i $H_{1/3}^{(2)}$ to odpowiednio pierwsza i druga funkcja Hankela rzędu 1/3 oraz $\beta = \sqrt[3]{U'_c}$, $\zeta = (y - y_c) (\alpha \text{Re})^{1/3}$.

Rozwiązania $f_3(y)$, $f_4(y)$ są poszukiwanymi rozwiązaniami lepkiemi.

Zauważmy jeszcze, że zgodnie z (4.5)₃ mamy $f_3(y) = f_3^0(y) e^{-Ky/2}$, gdzie $f_3^0(y)$ jest odpowiednim rozwiązaniem równania (1.5) w przypadku ścianki płaskiej ($K=0$). Wynika stąd następujący związek:

$$(4.6) \quad \frac{f_3'(y)}{f_3(y)} = \frac{f_3^{0'}(y)}{f_3^0(y)} - \frac{K}{2},$$

który zostanie wykorzystany w dalszych rozważaniach.



Rys. 3

c. Droga całkowania przy określaniu rozwiązań nielepkich (4.3). W odróżnieniu od rozwiązań (4.5) rozwiązania nielepkie (4.3) są niejednoznaczne, co wiąże się z tym, że równanie nielepkie (4.1) jest osobliwe (punkt krytyczny y_c jest w tym równaniu biegunem rzędu 2). Stosując metodę postępowania, użytą przez LINA w przypadku ścianki płaskiej [17], można wykazać, że również w przypadku ścianki zakrzywionej należy w celu ujednoznacznienia rozwiązań nielepkich (4.3) wybrać to rozwiązanie, dla którego przy całkowaniu w dodatnim kierunku rzeczywistej osi y droga całkowania obchodzi z dołu przy ($U'_c > 0$) punkt osobliwy y_c , w zespolonej płaszczyźnie współrzędnej $y = y_r + iy_i$.

Wynika stąd, że w przypadku neutralnych zaburzeń (gdy y_c jest wielkością rzeczywistą) należy dla rzeczywistego $y < y_c$ oraz przy $U'_c > 0$ przyjąć

$$\arg [\ln (y - y_c)] = -\pi.$$

5. RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE

Rozwiązanie ogólne zmodyfikowanego przez krzywiznę ścianki K równania Orra-Sommerfelda (1.5) ma postać

$$f(y) = \sum_{v=1}^4 C_v \cdot f_v(y), \quad C_v = \text{const},$$

gdzie funkcje $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(y)$ i $f_4(y)$ określone są przez wzory (4.3) i (4.5)_{3,4}. W rozpatrywanym zagadnieniu (1.5) i (2.8) musimy przyjąć, że $C_4 = 0$, gdyż rozwiązanie $f_4(y)$ nie spełnia czwartego warunku układu (2.8). Z pozostałych warunków tego układu uzyskać można układ trzech jednorodnych, liniowych równań algebraicznych dla stałych C_1 , C_2 i C_3 , z którego wynika zespolone równanie charakterystyczne zagadnienia w postaci $F(\alpha, \text{Re}, c; K, m, c_0, \omega_0, d) = 0$.

Nietrywialne rozwiązania na stałe C_1 , C_2 , C_3 będą oczywiście istniały tylko wtedy, gdy wyznacznik charakterystyczny wspomnianego układu równań algebraicznych będzie równy zeru:

(5.1)

$$\begin{vmatrix} f_1'(0) + \frac{U_0'(0)}{c} f_1(0), & f_2'(0) + \frac{U_0'(0)}{c} f_2(0), & f_3'(0) + \frac{U_0'(0)}{c} f_3(0) \\ f_1'(0) + Y \left\{ f_1'(0) + \left[\frac{U_0'(0)}{c} + K \right] f_1(0) \right\}, & f_2'(0) + Y \left\{ f_2'(0) + \left[\frac{U_0'(0)}{c} + K \right] f_2(0) \right\}, & f_3'(0) \\ f_1'(1) + \alpha_K f_1(1), & f_2'(1) + \alpha_K f_2(1), & f_3'(1) + \alpha_K f_3(1) \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając wyznacznik można stwierdzić, że rząd wielkości wyrazu związanego z $f_3'(1) + \alpha_K f_3(1)$ jest niższy od rzędu wielkości wyrazów związanych z $f_3'(0)$ oraz $f_3(0)$. Można więc, podobnie jak w przypadku ścianki płaskiej [77], pominąć pierwszy wspomniany wyraz w porównaniu do pozostałych; jest to równoznaczne z przyjęciem w wyznaczniku (5.1) zamiast elementu $f_3'(1) + \alpha_K f_3(1)$ elementu równego zeru.

Jeśli w powyższym wyznaczniku uwzględnimy jeszcze zależności

$$f_1(0) = -c, \quad f_2(0) = 0, \quad f_1'(0) = U_0'(0), \quad f_2'(0) = -1/c,$$

wynikające ze wzorów (4.3), to można dojść do następującej postaci równania charakterystycznego:

$$(5.2) \quad \frac{f_3'(0)}{f_3(0)} = -\frac{U_0'(0)}{c} \frac{1+w+Y \left[1 - K \frac{cw}{U_0'(0)} \right]}{w+Y \left[1 - K \frac{cw}{U_0'(0)} \right]},$$

gdzie

$$(5.3) \quad w(\alpha, c; K) = U_0'(0) c \frac{f_2'(1) + \alpha_K f_2(1)}{f_1'(1) + \alpha_K f_1(1)}$$

jest zespolonym wyrażeniem funkcyjnym, nie zależnym od lepkości przepływu.

Po wykorzystaniu zależności (4.6) i dokonaniu pewnych przekształceń można ostatecznie otrzymać następującą postać równania charakterystycznego:

$$(5.4) \quad \mathcal{F}(z) = 1 + \frac{w + Y(1 + \Delta_1 w)}{1 + \lambda + \lambda_1 [w + Y(1 + \Delta_1 w)]},$$

gdzie $\mathcal{F}(z) = [1 + f_3^0(0)/y_c f_3^0(0)]^{-1}$ jest uniwersalną funkcją zmiennej $z = y_c [\alpha \operatorname{Re} U'_c]^{1/3}$ (jest to wprowadzona przez LINA tzw. «zmodyfikowana funkcja Tietjensa»; tabele $\mathcal{F}_r(z)$ oraz $\mathcal{F}_i(z)$ znaleźć można np. w [17]), a $\lambda(c)$, $\lambda_1(c; K)$ i $\Delta_1(c; K)$ określają formuły

$$(5.5) \quad \lambda = \frac{U'_0(0) y_c}{c} - 1, \quad \lambda_1 = \lambda - \frac{1}{2} K y_c, \quad \Delta_1 = -\frac{cK}{U'_0(0)}.$$

Lewą stronę równania charakterystycznego (5.4) udało się uniezależnić od krzywizny ścianki K dzięki dogodnej postaci zależności (4.6). Natomiast prawa strona tego równania zależy od K za pośrednictwem wielkości λ_1 i Δ_1 oraz funkcji $w(\alpha, c; K)$, które po podstawieniu (4.3) do (5.3) i dokonaniu dość żmudnych przekształceń może być zapisane w postaci

(5.6)

$$w = U'_0(0) c K_1 + \frac{U'_0(0) c}{\alpha} \frac{(1 - \alpha^2 H_2) \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n} N_{2n} - \eta_K (1 - c)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{2n+1} N_{2n+1} \right\}}{\eta_K (1 - c)^2 \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{2n} M_{2n} \right\} + \alpha \left\{ H_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{2n-2} M_{2n-1} \right\}},$$

gdzie

$$\eta_K = e^K \alpha_K / \alpha,$$

$$K_1 = \int_0^1 U_- dy, \quad K_2 = \int_0^1 U_+ \left[\int_0^y U_- dy \right] dy,$$

$$K_3 = \int_0^1 U_- \left\{ \int_0^y U_+ \left[\int_0^y U_- dy \right] dy \right\} dy, \dots,$$

(5.7)

$$H_1 = \int_0^1 U_+ dy, \quad H_2 = \int_0^1 U_- \left[\int_0^y U_+ dy \right] dy,$$

$$H_3 = \int_0^1 U_+ \left\{ \int_0^y U_- \left[\int_0^y U_+ dy \right] dy \right\} dy, \dots,$$

$$M_n = H_2 H_{n-2} - H_n, \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

$$N_n = K_1 H_{n-1} - K_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

przy czym

$$U_+ = e^{Ky} [U_0(y) - c]^2, \quad U_- = 1/U_+.$$

W konkretnych obliczeniach liczbowych, związanych z wyznaczeniem krzywej stateczności neutralnej, zachowujemy w powyższym wyrażeniu nie tylko podstawową całkę $K_1(c; K)$, lecz również całki $H_1(c; K)$, $H_2(c; K)$, $N_2(c; K)$, $N_3(c; K)$ oraz $M_3(c; K)$; wszystkie te całki z wyjątkiem H_1 są całkami osobliwymi. Stosujemy więc ten sam stopień przybliżenia na $w(\alpha, c; K)$, jaki zastosował LIN [17] w przypadku ścianki płaskiej.

6. WYZNACZANIE KRZYWEJ STATECZNOŚCI NEUTRALNEJ

Krzywą stateczności neutralnej wyznaczmy za pomocą metody analityczno-wykreslonej, którą do zagadnień stateczności przepływu wprowadził TIETJENS, a rozwinął następnie TOLLMEN i SCHLICHTING.

Napiszmy równanie charakterystyczne (5.3) w następującej symbolicznej postaci:

$$(6.1) \quad [\mathcal{F}(z)]_{z=\check{z}} = [\mathcal{C}(\alpha, c; K, m, c_0, \omega_0, d)]_{\substack{c=\check{c} \\ \alpha=\check{\alpha}}}$$

gdzie $\check{c} = \check{c}(\check{\alpha}, \text{Re}; K, m, c_0, \omega_0, d)$ jest wartością własną zagadnienia (1.5), (2.8), związaną z parą parametrów przepływu $\check{\alpha}$, Re , z krzywizną ścianki K oraz z czterema wielkościami m, c_0, ω_0 i d , charakteryzującymi własności mechaniczne podatnej ścianki. Równanie powyższe równoważne jest dwóm równaniom rzeczywistym:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} [\mathcal{F}_r(z)]_{z=\check{z}} &= 1 + \left[\frac{(1+\lambda)a_1 + \lambda_1(a_1^2 + b)^2}{(1+\lambda + \lambda_1 a_1)^2 + (\lambda_1 b)^2} \right]_{\substack{c=\check{c} \\ \alpha=\check{\alpha}}} \\ [\mathcal{F}_i(z)]_{z=\check{z}} &= \left[\frac{(1+\lambda)b}{(1+\lambda + \lambda_1 a_1)^2 + (\lambda_1 b)^2} \right]_{\substack{c=\check{c} \\ \alpha=\check{\alpha}}} \end{aligned}$$

w których oznaczono $a_1 = Y_r + (u-1)(1 + \Delta_1 Y_r) - v\Delta_1 Y_i$, $b = Y_i + v(1 + \Delta_1 Y_r)$, przy czym $u = 1 + w_r$, $v = w_i$; pozostałe wielkości określają wzory (5.5), (5.6) oraz (3.4).

Przy wyznaczaniu z powyższych równań krzywych stateczności neutralnej zastosowano następujący schemat postępowania:

1. Dla ustalonej wartości krzywizny ścianki K oraz ustalonych wartości parametrów m, c_0, ω_0 i d wybiera się szereg wartości y_c .

2. Znając profil prędkości przepływu podstawowego można każdej wartości y_c przyporządkować odpowiednią wartość c , przyjmowanej jako \check{c} . Dla każdej ustalonej grupy wartości $c = \check{c}$, K, m, c_0, ω_0 i d równanie (6.1) przybiera postać $[\mathcal{F}(z)]_{z=\check{z}} = [\mathcal{C}(\alpha)]_{\alpha=\check{\alpha}}$. Związane z wartością własną \check{c} wielkości \check{z} i $\check{\alpha}$ mają taką postać parametrów z, α , dla których zarówno części rzeczywiste jak i urojone funkcji $\mathcal{F}(z)$ oraz $\mathcal{C}(\alpha)$ są sobie równe.

3. Za pomocą danych tablicowych konstruuje się wykres Arganda funkcji $\mathcal{F}(z)$ (rys. 4).

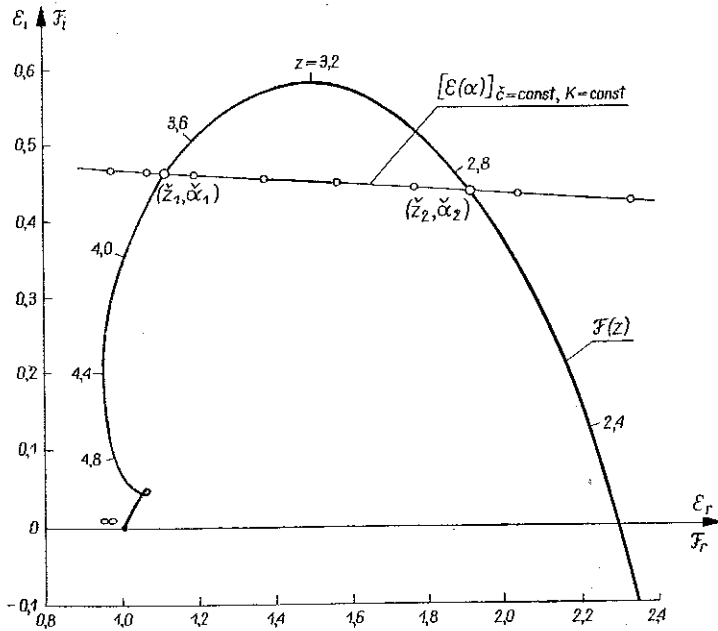
4. Dla różnych wartości parametru α oblicza się \mathcal{C}_r oraz \mathcal{C}_i ze wzorów (6.2) i (6.1), a następnie konstruuje wykres Arganda funkcji $\mathcal{C}(\alpha)$.

5. Dla punktów przecięcia się obydwu krzywych znajduje się poszukiwane parametry \check{z} , \check{c} , związane z wybraną poprzednio wartością \check{c} .

6. Liczbę Reynoldsa przepływu znajduje się z formuły

$$Re = \left(\frac{z}{y_c}\right)^3 \frac{1}{\alpha U_c'}$$

7. Powtarzając powyższe (od 3 do 6) dla pewnego zbioru wartości y_c , można otrzymać krzywą stateczności neutralnej bądź to w postaci $\alpha = \alpha(Re)$, bądź też w postaci $c_r = c_r(Re)$.



Rys. 4

W niniejszej pracy krzywe stateczności neutralnej podane zostaną w postaci wykresów $\alpha^* = \alpha^*(\log Re^*)$, gdzie wielkości α^* i Re^* określają związki $\alpha^* = \alpha \cdot \bar{\delta}^* / \delta$, $Re^* = Re \cdot \bar{\delta}^* / \delta$, przy czym $\bar{\delta}^*$ jest tzw. miarą liniową straty wydatku.

7. METODA OBLICZEŃ

Przy wyznaczaniu krzywych stateczności neutralnej bardzo istotnym etapem jest obliczanie wielkości \check{c}_r oraz \check{c}_i , do czego potrzebna jest znajomość jawnej postaci całek, wchodzących w wyrażenie na funkcje $w_r(\alpha, c; K)$ i $w_i(\alpha, c; K)$. W ślad za Linem stosujemy następujące przybliżenia przy wyznaczaniu $w(\alpha, c; K)$.

1. Przyjmujemy, że urojona część wyrażenia $w(\alpha, c; K)$ zależy głównie od całki $K_1(c; K)$, co dla odpowiednio małych wartości c i K pozwoli pominąć udział pozostałych całek układu (5.7) w urojonej części wyrażenia (5.6) [17].

2. We wzorze na $w(\alpha, c; K)$ pominiemy wszystkie występujące tam całki, z wyjątkiem całek K_1, H_1, H_2, N_2 (w Dodatku C pokazano, że $N_2 = H_2$), N_3 i M_3 ; przybliżenie to związane jest z tym, że każda z całek H_n, K_n ($n=1, 2, \dots$) zawiera malejący czynnik $1/n!$ oraz że dla $\alpha < 1$ każda z tych całek stoi przy malejącym czynniku α^n [por. (5.6)].

Ponieważ dla rozpatrywanych w pracy profili prędkości nie można znaleźć zamkniętych rozwiązań na całki K_1, H_2, N_2, N_3 i M_3 , więc postępujemy następująco.

W celu możliwie dokładnego wyznaczenia wartości tych całek osobliwych rozdzielamy ich obszar całkowania na dwie części (w przypadku profilu prędkości Blasiusa (8.1) dzielimy ten obszar na trzy części): na obszar $0 \leq y \leq 0,4$ oraz $0,4 \leq y \leq \leq 1$. Zakładamy przy tym, że współrzędna y_c punktu osobliwego całek jest mniejsza od 0,4. W ten sposób otrzymujemy nowy układ całek, z których część jest osobliwa, a część — nieosobliwa.

W celu wyznaczenia otrzymanych całek osobliwych rozwijamy ich funkcje podcałkowe w szeregi Laurenta w otoczeniu punktu y_c , po czym całkujemy skończoną ilość wyrazów tych szeregów w przedziale $0 \leq y \leq 0,4$. Uwzględniamy przy tym warunek, aby podczas całkowania w dodatnim kierunku rzeczywistej osi y droga całkowania obchodziła z dołu punkt osobliwy y_c .

Następnie przy użyciu 6-cio węzłowych wzorów Gaussa [80] wyznaczamy numerycznie nowootrymane całki nieosobliwe oraz całkę H_1 .

W ten sposób dla różnych wartości parametrów $\alpha, c, K, m, c_0, \omega_0, d$ i ewentualnie A wyznaczono część rzeczywistą i urojoną prawej strony równania charakterystycznego (6.1). Obliczenia te przeprowadzono przy użyciu maszyny cyfrowej «GIER», należącej do Zakładu Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

W Dodatku C zamieszczono szereg szczegółów, związanych z zastosowaniem powyższego schematu postępowania do dwóch konkretnych profili prędkości.

Natomiast poniżej wyprowadzimy pewne zależności ogólne, z których wielokrotnie korzysta się przy wyznaczaniu wspomnianych powyżej całek osobliwych.

Rozpatrzmy całkę osobliwą typu $\int_0^y a(y) dy / [U_0(y) - c]^2$, która daje się sprowadzić do rozpatrywanej przez HADAMARDA [81] całki $\int_0^y F(y) dy / (y - y_c)^2$, będącej pierwszą pochodną całki typu Cauchy'ego. Załóżmy przy tym, że punkt osobliwy y_c rozpatrywanej całki znajduje się na rzeczywistej osi współrzędnej y .

Rozwińmy funkcję podcałkową powyższej całki w szereg Laurenta w otoczeniu punktu y_c :

$$(7.1) \quad \frac{a(y)}{(U_0 - c)^2} = \frac{F_c}{(y - y_c)^2} + \frac{F'_c}{y - y_c} + \frac{1}{2} F''_c + \frac{1}{3!} F'''_c (y - y_c) + \dots,$$

gdzie stałe F_c, F'_c, F''_c, \dots są odpowiednimi pochodnymi funkcji $F(y) = \left(\frac{y - y_c}{U_0 - c}\right)^2 a(y)$ określonymi dla $y = y_c$. Pamiętajmy, że przy całkowaniu wzdłuż rzeczywistej osi y

oraz dla $U'_c > 0$ należy obejść z dołu punkt krytyczny y_c , można uzyskać następującą postać całki szeregu (7.1):

$$(7.2) \quad \int_0^y \frac{a(y)}{(U_0 - c)^2} dy = \\ = \left[-\frac{F_c}{y - y_c} + F'_c \ln \{|y - y_c| e^{i\varphi}\} + \frac{1}{2} F''_c (y - y_c) + \frac{F'''_c}{2 \cdot 3!} (y - y_c)^2 + \dots \right]_{0(-\pi)}^{y(0)}$$

Część urojoną i rzeczywistą rozpatrywanej całki można więc ostatecznie napisać w następującej postaci:

$$(7.3) \quad \text{Im} \left\{ \int_0^y \frac{a(y)}{(U_0 - c)^2} dy \right\} = F'_c (\varphi - \varphi_0) = \pi F'_c, \\ \text{Re} \left\{ \int_0^y \frac{a(y)}{(U_0 - c)^2} dy \right\} = -\frac{F_c y}{y_c (y - y_c)} + F'_c \ln \frac{|y - y_c|}{y_c} + \frac{F''_c}{2} y + \\ + \frac{F'''_c}{12} [(y - y_c)^2 - y_c^2] + \frac{F^{IV}_c}{72} [(y - y_c)^3 + y_c^3] + \frac{F^V_c}{480} [(y - y_c)^4 - y_c^4] + \\ + \frac{F^{VI}_c}{3600} [(y - y_c)^5 + y_c^5] + 0 (y - y_c)^6,$$

gdzie

$$F_c = a_c A, \quad F'_c = a'_c A + 2a'_c B + a_c C, \\ F''_c = a''_c A + a_c B, \quad F'''_c = a'''_c A + 3a''_c B + 3a'_c C + a_c D, \\ F^{IV}_c = a^{IV}_c A + 4a'''_c B + 6a''_c C + 4a'_c D + a_c E, \\ F^V_c = a^V_c A + 5a^{IV}_c B + 10a'''_c C + 10a''_c D + 5a'_c E + a_c G, \\ F^{VI}_c = a^{VI}_c A + 6a^V_c B + 15a^{IV}_c C + 20a'''_c D + 15a''_c E + 6a'_c G + a_c H,$$

gdzie

$$(7.4) \quad A = M_0^{-2}, \quad C = 6M_1^2 M_0^{-4} - 2M_2 M_0^{-3}, \\ B = -2M_1 M_0^{-3}, \quad D = -24M_1^3 M_0^{-5} + 18M_1 M_2 M_0^{-4} - 2M_3 M_0^{-3}, \\ E = 120M_1^4 M_0^{-6} - 144M_1^2 M_2 M_0^{-5} + (18M_2^2 + 24M_1 M_3) M_0^{-4} - 2M_4 M_0^{-3}, \\ G = -720M_1^5 M_0^{-7} + 1100M_1^3 M_2 M_0^{-6} - (350M_1 M_2^2 + 240M_1^2 M_3) M_0^{-5} + \\ + (60M_2 M_3 + 30M_1 M_4) M_0^{-4} - 2M_5 M_0^{-3}, \\ H = 5040M_1^6 M_0^{-8} - 10200M_1^4 M_2 M_0^{-7} + (2300M_1^3 M_3 + 5050M_1^2 M_2^2) M_0^{-6} - \\ - (1470M_1 M_2 M_3 + 350M_2^3 + 360M_1^2 M_4) M_0^{-5} + \\ + (60M_2^2 + 90M_2 M_4 + 6M_1 M_5) M_0^{-4} - 2M_6 M_0^{-3},$$

przy czym

$$M_0 = U'_c, \quad M_1 = \frac{1}{2} U''_c, \dots, M_n = \frac{1}{n+1} U_0^{(n+1)}, \dots$$

Użyto wprowadzonych poprzednio oznaczeń:

$$a_c = a(y_c), \quad a'_c = [a'(y)]_{y=y_c}, \dots,$$

$$U_c = U_0(y_c), \quad U'_c = [U'_0(y)]_{y=y_c}, \dots$$

Przy pomocy wzorów (7.3) określimy w pierwszym obszarze zmiennej y ($0 \leq y \leq 0,4$) wszystkie potrzebne nam całki osobliwe: K_1, H_2, N_2 oraz M_3 (por. Dodatek C).

Uwaga: W przypadku ścianki płaskiej ($K=0$) funkcję $w(\alpha, c)$ wyznacza się zazwyczaj w tzw. «uproszczonych wzorów» LINA [3]. Po pominięciu w wyrażeniu (5.6) wszystkich występujących tam całek z wyjątkiem całki $K_1(c; K)$ otrzymać można (por. Dodatek B) następującą postać tych uproszczonych wzorów w przypadku ścianki zakrzywionej:

$$(7.5) \quad w_r(\alpha, c; K) = \frac{U'_0(0)c}{\alpha_K(1-c)^2} e^{-K} + \left[-\frac{U'_0(0)}{U'_c} + U'_0(0)c \left(\frac{U''_c}{U'^3_c} + \frac{K}{U'^2_c} \right) \ln c \right] e^{-Kyc},$$

$$w_i(c; K) = -\pi U'_0(0)c \left(\frac{U''_c}{U'^3_c} + \frac{K}{U'^2_c} \right) e^{-Kyc}.$$

Jednakże w niniejszej pracy nie stosujemy powyższych wzorów uproszczonych, gdyż uzyskane za ich pomocą wyniki różnią się dość znacznie od wyników, jakie otrzymano na drodze doświadczalnej, lub za pomocą zastosowanej w pracy «dokładnej» metody Lina (por. np. rys. 6 i 7).

8. WYNIKI DLA ŚCIANKI SZTYWNEJ

Przy rozpatrywaniu wpływu krzywizny ścianki wypukłej na stateczność przepływu oddzielnie zanalizowano wpływ dodatkowych sił masowych (typu siły Coriolisa i odśrodkowej), związanych bezpośrednio z krzywizną ścianki, a oddzielnie wpływ gradientu ciśnienia przepływu podstawowego. W związku z tym krzywe stateczności neutralnej wyznaczono dla dwóch typów profili prędkości:

a) dla aproksymowanego przez Lina profilu Blasiusa

$$(8.1) \quad U_0(y) = \begin{cases} 2y - 3y^4 & \text{dla } 0 \leq y \leq 0,4, \\ 1 - (0,9 - y)^2 & \text{dla } 0,4 \leq y \leq 0,9, \\ 1 & \text{dla } y \geq 0,9, \end{cases}$$

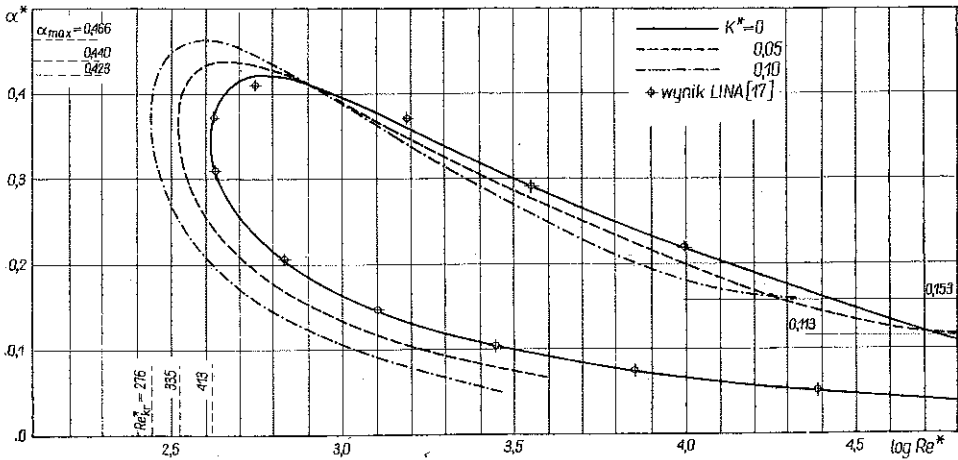
a więc dla profilu z zerowym gradientem ciśnienia;

b) dla rodziny profili prędkości Pohlhausena z wielomianem szóstego stopnia [12]:

$$(8.2) \quad U_0(y; A) = 2y - 5y^4 + 6y^5 - 2y^6 + A(0,2y - 0,5y^2 + y^4 - y^5 + 0,3y^6),$$

gdzie $A = (\bar{\delta}^2/\nu)(d\bar{U}_\delta/d\bar{x})$ to tzw. parametr Pohlhausena, wiążący każdy profil tej rodziny ze ściśle określonym gradientem ciśnienia przepływu podstawowego.

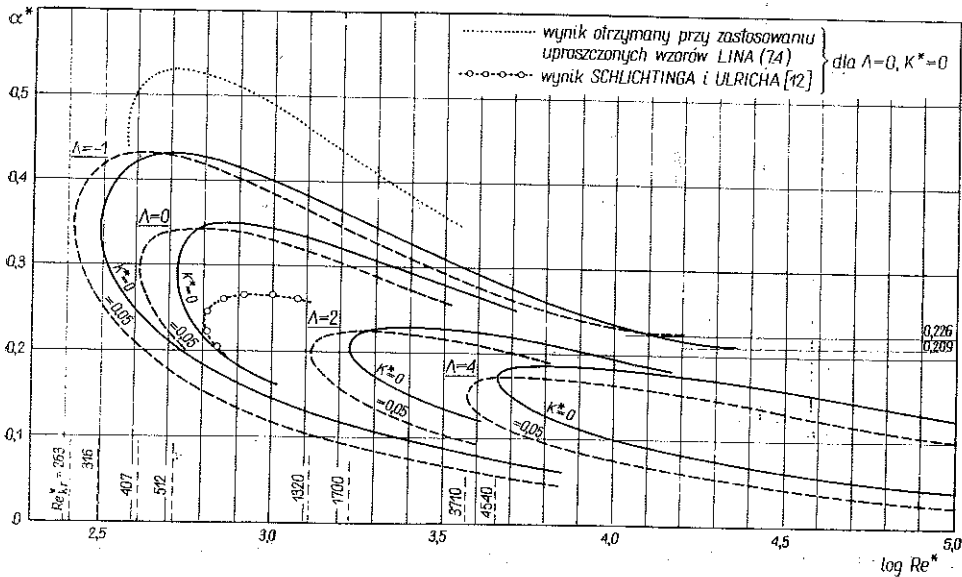
Wszystkie wielkości bezwymiarowe, które występują na poniższych rysunkach i związane są z gwiazdką (*), odniesione są do «miary liniowej wydatku» warstwy przyściennej $\bar{\delta}^*$; dla profilu Blasiusa przyjęto za Lina $\bar{\delta}^*/\bar{\delta} = 0,28673$, a dla rodziny profili prędkości Pohlhausena przyjęto za Schlichtingiem $\bar{\delta}^*/\bar{\delta} = 2/7 - A_{P6}/105$.



Rys. 5

Wpływ krzywizny ścianki wypukłej $K^* = \bar{\delta}^*/\bar{R}$ na stateczność przepływu w przypadku profilu prędkości Blasiusa zobrazowano na rys. 5. Widać, że wraz ze wzrostem zakrzywienia ścianki wypukłej następuje obniżenie krytycznej liczby Reynoldsa Re_{Kr}^* (z 413 — dla ścianki płaskiej, przez 335 dla ścianki o krzywiznie $K^* = 0,05$, do 276 dla ścianki o krzywiznie $K^* = 0,10$), czyli rozszerzenie zakresu niestatecznych liczb Reynoldsa. Ponadto wraz ze wzrostem zakrzywienia ścianki wypukłej przy $Re^* = \infty$ (czyli w przypadku przepływu nielepkiego) zaczyna rozszerzać się zakres niestatecznych liczb falowych zaburzenia α^* , tzn. pojawia się i rozszerza tzw. «nielepka niestateczność». Ponieważ w przypadku ścianki płaskiej obydwie gałęzie krzywej stateczności neutralnej zmiernają przy $Re^* \rightarrow \infty$ do tej samej osi współrzędnych Re^* , przeto zakres wartości niestatecznych liczb falowych α^* redukuje się do zera przy $Re^* = \infty$ i nielepka niestateczność nie występuje w tym przypadku. W związku z tym można stwierdzić, że zakrzywieniu ścianki wypukłej towarzyszy jakościowa zmiana, objawiająca się w pojawieniu nielepkiej niestateczności. Na rys. 5 naniesiono również wynik Lina [17], uzyskany dla ścianki płaskiej. Widać, że między wynikiem Lina, a uzyskanym przez autora pracy wynikiem przy $K^* = 0$ istnieje zadowalająca zgodność (również co do wartości krytycznej liczby Reynoldsa, która u Lina jest równa $Re_{Kr}^* = 420$, a uzyskana w niniejszej pracy — 413).

Jednoczesny wpływ krzywizny ścianki i gradientu ciśnienia przepływu podstawowego na stateczność przepływu przedstawiono na rys. 6. Występujący na tym rysunku parametr Pohlhausena Λ związany jest z gradientem ciśnienia przepływu podstawowego $d\bar{p}_0/d\bar{x}$ następującą zależnością: $\Lambda \equiv \frac{\delta^2}{\nu} \frac{d\bar{U}_\delta}{d\bar{x}} = -\frac{1}{\rho \bar{U}_\delta} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}}$; ujemnym wartościom parametru Pohlhausena odpowiada więc wzrost ciśnienia w kierunku przepływu oraz wystąpienie punktu przegięcia na profilu prędkości, a dodatnim wartościom parametru Λ — spadek ciśnienia w kierunku przepływu i brak punktu przegięcia na profilu prędkości przepływu podstawowego. Widać, że przy wszystkich rozpatrywanych wartościach parametru Λ wzrostowi krzywizny ścianki wypukłej towarzyszy obniżenie krytycznej liczby Reynoldsa. Widać ponadto, że wzrostowi krzywizny ścianki K towarzyszy rozszerzenie zakresu wartości niestatecznych liczb falowych nielepkiej niestateczności dla tych profili prędkości, które związane są z ujemnym parametrem Pohlhausena Λ (dla tych profili prędkości nielepka niestateczność występuje również w przypadku ścianki płaskiej). Można natomiast przypuszczać, że dla profili prędkości z zerowym oraz z dodatnimi wartościami parametru Λ (dla których w przypadku ścianki płaskiej nielepka niestateczność nie występuje) wzrost zakrzywienia ścianki wypukłej może powodować pojawienie się nielepkiej niestateczności.

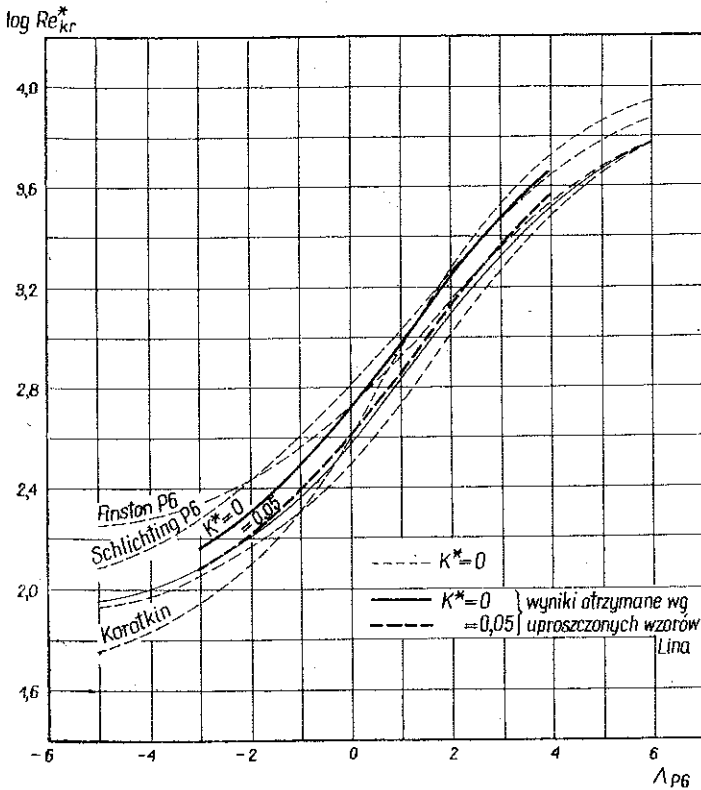


Rys. 6

Na rys. 6 naniesiono również fragment krzywych stateczności neutralnej otrzymanych dla ścianki płaskiej i profilu prędkości Pohlhausena z zerowym gradientem ciśnienia (tzn. $K^* = 0, \Lambda = 0$). Wyniki te są dwójakiego rodzaju: wyniki SCHLICHTINGA i ULRICHA [12] oraz wyniki otrzymane przez autora pracy, stosującego w tym przypadku «uproszczone wzory» Lina [por. wzór (7.4)].

O ile dokładna metoda Lina, którą stosowano w niniejszej pracy, daje w przypadku $K^*=0$, $A=0$ wartość krytycznej liczby Reynoldsa równą $Re_{kr}^*=512$, to wynik, uzyskany wg uproszczonych wzorów Lina daje $Re_{kr}^*=371$, a wynik Schlichtinga i Ulricha — $Re_{kr}^*=645$. Ponadto obszar objęty krzywą stateczności neutralnej jest w przypadku zastosowania uproszczonych wzorów Lina znacznie większy, a w przypadku wyniku Schlichtinga i Ulricha — znacznie mniejszy niż w przypadku dokładnej metody Lina.

Rysunek 7 przedstawia zależność między krytyczną liczbą Reynoldsa Re_{kr}^* i parametrem Pohlhausena A_{P6} (gdzie indeks P6 oznacza, że A odniesione jest do grubości warstwy przyściennej $\bar{\delta}_{P6}$, liczonej przy założeniu profilu prędkości Pohlhause-



Rys. 7

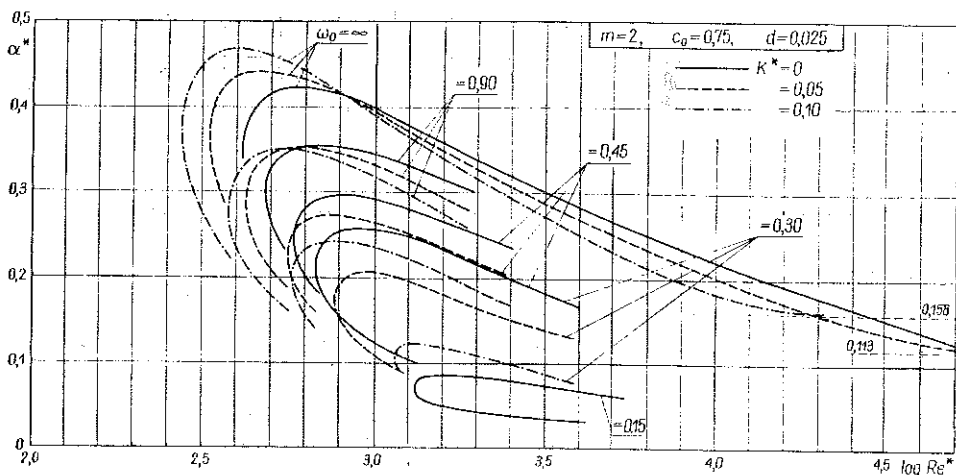
na z wielomianem 6-tego stopnia). Grubą linią ciągłą i przerywaną zaznaczono wyniki otrzymane bezpośrednio z rys. 6 odpowiednio dla $K^*=0$ oraz 0,05. Na rysunek naniesiono również wyniki (cienka linia ciągła i przerywana) odpowiadające krzywym stateczności neutralnej, które autor pracy uzyskał przy zastosowaniu uproszczonych wzorów Lina, a których nie naniesiono na rys. 6 (z wyjątkiem przypadku $A=0$, $K^*=0$). Widać, że w całym rozpatrywanym zakresie parametrów Pohlhausena A_{P6} , krytyczna liczba Reynoldsa Re_{kr}^* otrzymana przy zastosowaniu uproszczonych wzorów Lina jest *niższa* od krytycznej liczby Reynoldsa, uzyskanej

dokładną metodą Lina. Można również stwierdzić, że wpływ gradientu ciśnienia przepływu podstawowego na stateczność przepływu jest znacznie większy od bezpośredniego wpływu krzywizny ścianki; widać bowiem, że możliwości zwiększenia krytycznej liczby Reynoldsa są *znacznie większe* w przypadku podwyższenia wartości parametru Pohlhausena A_{P6} (czyli w przypadku obniżenia wartości gradientu ciśnienia mierzonego w kierunku przepływu) przy stałej krzywiznie niż w przypadku zmniejszenia krzywizny ścianki wypukłej K^* od wartości rzędu 0,10 do zera przy stałym parametrze Pohlhausena A .

Na rys. 7 naniesiono również wyniki uzyskane dla płaskiej ścianki przez SCHLICHTINGA i ULRICHA [12], FINSTONA [44] oraz KOROTKINA [46]. Widać, że rozbieżności między powyższymi wynikami są dość duże.

9. WYNIKI DLA ŚCIANKI PODATNEJ

Wyniki podane zostaną w postaci układu krzywych stateczności neutralnej, za pomocą którego określimy wpływ zarówno krzywizny jak i elastyczności ścianki na stateczność przepływu. Wyniki te dotyczyć będą tylko jednego profilu prędkości: profilu Blasiusa aproksymowanego przez Lina wzorem (8.1). W przypadku ścianki elastycznej ograniczamy się więc do rozpatrzenia bezpośredniego wpływu krzywizny ścianki na stateczność przepływu, gdyż nie uwzględniamy wpływu gradientu ciśnienia przepływu podstawowego, związanego pośrednio z krzywizną ścianki.



Rys. 8

Wpływ krzywizny ścianki $K^* = \bar{\delta}^*/\bar{R}$ oraz częstości kołowej drgań swobodnych nietłumionych sprężystego podłoża membrany $\omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{M}}} / \frac{\bar{U}_\delta}{\bar{\delta}}$ na stateczność przepływu ilustruje rys. 8. Otrzymano go przyjmując, że pozostałe trzy bezwymiarowe wielkości charakteryzujące elastyczną ściankę [por. (3.3)] są stałe i równe:

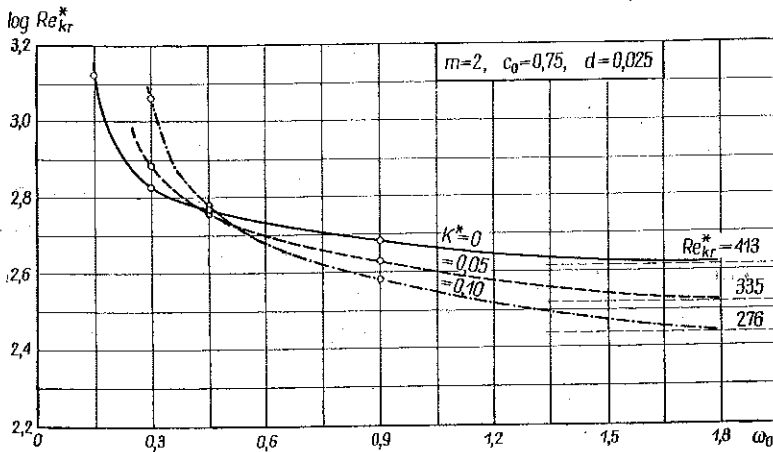
współczynnik masowy ścianki $m=2$, prędkości swobodnej fali odkształcenia membrany $c_0=0,75$ a współczynnik tłumienia wewnętrznego w ściance $d=0,025$. Przypadek $\omega_0=\infty$ odpowiada nieskończenie dużej wartości stałej sprężystej \bar{C} podłoża membrany, a jednocześnie odpowiada przypadkowi sztywnej ścianki.

Rozpatrzmy najpierw wpływ częstości ω_0 przy stałej krzywiznie ścianki. Z rysunku widać, że przy wszystkich trzech rozpatrywanych tam wartościach krzywizny ścianki zmniejszeniu częstości ω_0 towarzyszy:

wzrost krytycznej liczby Reynoldsa,

zmniejszenie obszaru niestatecznych liczb falowych zaburzenia α^* , który ograniczony jest przez krzywą stateczności neutralnej,

oraz obniżenie górnej granicy wartości niestatecznych liczb falowych zaburzenia.



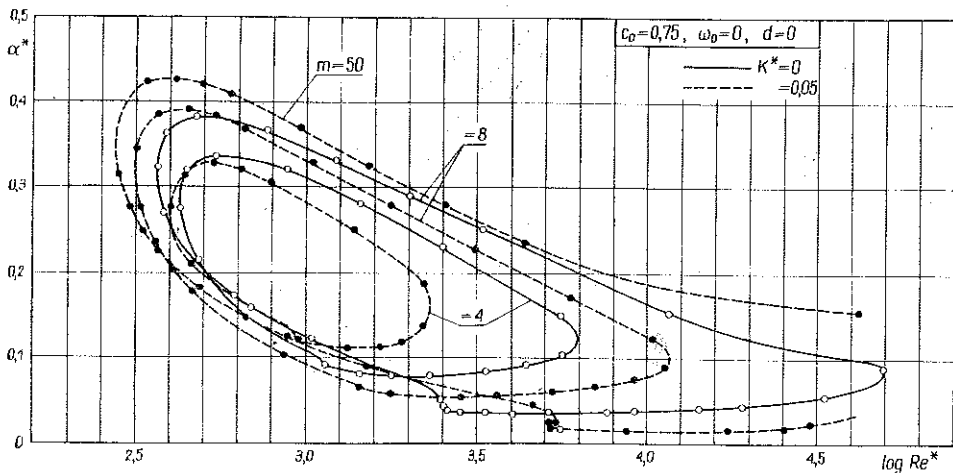
Rys. 9

Jednoczesny wpływ krzywizny ścianki K^* i częstości ω_0 ścianki na krytyczną liczbę Reynoldsa Re^* wygodniej jest zilustrować za pomocą rys. 9, który uzyskano z rys. 8.

Widać, że o ile w przypadku ścianki sztywnej ($\omega_0=\infty$) i przy dużych wartościach częstości ω_0 zwiększaniu krzywizny K^* ścianki wypukłej towarzyszy niekorzystny efekt w postaci zmniejszenia się wartości krytycznej liczby Reynoldsa Re_{kr}^* , to już poniżej pewnych granicznych wartości częstości ω_0 (w przybliżeniu dla $\omega_0 < 0,45$) występuje efekt odwrotny, tzn. wzrost krytycznej liczby Reynoldsa Re_{kr}^* przy wzroście krzywizny ścianki K^* . Wynika stąd, że w przypadku ścianki elastycznej wzrost krzywizny tej ścianki może wpływać ustaleczająco na stateczność przepływu.

Rysunek 10 ilustruje wpływ na stateczność przepływu krzywizny ścianki K^* oraz współczynnika masowego ścianki $m=\bar{M}/\rho\bar{\delta}$ przy następujących wartościach pozostałych wielkości, charakteryzujących elastyczną ściankę: $c_0=0,75$, $\omega_0=d=0$. Stała sprężysta i tłumienie podłoża membrany są więc w tym przypadku równe zeru. Charakterystyczną cechą uzyskanych tutaj krzywych stateczności neutralnej jest to, że przy odpowiednio małych wartościach współczynnika masowego m krzywe te przybierają postać krzywych zamkniętych.

Z rysunku widać, że w miarę oddalania się od przypadku ścianki sztywnej $m = \infty$ (tzn. w miarę obniżania się wartości współczynnika masowego m), przy obydwu rozpatrywanych wartościach krzywizny ścianki K^* następuje zarówno wzrost krytycznej liczby Reynoldsa, jak i zmniejszenie obszaru niestatecznych liczb falowych zaburzenia, ograniczonego krzywą stateczności neutralnej. Porównując te wyniki z wynikami, uzyskanym w przypadku ścianki sztywnej (rys. 5) można mówić o ustateczniającym wpływie zmniejszenia współczynnika masowego ścianki m , wyrażającym się zarówno w podwyższeniu krytycznej liczby Reynoldsa, jak i w zmniejszeniu niestatecznego obszaru, ograniczonego krzywą stateczności neutralnej. Widać ponadto, że przy odpowiednio małych wartościach współczynnika masowego m niestateczny obszar ograniczony krzywą stateczności neutralnej jest w przypadku ścianki płaskiej ($K^* = 0$) większy od odpowiedniego obszaru uzyskanego dla ścianki wypukłej. W tym sensie można mówić tutaj o ustateczniającym wpływie krzywizny ścianki wypukłej K^* na zaburzenia typu fal «klasy A».



Rys. 10

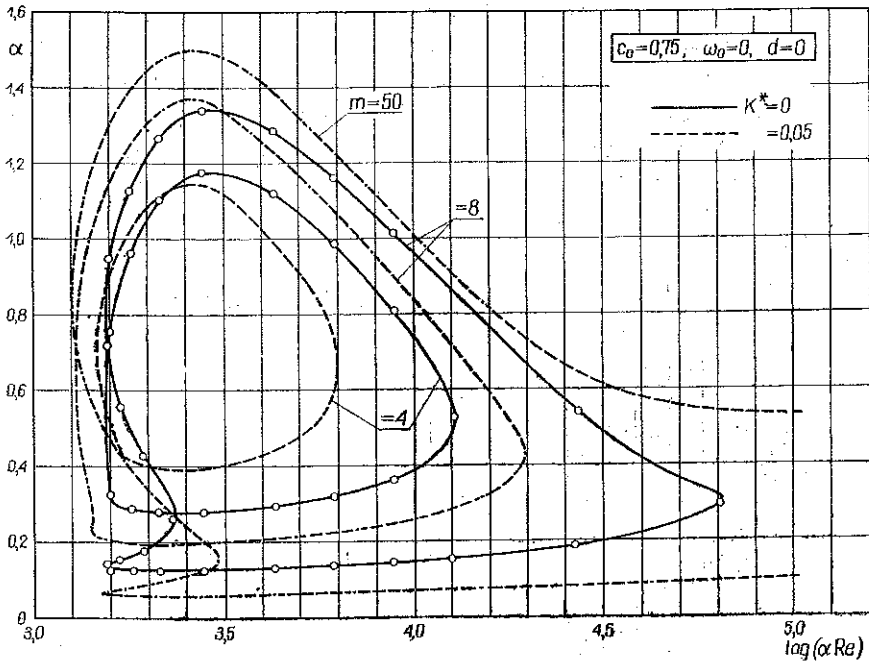
Rysunek 11 pozwala dokonać porównania otrzymanego przez nas wyniku, zobrazowanego przez rys. 10, z wynikiem, który otrzymał TAKEMATSU [71] dla profilu prędkości liniowo zmiennego w warstwie przyściennej.

Wynik ten dotyczy ścianki płaskiej i ma postać fragmentu dolnej gałęzi krzywej stateczności neutralnej, związanej z niestatecznością klasy A, oraz postać krzywej stateczności neutralnej, związanej z niestatecznością «klasy C». Takematsu stwierdził, że ta ostatnia krzywa ma postać zbliżoną do prostej równoległej do osi $\log(\alpha Re)$ oraz że niestateczny obszar, znajdujący się pod tą krzywą, określa z dobrym przybliżeniem wzór (14, cz. I), uzyskany z analizy stateczności układu ścianka elastyczna-przepływ nielepki o jednorodnym rozkładzie prędkości.

Rysunek 12 przedstawia wpływ krzywizny ścianki K^* oraz częstości ω_0 w przypadku $m=4$, $c_0=0$, $d=0,025$. Wydaje się, że przypadek ten z zerowym naciągiem

membrany oraz z różną od zera masą, sztywnością i tłumieniem ścianki dość dobrze charakteryzuje ściankę w postaci warstwy gąbczastego materiału.

Zauważmy, że rys. 8 również ilustruje wpływ krzywizny ścianki K^* i częstości kołowej ω_0 na stateczność przepływu przy tej samej wartości współczynnika tłumienia ($d=0,025$), lecz przy dwukrotnie mniejszym współczynniku masowym ($m=2$) oraz przy różnym od zera napięciu membrany ($c_0=0,75$).



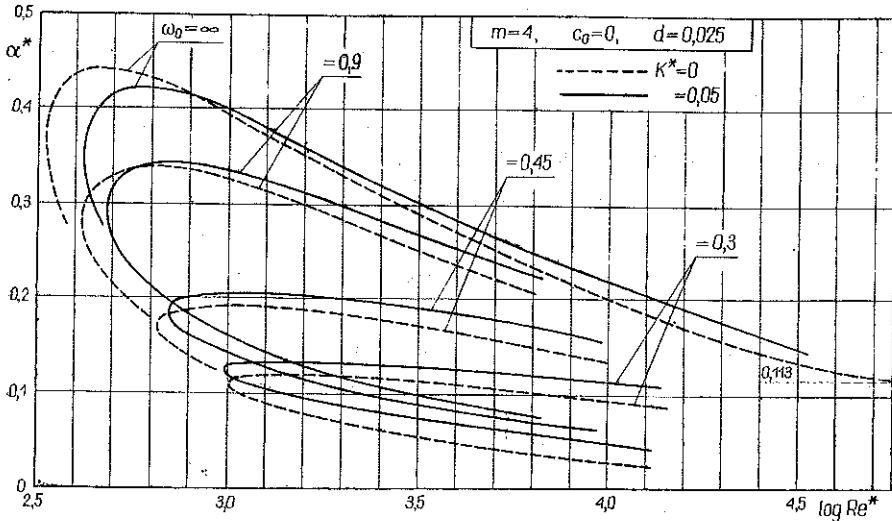
Rys. 11

Z obydwu powyższych rysunków wynika, że korzyści wynikające z zastosowania elastycznej ścianki płaskiej wzrastają (z punktu widzenia stateczności fal klasy A przy zmniejszaniu częstości kołowej ω_0 , przy czym korzyści te są większe w przypadku ścianki z $c_0=0$).

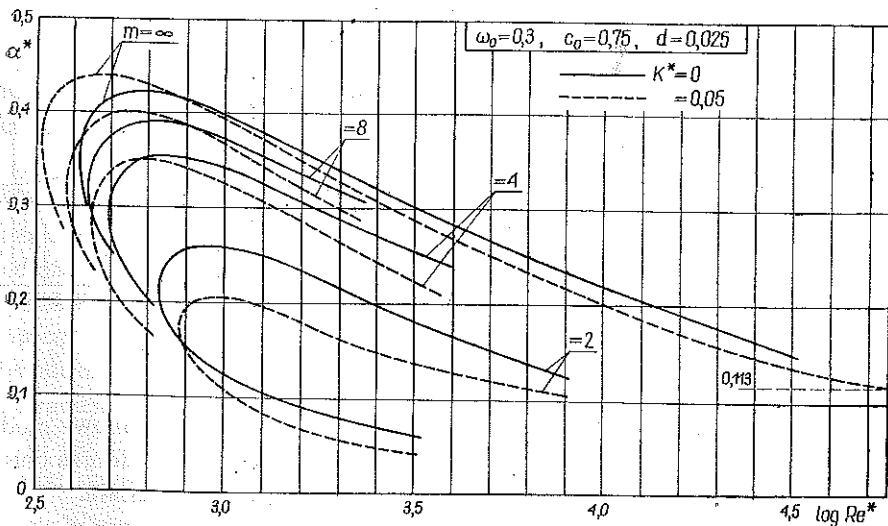
Można ponadto stwierdzić, że przy dużych wartościach częstości ω_0 wzrost krzywizny ścianki wypukłej K^* wpływa niekorzystnie na stateczność fal klasy A oraz że przy odpowiednio małych wartościach częstości ω_0 , mniejszych od pewnej granicznej wartości ω_{0gr} , wzrost krzywizny ścianki wpływa korzystnie na stateczność tych fal.

Rysunek 13 ilustruje wpływ współczynnika masowego ścianki m oraz krzywizny ścianki K^* na stateczność przepływu w przypadku $\omega_0=0,3, c_0=0,75$ oraz $d=0,025$. Widać, że korzystny efekt zastosowania elastycznej ścianki jest tym większy, im mniejszy jest współczynnik masowy m . Widać ponadto, że wzrost krzywizny ścianki wypukłej K wpływa niekorzystnie na stateczność fal klasy A: w przypadku odpowiednio małych wartości m .

Porównajmy wynik uzyskany dla ścianki scharakteryzowanej przez $m=4$, $\omega_0=0,3$, $c_0=0,75$, $d=0,025$ (rys. 13) z wynikiem, uzyskanym dla ścianki z $m=4$, $\omega_0=0,3$, $c_0=0$, $d=0,025$ (rys. 12); obydwie ścianki różnią się jedynie wielkością siły naciągu membrany, wyrażonym przez c_0 . Widać, że korzystny efekt zastosowania elastycznej ścianki występuje tutaj również przy niższych wartościach prędkości c_0 , a więc przy mniejszych wartościach naciągu membrany.



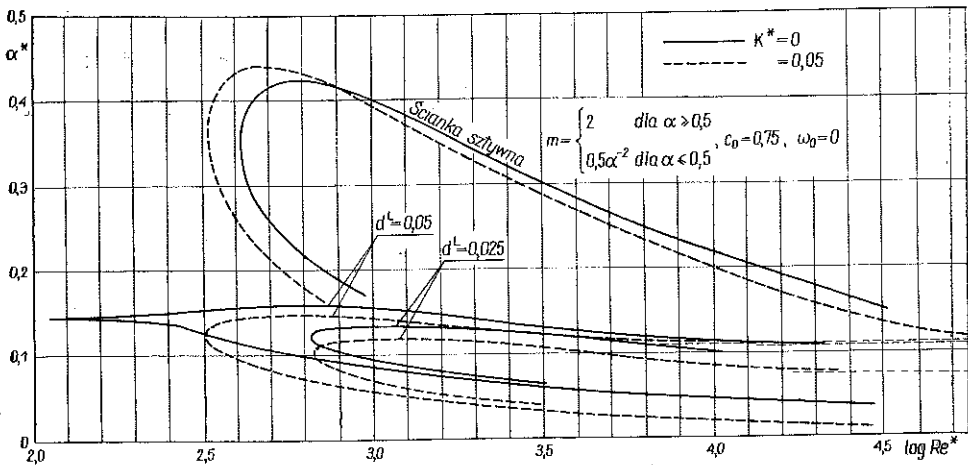
Rys. 12



Rys. 13

Rysunek 14 ilustruje wpływ krzywizny ścianki K^* oraz współczynnika tłumienia ścianki $d^L = \bar{D}/(\bar{M}\bar{U}_s/\delta) = d/m$ w przypadku, gdy $c_0=0,75$, $\omega_0=0$, a współczynnik masowy zmienia się wraz ze zmianą liczby falowej zaburzenia α następująco: $m=2$.

dla $\alpha \geq 0,5$, $m = 0,5\alpha^{-2}$ dla $\alpha \leq 0,5$. Powyższy układ wartości na d^L , c_0 , ω_0 oraz m wybraliśmy w ślad za LANDAHLEM [60], który zajmował się przypadkiem ścianki płaskiej, dla której wyznaczył krzywe stateczności neutralnej przy użyciu uproszczonych wzorów Lina oraz przy przyjęciu w przybliżeniu, że wielkość $\lambda(c)$, która występuje w równaniu charakterystycznym, jest równa zero. Przyjmując powyższą zależność współczynnika masowego m od liczby falowej zaburzenia α , Landahl kierował się chęcią zbadania stateczności przepływu dla elastycznego pokrycia, jakie zastosował KRÄMER [55] w swoich doświadczeniach (pokrycie to charakteryzowało się obecnością płynu, który znajdował się między gumowymi słupkami, oddzielającymi zewnętrzną warstwę gumy od sztywnej konstrukcji podłoża). Landahl stwierdził, że dla małych wartości liczb falowych zaburzenia α , własności elastyczne ścianki typu Krämera mogą być opisane przez podatność dynamiczną ścianki, wyrażoną przez wzór (3.2) z m proporcjonalnym do α^{-2} oraz ze stałymi wartościami c_0 i d^L . Powyższe wiąże się z tym, że przy dużych długościach fal zaburzenia $\lambda = 2\pi/\alpha$ dominującą rolę w wyrażeniu na siłę masową, działającą na element elastycznej ścianki, zaczyna odgrywać siła bezwładności płynu, umieszczonego wewnątrz pokrycia Krämera.



Rys. 14

Warto w tym miejscu podkreślić, że zastosowany w pracy membranowy model elastycznego pokrycia ze stałymi wartościami m , c_0 , ω_0 i d wydaje się dobrze opisywać własności elastyczne pokrycia wykonanego z gąbczastego materiału.

Z rys. 14 wynika, że przy stałej wartości krzywizny ścianki K^* zmniejszeniu współczynnika tłumienia d^L towarzyszy wzrost krytycznej liczby Reynoldsa oraz zmniejszenie niestatecznego obszaru, ograniczonego krzywą stateczności neutralnej. Widać jednocześnie, że przy odpowiednio dużej wartości d^L krytyczna liczba Reynoldsa jest niższa niż w przypadku ścianki sztywnej. Widać również, że o ile w przy-

padku ścianki sztywnej wzrostowi krzywizny ścianki towarzyszy obniżenie krytycznej liczby Reynoldsa, to dla przyjętych wartości d^L , c_0 , ω_0 oraz m wzrost krzywizny ścianki wpływa korzystnie na stateczność przepływu, gdyż podwyższa krytyczną liczbę Reynoldsa.

10. WNIOSKI OGÓLNE

Na podstawie wyników podanych w p. 8 i 9 można sformułować następujące wnioski, z których pierwszy dotyczy wpływu na stateczność przepływu krzywizny ścianki wypukłej przy ustalonych własnościach mechanicznych ścianki, a drugi — wpływu własności mechanicznych odkształcalnej ścianki przy ustalonej krzywiznie ścianki.

A. Wzrost *krzywizny ścianki wypukłej* wpływa przy ustalonych własnościach mechanicznych ścianki bądź uniastateczniająco, bądź ustateczniająco na stateczność przepływu typu warstwy przyściennej. Należy przy tym rozróżnić następujące przypadki:

1. W przypadku ścianki *sztywnej* krzywizna ścianki wypukłej wpływa *uniastateczniająco* na przepływ, gdyż wzrostowi krzywizny tej ścianki towarzyszy obniżenie krytycznej liczby Reynoldsa, powiększenie ograniczonego krzywą stateczności neutralnej zakresu wartości niestatecznych liczb falowych zaburzenia oraz pojawienie się i rozszerzanie tzw. nielepkiej niestateczności na przypadek profili prędkości z niedodatnimi wartościami gradientów ciśnienia (tzn. dla parametrów Pohlhausena $A \geq 0$), dla których to profile nielepka niestateczność w ogóle nie występuje w przypadku ścianki płaskiej.

2. W przypadku ścianki *odkształcalnej* w odniesieniu do niestateczności klasy A (mającej swój odpowiednik w niestateczności Tollmien-Schlichtinga, występującej dla ścianki sztywnej) wzrost krzywizny ścianki wypukłej wpływa

a) *ustateczniająco*, gdy własności ścianki odkształcalnej są dalekie od własności ścianki sztywnej (tzn. dla odpowiednio małych wartości współczynnika masowego ścianki m , bądź częstości kołowej drgań swobodnych nietłumionych sprężystego podłoża ω_0 , bądź prędkości swobodnej fali odkształcenia membrany c_0 i współczynnika tłumienia ścianki d); wzrostowi krzywizny ścianki wypukłej towarzyszy bowiem wzrost krytycznej liczby Reynoldsa oraz zmniejszenie zakresu wartości niestatecznych liczb falowych zaburzenia, ograniczonego krzywą stateczności neutralnej;

b) *uniastateczniająco*, gdy własności ścianki odkształcalnej są bliskie własnościom ścianki sztywnej.

B. Wzrost *podatności ścianki* przy ustalonej krzywiznie ścianki wpływa następująco na stateczność przepływu:

1. W przypadku odpowiednio małego tłumienia wewnętrznego wpływa *ustateczniająco*, przy czym dla ścianki *wypukłej* ten ustateczniający wpływ jej podatności jest *większy* niż dla ścianki płaskiej, w miarę bowiem zmniejszania się wartości

parametrów m , ω_0 i c_0 (czyli w miarę tego, jak własności ścianki odkształcalnej odbiegają coraz bardziej od własności ścianki sztywnej) następuje przy odpowiednio małych wartościach współczynnika tłumienia ścianki d zarówno wzrost krytycznej liczby Reynoldsa, jak i zmniejszenie zakresu wartości niestatecznych liczb falowych zaburzenia.

2. W przypadku odpowiednio dużego tłumienia wewnętrznego ścianki wpływa *niestateczniejąco*, w miarę bowiem tego, jak własności ścianki odkształcalnej odbiegają coraz bardziej od własności ścianki sztywnej, może przy odpowiednio dużym tłumieniu wewnętrznym ścianki nastąpić zmniejszenie krytycznej liczby Reynoldsa poniżej jej wartości dla ścianki sztywnej.

Na zakończenie warto podkreślić, że korzystny, ustaleczający wpływ zwiększenia podatności ścianki, występujący przy małym tłumieniu wewnętrznym, odnosi się tylko do niestateczności klasy A. W zastosowaniach praktycznych trzeba wziąć pod uwagę, że przy małych wartościach wielkości m , c_0 , ω_0 i d , charakteryzujących odkształcalną ściankę, może wystąpić również niestateczność typu rezonansowego oraz typu Kelvina-Helmholtza (którym Lin nadał nazwę niestateczności odpowiednio klasy B i klasy C), które trzeba również uwzględnić.

Wydaje się, że byłoby rzeczą celową rozszerzenie zakresu badań nad statecznością przepływu w tym kierunku, aby uwzględnić wpływ podatności ścianki dla przypadku profili prędkości z różnymi od zera gradientami ciśnienia oraz wpływ krzywizny ścianki na stateczność przepływu z punktu widzenia niestateczności klasy B i klasy C.

DODATEK A

WYZNACZENIE CIŚNIENIA ZABURZENIA NA POWIERZCHNI ŚCIANKI ZAKRZYWIWIONEJ O KRZYWIŹNIE K

Ciśnienie zaburzenia na ściance $p_1(x, 0, t)$ można wyznaczyć z równania Naviera-Stokesa (1.2) w kierunku osi x , bądź w kierunku osi y . Wykorzystamy równanie Naviera-Stokesa w kierunku osi y ⁽¹⁾, z którego wynika następująca zależność na składową gradientu ciśnienia zaburzenia:

$$(A.1) \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{U_0}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2KU_0 u}{1+Ky} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \Delta v - \frac{2K}{(1+Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2 v}{(1+Ky)^2} \right\},$$

gdzie

$$\Delta v = \frac{1}{(1+Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{K}{1+Ky} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

⁽¹⁾ LANDHAL [60] stwierdził, a SKRIPACZEW [82] udowodnił, że zlinearyzowane równanie ruchu w kierunku osi y daje dokładniejsze wyrażenie na ciśnienie zaburzenia niż zlinearyzowane równanie ruchu w kierunku osi x .

Uwzględniając w powyższej zależności, że zarówno składowe $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ prędkości zaburzenia, jak i ciśnienie zaburzenia $p_1(x, y, t)$ mają w rozpatrywanym zagadnieniu postać fal wędrujących (1.1), (1.3) i (2.6), można uzyskać następującą zależność na pochodną amplitudy fali ciśnienia zaburzenia $\hat{p}(y)$:

$$(A.2) \quad \frac{d\hat{p}}{dy} = -\frac{\alpha^2}{1+Ky} \left[\frac{U_0(y)}{1+Ky} - c \right] f(y) + 2K \frac{U_0(y)}{1+Ky} f'(y) - \\ - \frac{i}{\alpha \text{Re}} \left\{ f''(y) + \frac{3K}{1+Ky} f'(y) - \frac{K^2 + \alpha^2}{(1+Ky)^2} f(y) \right\} \frac{\alpha^2}{1+Ky}.$$

Przy warunku brzegowym $\hat{p}(y) \rightarrow 0$ dla $y \rightarrow \infty$ wynika więc z (A.2), że amplituda ciśnienia zaburzenia na ściance ma następującą postać:

$$(A.3) \quad \hat{p}(0) = - \int_0^\infty \frac{d\hat{p}}{dy} dy = \\ = \alpha^2 \int_0^\infty \left[\frac{U_0(y)}{1+Ky} - c \right] \frac{f(y)}{1+Ky} dy - 2K \int_0^\infty \frac{U_0(y)}{1+Ky} f'(y) dy + 0 \left(\frac{1}{\alpha \text{Re}} \right).$$

Zauważmy, że drugi wyraz po prawej stronie powyższej zależności związany jest z liniową względem u częścią przyspieszenia normalnego $(\bar{U}_0 + \bar{u})^2 / (\bar{R} + \bar{y})$, jakie do równań ruchu sumarycznego przepływu $\bar{v}_0 + \bar{v}_1$ wprowadza krzywizna ścianki.

Postąpimy podobnie jak B. BENJAMIN [58] w przypadku ścianki płaskiej i ograniczymy się do przybliżenia, w którym rozwiązanie $f(y)$ pełnego zmodyfikowanego równania Orr-Sommerfelda (1.5) można w zależności (A.3) zastąpić kombinacją liniową tylko rozwiązań nielepkich $f_1(y)$ i $f_2(y)$ ze wzoru (4.3). Oznaczając tę kombinację liniową przez

$$(A.4) \quad f_{nl}(y) = C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y),$$

można otrzymać w tym przybliżeniu, że

$$(A.5) \quad \hat{p}(0) \approx \alpha^2 \int_0^\infty \left[\frac{U_0(y)}{1+Ky} - c \right] \frac{f_{nl}(y)}{1+Ky} dy - 2K \int_0^\infty \frac{U_0(y)}{1+Ky} f'_{nl}(y) dy.$$

Zależność (A.5) można jeszcze dalej uprościć, jeżeli uwzględni się (zgodnie z założeniem I (p. 1)), że w obszarze wewnątrz warstwy przyściennej prawdziwa jest relacja $Ky \ll 1$.

W związku z powyższym przyjmujemy następującą uproszczoną postać zależności (A.5):

$$(A.6) \quad \hat{p}(0) \approx \alpha^2 \int_0^\infty [U_0(y) - c] f_{nl}(y) dy - 2K \int_0^\infty U_0(y) f'_{nl}(y) dy.$$

Za pomocą zmodyfikowanego równania Orr-Sommerfelda (1.5) w następującej nielepkiej postaci

$$(U_0 - c)(f''_{nl} + Kf'_{nl} - \alpha^2 f_{nl}) - (U_0'' + KU_0') f_{nl} = 0$$

można otrzymać zależność

$$(A.7) \quad \alpha^2 (U_0 - c) f_{nl} = (U_0 - c) (f_{nl}'' + K f_{nl}') - (U_0' + K U_0') f_{nl}.$$

Po podstawieniu (A.7) do (A.6) otrzymuje się związek:

$$(A.8) \quad \hat{p}(0) \approx -c \int_0^{\infty} (f_{nl}'' + K f_{nl}') dy + \int_0^{\infty} (U_0 f_{nl}'' - U_0' f_{nl}') dy - K \int_0^{\infty} (U_0 f_{nl}' + U_0' f_{nl}) dy.$$

Uwzględniając w czasie wyznaczania powyższych całek warunki brzegowe $f_{nl}(y)$, $f_{nl}'(y) \rightarrow 0$ dla $y \rightarrow \infty$ oraz $U_0(0) = 0$, otrzymamy

$$(A.9) \quad \int_0^{\infty} (f_{nl}'' + K f_{nl}') dy = -f_{nl}'(0) - K f_{nl}(0),$$

$$\int_0^{\infty} (U_0 f_{nl}'' - U_0' f_{nl}') dy = -[U_0' f_{nl} - U_0 f_{nl}']_0^{\infty} = U_0'(0) f_{nl}(0),$$

$$\int_0^{\infty} (U_0 f_{nl}' + U_0' f_{nl}) dy = [U_0 f_{nl}]_0^{\infty} = 0.$$

Podstawiając (A.9) do (A.8) otrzymujemy następujący wzór na amplitudę ciśnienia zaburzenia na ścianie:

$$(A.10) \quad \hat{p}(0) \approx c f_{nl}'(0) + [U_0'(0) + Kc] f_{nl}(0).$$

Wzór powyższy pokrywa się dla ścianki płaskiej ($K=0$) ze wzorem podanym przez B. BENIAMINA [58].

DODATEK B

WYPROWADZENIE UPROSZCZONYCH WZORÓW LINA ZMODYFIKOWANYCH PRZEZ KRZYWIZNĘ ŚCIANKI K

Zachowując we wzorze (5.6) tylko jedną całkę, mianowicie K_1 (c, K), otrzymujemy

$$(B.1) \quad w(\alpha, c; K) = w_r + i w_i = U_0'(0) c K_1 + \frac{U_0'(0) c}{\alpha_K} \frac{e^{-K}}{(1-c)^2} + 0(1).$$

Wyznamy teraz rzeczywistą i urojoną część całki K_1 :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{e^{-Ky}}{[U_0(y) - c]^2} dy.$$

Jeżeli do całki (7.2) podstawimy $a(y) = e^{-Ky}$, a za górną granicę całkowania przyjmie-
my $y=1$, to ze związków (7.3) otrzymamy bezpośrednio

$$(B.2) \quad \text{Im} \{K_1\} = \pi F_c',$$

$$\text{Re} \{K_1\} = -F_c \frac{1}{y_c(1-y_c)} + F_c' \ln \frac{1-y_c}{y_c} + 0(1).$$

Po podstawieniu do związków (7.4) wyrażeń $a_c = e^{-Ky_c}$, $a'_c = -Ke^{-Ky_c}$ otrzymujemy zależności na współczynniki F_c i F'_c :

$$(B.3) \quad \begin{aligned} F_c &= e^{-Ky_c} |U'_c|^2, \\ F'_c &= -(K|U'_c|^2 + U''_c/U'_c{}^3) e^{-Ky_c}. \end{aligned}$$

Podstawienie wyrażeń (B.3) do wzoru (B.2) daje więc

$$(B.4) \quad \begin{aligned} \text{Im} \{K_1\} &= -\pi (U''_c/U'_c{}^3 + K|U'_c|^2) e^{-Ky_c}, \\ \text{Re} \{K_1\} &= \left[-\frac{1}{U'_c{}^2 y_c (1-y_c)} + \left(\frac{U''_c}{U'_c{}^3} + \frac{K}{U'_c{}^2} \right) \ln \frac{y_c}{1-y_c} \right] e^{-Ky_c} + 0(1). \end{aligned}$$

Założmy teraz, że stosowanie uproszczonych wzorów będzie się ograniczało tylko do takich profili prędkości oraz do takich wartości $c \ll 1$, dla których stosują się przybliżenia

$$(B.5) \quad c \approx U'_c y_c, \quad U'_c - c \approx U'_c.$$

Stosując kolejno pierwszy i drugi wzór (B.5) otrzymamy

$$U'_c{}^2 y_c (1-y_c) \approx c(U'_c - c) \approx cU'_c$$

oraz

$$(B.6) \quad \ln \frac{y_c}{1-y_c} \approx \ln \frac{c}{U'_c - c} \approx \ln c - \ln U'_c \approx \ln c,$$

przy czym w drugiej zależności uwzględniono dodatkowo, że $U'_c \approx 1$. Podstawiając (B.6) do (B.4) i podstawiając te ostatnie wyrażenia do (B.1) otrzymamy

$$(B.7) \quad \begin{aligned} w_r(\alpha, c; K) &= \frac{U'_0(0)c}{\alpha_K(1-c)^2} e^{-K} + \left\{ -\frac{U'_0(0)}{U'_c} + U'_0(0)c \left(\frac{U''_c}{U'_c{}^3} + \frac{K}{U'_c{}^2} \right) \ln c \right\} e^{-Ky_c}, \\ w_l(\alpha, K) &= -\pi U'_0(0)c \left(\frac{U''_c}{U'_c{}^3} + \frac{K}{U'_c{}^2} \right) e^{-Ky_c}. \end{aligned}$$

DODATEK C

SZCZEGÓŁY ZWIĄZANE Z OBLICZANIEM CAŁEK $H_1(c, K)$, $K_1(c, K)$, $H_2(c, K)$, $N_2(c, K)$, $M_3(c, K)$ oraz $N_3(c, K)$

Wychodzimy ze wzorów (5.7), które w następujący sposób definiują powyższe całki:

$$(C.1) \quad \begin{aligned} H_1(c, K) &= \int_0^1 U_+ dy, & K_1(c, K) &= \int_0^1 U_- dy, \\ H_2(c, K) &= \int_0^1 U_- dy \int_0^y U_+ dy, & N_2(c, K) &= \int_0^1 U_+ dy \int_y^1 U_- dy, \\ M_3(c, K) &= \int_0^1 U_+ dy \int_y^1 U_- dy \int_0^y U_+ dy, & N_3(c, K) &= \int_0^1 U_- dy \int_y^1 U_+ dy \int_y^1 U_- dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$U_+ = [U_0(y) - c]^2 e^{Ky}, \quad U_- = [U_0(y) - c]^{-2} e^{-Ky}.$$

Następnie zauważmy, że prawdziwy jest wzór

$$(C.2) \quad N_2(c, K) = H_2(c, K),$$

który pozwala zmniejszyć liczbę rozpatrywanych dalej całek z sześciu do pięciu.

Związek (C.2) wynika z faktu, że jeżeli każdą z całek iterowanych H_2 i N_2 z (C.1) zastąpimy przez odpowiednie całki podwójne (por. np. [83]), to okaże się, że zarówno obszary całkowania jak i funkcje podcałkowe otrzymanych całek podwójnych są identyczne.

Dla H_2 i N_2 mamy istotnie

$$H_2 = \int_0^1 U_-(x) \left[\int_0^{y=x} U_+(y) dy \right] dx = \iint_D U_-(x) U_+(y) dx dy,$$

$$N_2 = \int_0^1 U_+(y) \left[\int_{x=y}^1 U_-(x) dx \right] dy = \iint_D U_-(x) U_+(y) dx dy,$$

gdzie D oznacza wspólny dla obydwu całek podwójnych obszar całkowania, którym jest pole równoramienne trójkąta prostokątnego. Całki H_2 i N_2 są więc równe, a różnią się jedynie kolejnością całkowania po obszarze D .

1. Przypadek profilu Blasiusa aproksymowanego przez wzór (8.1).

Obszar całkowania każdej całki pojedynczej dzielimy tutaj na takie same trzy przedziały, jakie występują w określeniu funkcji $U_0(y)$:

$$(C.3) \quad U_0(y) = \begin{cases} 2y - 3y^4 & \text{dla } 0 \leq y \leq 0,4; \\ 1 - (0,9 - y)^2 & \text{dla } 0,4 \leq y \leq 0,9; \\ 1 & \text{dla } 0,9 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Np. dla całki $H_2(c, K)$ mamy

$$\begin{aligned} H_2(c, K) &= \int_0^1 U_- dy \int_0^y U_+ dy = \int_0^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy + \\ &\quad + \int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy \left[\int_0^{0,4} U_+^1 dy + \int_{0,4}^y U_+^2 dy \right] + \\ &\quad + \int_{0,9}^1 U_-^3 dy \left[\int_0^{0,4} U_+^1 dy + \int_{0,4}^{0,9} U_+^2 dy + \int_{0,4}^y U_+^3 dy \right] = \int_0^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy + \\ &\quad + \int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy \int_{0,4}^y U_+^2 dy + \int_{0,9}^1 U_-^3 dy \int_{0,9}^y U_+^3 dy + \\ &\quad + \left(\int_{0,9}^1 U_-^3 dy \right) \left(\int_0^{0,4} U_+^1 dy + \int_{0,4}^{0,9} U_+^2 dy \right) + \left(\int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy \right) \left(\int_0^{0,4} U_+^1 dy \right), \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$(C.4) \quad \begin{aligned} U_+^1 &= (2y - 3y^4 - c)^2 e^{Ky}, & U_-^1 &= 1/U_+^1, \\ U_+^2 &= [1 - (0,9 - y)^2 - c]^2 e^{Ky}, & U_-^2 &= 1/U_+^2, \\ U_+^3 &= (1 - c)^2 e^{Ky}, & U_-^3 &= 1/U_+^3. \end{aligned}$$

W ten sposób rozpatrywane przez nas całki można przedstawić za pomocą następujących wzorów:

$$(C.5) \quad \begin{aligned} H_1(c, K) &= H_{11} + H_{12} + H_{13}, \\ K_1(c, K) &= K_{11} + K_{12} + K_{13}, \\ H_2(c, K) &= H_{21} + H_{22} + H_{23} + K_{13}(H_{11} + H_{12}) + K_{12}H_{11}, \\ M_3(c, K) &= M_{31} + M_{32} + M_{33} + (H_{11} + H_{12})[2H_{23} + K_{13}(H_{11} + H_{12})] + \\ &\quad + H_{11}(2H_{22} + H_{11}K_{12}), \\ N_3(c, K) &= N_{31} + N_{32} + N_{33} + (K_{13} + K_{12})[2H_{21} + H_{11}(K_{13} + K_{12})] + \\ &\quad + K_{13}(2H_{22} + K_{13}H_{12}), \end{aligned}$$

gdzie

(C.5')

$$\begin{aligned} H_{11} &= \int_0^{0,4} U_+^1 dy, & H_{12} &= \int_{0,4}^{0,9} U_+^2 dy, & H_{13} &= \int_{0,9}^1 U_+^3 dy, \\ K_{11} &= \int_0^{0,4} U_-^1 dy, & K_{12} &= \int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy, & K_{13} &= \int_{0,9}^1 U_-^3 dy, \\ H_{21} &= \int_0^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy, & H_{22} &= \int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy \int_{0,4}^y U_+^2 dy, & H_{23} &= \int_{0,9}^1 U_-^3 dy \int_{0,9}^y U_+^3 dy, \\ M_{31} &= \int_0^{0,4} U_+^1 dy \int_y^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy, & N_{31} &= \int_0^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy \int_y^{0,4} U_-^1 dy, \\ M_{32} &= \int_{0,4}^{0,9} U_+^2 dy \int_y^{0,9} U_-^2 dy \int_{0,4}^y U_+^2 dy, & N_{32} &= \int_{0,4}^{0,9} U_-^2 dy \int_{0,4}^y U_+^2 dy \int_y^{0,9} U_-^2 dy, \\ M_{33} &= \int_{0,9}^1 U_+^3 dy \int_y^1 U_-^3 dy \int_{0,9}^y U_+^3 dy, & N_{33} &= \int_{0,9}^1 U_-^3 dy \int_{0,9}^y U_+^3 dy \int_y^1 U_-^3 dy. \end{aligned}$$

Poniżej podajemy ściśle rozwiązania dla tych całek (C.5') z trzeciego przedziału zmienności y , dla których takie rozwiązania można otrzymać:

$$\begin{aligned}
 H_{13} &= (1-c)^2 \begin{cases} 0,1 & \text{dla } K=0, \\ (e^K - e^{0,9K})/K & \text{dla } K \neq 0, \end{cases} \\
 K_{13} &= (1-c)^{-2} \begin{cases} 0,1 & \text{dla } K=0, \\ (e^{-0,9K} - e^{-K})/K & \text{dla } K \neq 0, \end{cases} \\
 (C.6) \quad M_{33} &= (1-c)^2 \begin{cases} 1/3000 & \text{dla } K=0, \\ (e^K - e^{0,8K})/K^3 - 0,2e^{0,9K}/K^2 & \text{dla } K \neq 0, \end{cases} \\
 N_{33} &= (1-c)^{-2} \begin{cases} 1/3000 & \text{dla } K=0, \\ (e^{-0,9K} - e^{-1,1K})/K^3 - 0,2e^{-K}/K^2 & \text{dla } K \neq 0, \end{cases} \\
 H_{23} &= \begin{cases} 0,005 & \text{dla } K=0, \\ (e^{-0,1K} + 0,1K - 1)/K^2 & \text{dla } K \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pozostałe całki nieosobliwe, tzn. H_{11} , H_{12} , K_{12} , H_{22} , M_{32} oraz N_{32} obliczamy na drodze całkowania numerycznego, wykorzystując algorytm «Multint» zamieszczony w pracy [84]. Algorytm ten pozwala obliczyć całki wielokrotne typu:

$$\int_{a_1}^{b_1} f_1(y_1) dy_1 \int_{a_2(y_1)}^{b_2(y_1)} f_2(y_1, y_2) dy_2 \dots \int_{a_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})}^{b_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})} f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n,$$

przy czym każda kolejna całka wewnętrzna obliczona jest w tym algorytmie za pomocą wzorów numerycznego całkowania Gaussa [80]. W konkretnych obliczeniach przy wyznaczaniu wymienionych wyżej całek nieosobliwych zastosowane były sześciowęzłowe wzory Gaussa.

Pozostały wreszcie do obliczenia całki osobliwe K_{11} , H_{21} , M_{31} i N_{31} .

Ponieważ założyliśmy, że przy wyznaczaniu wyrażenia $w(\alpha, c, K)$ uwzględnimy tylko urojoną część całki K_{11} , a pominiemy urojone części pozostałych całek, oraz że przyjmujemy $N_{31}=0$, to poniżej podane zostaną tylko wyrażenia na $\text{Im}\{K_{11}\}$, $\text{Re}\{K_{11}\}$, $\text{Re}\{H_{21}\}$ i $\text{Re}\{M_{31}\}$.

Jeżeli we wzorze (7.3) podstawimy odpowiednią górną granicę całkowania ($y=0,4$) oraz $a(y)=e^{-Ky}$, $U_0(y)=2y-3y^4$ [skąd wynika

$$(C.7) \quad c=2y_c-3y_c^4 \quad \text{lub} \quad y_c = \frac{c}{2} + \frac{3}{32}c^4 + \frac{9}{128}c^7 + 0(c^{10}),$$

to otrzymamy następujące formuły:

$$\begin{aligned}
 (C.8) \quad \text{Im}\{K_{11}\} &= \pi a, \\
 \text{Re}\{K_{11}\} &= -\frac{0,4a}{y_c(0,4-y_c)} + b \ln \frac{0,4-y_c}{y_c} + 0,2d + \frac{e}{12} [(0,4-y_c)^2 - y_c^2] + \\
 &+ \frac{f}{72} [(0,4-y_c)^3 + y_c^3] + \frac{9}{480} [(0,4-y_c)^4 - y_c^4] + \frac{h}{3600} [(0,4-y_c)^5 + y_c^5] + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 a &= Ae^{-Ky_c}, \\
 b &= (B - KA)e^{-Ky_c}, \\
 d &= (C - 2KB + K^2 A)e^{-Ky_c}, \\
 e &= (D - 3KC + 3K^2 B - K^3 A)e^{-Ky_c}, \\
 f &= (E - 4KD + 6K^2 C - 4K^3 B + K^4 A)e^{-Ky_c}, \\
 g &= (G - 5KE + 10K^2 D - 10K^3 C + 5K^4 B - K^5 A)e^{-Ky_c}, \\
 h &= (H - 6KG + 15K^2 E - 20K^3 D + 15K^4 C - 6K^5 B + K^6 A)e^{-Ky_c}; \\
 A &= M^{-2}, \\
 B &= -2NM^{-3}, \\
 C &= 6N^2 M^{-4} - 2PM^{-3}, \\
 D &= -24N^3 M^{-5} + 18NPM^{-4} - 2QM^{-3}, \\
 E &= 120N^4 M^{-6} - 144N^2 PM^{-5} + (18P^2 + 24NQ) M^{-4}, \\
 G &= 720N^5 M^{-7} + 1100N^3 PM^{-6} - (350NP^2 + 240N^2 Q) M^{-5} + 60PQM^{-4}, \\
 H &= 5040N^6 M^{-8} - 10200N^4 PM^{-7} + (5050N^2 P^2 + 2300N^3 Q) M^{-6} - \\
 &\quad - (1470NPQ + 350P^3) M^{-5} + 60Q^2 M^{-4}; \\
 M &= 2 - 12y_c^3, \quad P = -24y_c, \\
 N &= -18y_c^2, \quad Q = -18.
 \end{aligned}$$

Część rzeczywistą całki obliczamy w ten sposób, że wyznaczamy najpierw analitycznie wewnętrzną (nieosobliwą) całkę $\int_0^y U_+^1 dy$, a następnie stosujemy znów wzory (7.3) i (7.4), podstawiając tam $a(y) = e^{-Ky} \int_0^y U_+^1 dy$. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}
 (C.9) \quad \operatorname{Re}\{H_{21}\} &= -\frac{0,4F_0}{y_c(0,4-y_c)} + F_1 \ln \frac{0,4-y_c}{y_c} + 0,2F_2 + \frac{F_3}{12} [(0,4-y_c)^2 - y_c^2] + \\
 &+ \frac{F_4}{72} [(0,4-y_c)^3 + y_c^3] + \frac{F_5}{480} [(0,4-y_c)^4 - y_c^4] + \frac{F_6}{3600} [(0,4-y_c)^5 + y_c^5] + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_0 &= a_0 A, \\
 F_1 &= a_1 A + a_0 B, \\
 F_2 &= a_2 A + 2a_1 B + a_0 C, \\
 F_3 &= a_3 A + 3a_2 B + 3a_1 C + a_0 D, \\
 (C.9') \quad F_4 &= a_4 A + 4a_3 B + 6a_2 C + 4a_1 D + a_0 E, \\
 F_5 &= a_5 A + 5a_4 B + 10a_3 C + 10a_2 D + 5a_1 E + a_0 G, \\
 F_6 &= a_6 A + 6a_5 B + 15a_4 C + 20a_3 D + 15a_2 E + 6a_1 G + a_0 H; \\
 a_0 &= b_0 + Kb_K + 0(K^2), \\
 a_n &= b_n - Kb_{n-1} + 0(K^2), \quad n = 1, 2, \dots, 6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(C.9')} \quad & b_k = -0,1y_c^{10} + 2/7y_c^7 - 1/3y_c^4 + c(-1/5y_c^6 + 2/3y_c^3) - c^2/2y_c^2, \\
 \text{[c,d.]} \quad & b_0 = y_c^9 - 2y_c^6 + 4/3y_c^3 + c(6/5y_c^5 - 2y_c^2) + c^2y_c, \\
 & b_1 = 9y_c^8 - 12y_c^5 + 4y_c^2 + c(6y_c^4 - 4y_c) + c^2, \\
 & b_2 = 72y_c^7 - 60y_c^4 + 8y_c + c(24y_c^3 - 4), \\
 & b_3 = 504y_c^6 - 240y_c^3 + 8 + 720cy_c^2, \\
 & b_4 = 3024y_c^5 - 720y_c^2 + 144cy_c, \\
 & b_5 = 15120y_c^4 - 1440y_c + 144c, \\
 & b_6 = 60480y_c^3 - 1440;
 \end{aligned}$$

wielkości A, B, C, D, E, G i H , są takie same jak w (C.8).

Wreszcie całkę M_{31} liczymy w ten sposób, że stosujemy najpierw przekształcenie

$$\begin{aligned}
 M_{31} = \int_0^{0,4} U_+^1 dy \int_y^{0,9} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy = & \left(\int_0^{0,4} U_+^1 dy \right) \left(\int_0^{0,4} U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy \right) - \\
 & - \int_0^{0,4} U_+^1 dy \int_0^y U_-^1 dy \int_0^y U_+^1 dy,
 \end{aligned}$$

a następnie część rzeczywistą ostatniej całki wyznaczamy w podobny sposób jak $\text{Re}\{H_{21}\}$. Stosując mianowicie dwukrotnie związki (7.3) i ograniczając się do trzech wyrazów występującego tam szeregu, otrzymujemy

$$\text{(C.10)} \quad \text{Re}\{M_{31}\} = H_{11}(\text{Re}\{H_{21}\} - M_0) + F_0 C_1 - F_1 C_2 - \frac{1}{2} F_2 C_3,$$

gdzie

$$M_0 = -\frac{F_0}{y_c} - F_1 \ln y_c,$$

$$\begin{aligned}
 C_1 = d_0 \ln \frac{0,4 - y_c}{y_c} + 0,4 \left(d_1 + 0,4 \left(\frac{d_2}{2} + 0,4 \left(\frac{d_3}{3} + 0,4 \left(\frac{d_4}{4} + 0,4 \left(\frac{d_5}{5} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left. \left. + 0,4 \left(\frac{d_6}{6} + 0,4 \left(\frac{d_7}{7} + 0,4 \left(\frac{d_8}{8} + 0,4 K \right) \dots \right) \right) \right) \right) \right) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = e_1 y_c \ln \frac{0,4 - y_c}{y_c} + 0,4 \left(e_0 \ln(0,4 - y_c) + e_1 + 0,4 \left(\frac{e_2}{2} + 0,4 \left(\frac{e_3}{3} + 0,4 \left(\frac{e_4}{4} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left. \left. + \frac{e_5}{5} + 0,4 \left(\frac{e_6}{6} + 0,4 \left(\frac{e_7}{7} + 0,4 \left(\frac{e_8}{8} + 0,4 \left(\frac{e_9}{9} + 0,04 e_{10} \right) \dots \right) \right) \right) \right) \right) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = 0,4^2 \left(\frac{c^2}{2} + 0,4 \left(\frac{c}{3} (cK - 4) + 0,4 \left(1 - cK + 0,4 \left(\frac{4}{5} K + 0,4 \left(c + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left. \left. + 0,4 \left(\frac{6}{7} (cK - 2) + 0,4 \left(-\frac{3}{2} K + 0,4^2 (0,9 + 3,6K) \right) \dots \right) \right) \right) \right) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_8 &= 9(1 + Ky_c), & d_5 &= 6cK - 12 + d_6 y_c, & d_2 &= 4(1 - cK) + d_3 y_c, \\
 d_7 &= d_8 y_c, & d_4 &= 6c + d_5 y_c, & d_1 &= c(cK - 4) + d_2 y_c, \\
 d_6 &= -12K + d_7 y_c, & d_3 &= 4K + d_4 y_c, & d_0 &= c^2 + d_1 y_c, \\
 e_0 &= c^2 + 0,4 \left(\frac{c}{2} (cK - 4) + 0,4 \left(\frac{4}{3} (1 - cK) + 0,4 \left(K + 0,4 \left(\frac{6}{5} c + 0,4 (cK - 2 + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. + 0,4 \left(-\frac{12}{7} K + 0,4^2 (1 + 0,36K) \right) \dots \right) \right) \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{10} &= -0,9K, & e_6 &= -(cK - 2) + e_7 y_c, \\
 e_9 &= -1 + e_{10} y_c, & e_5 &= -1,2c + e_6 y_c, \\
 e_8 &= e_9 y_c, & e_4 &= -K + e_5 y_c, & e_2 &= -\frac{c}{2} (cK - 4) + e_3 y_c, \\
 e_7 &= \frac{12}{7} K + e_8 y_c, & e_3 &= -\frac{4}{3} (1 - cK) + e_4 y_c, & e_1 &= -c^2 + e_2 y_c;
 \end{aligned}$$

wyrażenia na H_{21} oraz F_0 , F_1 i F_2 są takie same jak we wzorze (C.9), a H_{11} wyznaczamy na drodze całkowania analitycznego lub numerycznego.

2. Przypadek rodziny profili prędkości aproksymowanej wielomianem szóstego stopnia

Zapiszmy wzór (8.2) w postaci

$$(C.11) \quad U_0(y; A) = u_1 y + u_2 y^2 + u_3 y^3 + u_4 y^4 + u_5 y^5 + u_6 y^6,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2 + 0,2A, & u_3 &= 0, & u_5 &= 6 - A, \\
 u_2 &= -0,5A, & u_4 &= -5 + A, & u_6 &= -2 + 0,3A.
 \end{aligned}$$

Stosując podobną metodę postępowania jak przy obliczaniu całek dla przypadku profilu Blasiusa (przypadek 1), lecz dzieląc obszar całkowania każdej całki tylko na dwa przedziały ($0 \leq y \leq 0,4$ oraz $0,4 \leq y \leq 1$), otrzymamy tutaj

$$\begin{aligned}
 H_1(c, K, A) &= H_{11} + H_{12}, \\
 K_1(c, K, A) &= K_{11} + K_{12}, \\
 (C.12) \quad H_2(c, K, A) &= H_{21} + H_{22} + H_{11} K_{12}, \\
 M_3(c, K, A) &= M_{31} + M_{32} + H_{11} (2H_{22} + H_{11} K_{12}), \\
 N_3(c, K, A) &= N_{31} + N_{32} + N_{33} + K_{12} (2H_{21} + H_{11} K_{12}),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$H_{11} = \int_0^{0,4} U_+ dy, \quad H_{12} = \int_{0,4}^1 U_+ dy,$$

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \int_0^{0,4} U_- dy, & K_{12} &= \int_{0,4}^1 U_- dy, \\
 H_{21} &= \int_0^{0,4} U_- dy \int_0^y U_+ dy, & H_{22} &= \int_{0,4}^1 U_- dy \int_{0,4}^y U_+ dy, \\
 M_{31} &= \int_0^{0,4} U_+ dy \int_y^{0,4} U_- dy \int_0^y U_+ dy, & M_{32} &= \int_{0,4}^1 U_+ dy \int_y^1 U_- dy \int_{0,4}^y U_+ dy, \\
 N_{31} &= \int_0^{0,4} U_- dy \int_0^y U_+ dy \int_y^{0,4} U_- dy, & N_{32} &= \int_{0,4}^1 U_- dy \int_{0,4}^y U_+ dy \int_y^1 U_- dy,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$U_+ = (-c + u_1 y + u_2 y^2 + u_3 y^3 + u_4 y^4 + u_5 y^5 + u_6 y^6)^2 e^{Ky}, \quad U_- = 1/U_+.$$

Jeżeli $y_c < 0,4$, to całki $K_{12}, H_{22}, M_{32}, N_{32}$ nie są całkami osobliwymi. Całki te oraz H_{11} i H_{12} możemy obliczyć więc na drodze całkowania numerycznego, podobnie jak w przypadku profilu rozpatrzonego w punkcie 1. Natomiast całki osobliwe, z wyjątkiem N_{31} , którą przyjmujemy w przybliżeniu równą zeru, obliczamy następująco:

a) $\text{Im} \{K_{11}\}$ oraz $\text{Re} \{K_{11}\}$ obliczamy wg wzoru (C.8), z tym, że wielkości M, N, P i Q obliczamy teraz z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
 (C.13) \quad M &= \sum_{n=1}^6 n u_n y_c^{n-1}, & P &= \frac{1}{3} \sum_{n=3}^6 n(n-1)(n-2) u_n y_c^{n-3}, \\
 N &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^6 n(n-1) u_n y_c^{n-2}, & Q &= \frac{1}{4} \sum_{n=4}^6 n(n-1)(n-2)(n-3) u_n y_c^{n-4}.
 \end{aligned}$$

b) $\text{Re} \{H_{21}\}$ obliczamy ze wzoru (C.9) z tym, że inaczej obliczamy następujące wielkości:

$$\begin{aligned}
 b_K &= - \left(\frac{f_{12}}{182} y_c^{14} + \frac{f_{11}}{156} y_c^{13} + \frac{f_{10}}{132} y_c^{12} + \frac{f_9}{110} y_c^{11} + \frac{f_8}{90} y_c^{10} + \frac{f_7}{72} y_c^9 + \frac{f_6}{52} y_c^8 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f_5}{42} y_c^7 + \frac{f_4}{30} y_c^6 + \frac{f_3}{20} y_c^5 + \frac{f_2}{12} y_c^4 + \frac{f_1}{6} y_c^3 + \frac{c^2}{2} y_c^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$(C.14) \quad b_0 = y_c c^2 + \sum_{n=1}^{12} \frac{f_n}{n+1} y_c^{n+1},$$

$$b_1 = c^2 + \sum_{n=1}^{12} f_n y_c^n,$$

$$b_2 = \sum_{n=1}^{12} n f_n y_c^{n-1},$$

$$b_3 = \sum_{n=2}^{12} n(n-1) f_n y_c^{n-2},$$

$$b_4 = \sum_{n=3}^{12} n(n-1)(n-2) f_n y_c^{n-3},$$

$$b_5 = \sum_{n=4}^{12} n(n-1)(n-2)(n-3) f_n y_c^{n-4},$$

$$b_6 = \sum_{n=5}^{12} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) f_n y_c^{n-5},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= u_6^2, & f_6 &= u_3^2 + 2(u_4 u_2 + u_5 u_1 - u_6 c), \\
 f_{11} &= 2u_6 u_5, & f_5 &= 2(u_4 u_1 + u_3 u_2 - u_5 c), \\
 f_{10} &= u_5^2 + 2u_4 u_6, & f_4 &= u_2^2 + 2(u_3 u_1 - u_4 c), \\
 f_9 &= 2(u_5 u_4 + u_6 u_3), & f_3 &= 2(u_2 u_1 - u_3 c), \\
 f_8 &= u_4^2 + 2(u_5 u_3 + u_6 u_2), & f_2 &= u_1^2 - 2u_2 c, \\
 f_7 &= 2(u_6 u_1 + u_5 u_2 + u_4 u_3), & f_1 &= -2u_1 c.
 \end{aligned}$$

c) Wreszcie $\text{Re}\{M_{31}\}$ obliczamy ze wzoru

$$(C.15) \quad \text{Re}\{M_{31}\} = H_{11}(\text{Re}\{H_{21}\} - M_0) + F_0 C_1 - F_1 C_2 - \frac{1}{2} F_2 C_3,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\frac{F_0}{y_c} - F_1 \ln y_c, \\
 C_1 &= d_0 \ln \frac{0,4 - y_c}{y_c} + \frac{0,4^9}{9} C_9 + \sum_{n=1}^8 \frac{0,4^n}{n} d_n, \\
 C_2 &= 0,4 e_0 \ln(y - y_c) + e_1 y_c \ln \frac{y - y_c}{y_c} + \sum_{n=1}^{10} \frac{0,4^n}{n} e_n, \\
 C_3 &= \sum_{n=2}^{11} \frac{0,4^n}{n} C_{n-2},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 c_0 &= c^2, & c_1 &= f_1 + Kc^2 + O(K^2), \\
 c_n &= f_n + Kf_{n-1} + O(K^2), & n &= 2, 3, \dots, 9,
 \end{aligned}$$

gdzie f_n ($n=1, 2, \dots, 9$) wynikają ze wzoru (C.14);

$$\begin{aligned}
 d_8 &= c_8 + c_9 y_c, \\
 d_n &= c_n + d_{n+1} y_c, & n &= 7, 6, 5, \dots, 0; \\
 e_{10} &= -c_9, \\
 e_n &= -c_{n-1} + e_{n+1} y_c, & n &= 9, 8, 7, \dots, 1; \\
 e_0 &= \sum_{n=0}^9 0,4^n c_n,
 \end{aligned}$$

przy czym H_{11} wyznaczamy na drodze całkowania numerycznego (lub analitycznego), $\text{Re}\{H_{21}\}$ wynika ze wzoru (C.9) oraz (C.14), natomiast wielkości F_0, F_1 i F_2 określone są przez wzory (C.9') i (C.14).

Резюме

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ И ПОДАТЛИВОСТИ СТЕНКИ
НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО,
НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧЕКОГО СЛОЯ (II)

Исследовалось влияние продольной кривизны жесткой и податливой стенки, на устойчивость ламинарного пограничного слоя, по отношению малых возмущений, типа поперечных вихрей. Предполагается, между прочим, что профиль скорости основного течения, не зависит от кривизны и податливости стенки, а механические свойства этой стенки описываются с помощью четырех безразмерных параметров. Результаты, в виде кривых нейтральной устойчивости, получены для разных значений безразмерной кривизны стенки и ряда комбинаций параметров, характеризующих механические свойства стенки. Для жесткой стенки, расчеты проводились, принимая профиль скорости Блазиуса и семейство профилей скорости Польгаузена, с полиномом шестой степени, а для деформируемой стенки — только профиль Блазиуса.

Для случая жесткой выпуклой стенки, констатируется, что рост этой кривизны влияет дестабилизирующе на течение. Для случая деформируемой стенки оказалось, что при установленных механических свойствах стенки (с точки зрения неустойчивости «класса А») рост ее кривизны, может влиять стабилизирующе на течение, поскольку только механические свойства стенки соответственно далеко разнятся от свойств жесткой стенки.

SUMMARY

THE INFLUENCE AND SUSCEPTIBILITY OF A WALL ON HYDRODYNAMIC
LAMINAR STABILITY OF AN INCOMPRESSIBLE BY-WALL LAYER (II)

An investigation was made of the influence of a longitudinal curvature, rigid and susceptible, on the stability of a laminar by-wall layer in relation to small disturbances of a diagonal vortex type. Among other things, it was assumed that the velocity profile of a basic flow is independent of the curvature and susceptibility of a wall, and the mechanical properties of that wall were described by the four nondimensional parameters.

Results have been obtained in the form of curve neutral stability for various values of nondimensional curvature of a wall for series of combinations of parameters characterizing the mechanical properties of the wall. For the rigid wall, the calculations were made by taking the Blasius velocity profile and a family of profiles of velocities of Pohlhausen with the sixth grade multinomial, and for the deformed wall — only the Blasius profile.

In the case of a rigid convex wall, it was assumed that increase in its curvature influences the flow in an unstable manner (from the point of view of an instability of «A-class») only if the mechanical properties of the wall are suitably far from the properties of the rigid wall.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
KATEDRA MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1970 r.