

## NAPRĘŻENIA MOMENTOWE W TARCZY KOŁOWEJ

CZESŁAW USIDUS (WARSZAWA)

## WSTĘP

Celem pracy jest przeprowadzenie próby ilościowej analizy wpływu naprężeń momentowych na rozkład naprężeń wewnątrz tarczy kołowej (płaski stan odkształcenia) obciążonej na brzegu. Obliczono dwa przykłady obciążenia tarczy kołowej uwzględniając w każdym przypadku trzy modele ciała: model klasyczny ciała sprężystego — KS (bez uwzględnienia naprężeń momentowych) oraz dwa modele ciała mikropolarnego: ze związanymi obrotami (model Mindlina-Koitera — MK) oraz z dodatkowymi stopniami swobody (model Eringena-Nowackiego — EN). Podstawowe związki dla wymienionych modeli ciał podane są odpowiednio w pracach [3, 4, 7 oraz 8]. W pracy rozwiązuje się w zasadzie zagadnienie przy założeniu modelu EN, pozostałe dwa modele są w tym zagadnieniu pewnymi przypadkami szczególnymi.

Wpływ naprężeń momentowych na rozkład naprężeń wewnątrz nieskończonego pasma tarczowego był przedmiotem pracy autora [9]. W pracy tej wykazano na przykładzie dwóch wariantów obciążenia brzegów tarczy siłami normalnymi, że uwzględnienie naprężeń momentowych prowadzić może do poważnych zmian w stanie naprężenia w tarczy. Zmiany te polegają na szybszym wyrównywaniu się naprężeń wewnątrz tarczy obciążonej nierównomiernie na brzegu. Z obliczeń numerycznych wynika, że przyjęcie istnienia naprężeń momentowych prowadzić może do modyfikacji rozwiązania problemu o ponad dwadzieścia procent w stosunku do rozwiązania klasycznego.

## 2. RÓWNANIA OGÓLNE

Stan przemieszczenia w płaskim stanie odkształcenia możemy opisać za pomocą wektorów w biegunowym układzie współrzędnych  $r, \varphi$

$$\mathbf{u}(r, \varphi) \equiv (u_r, u_\varphi, 0),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(r, \varphi) \equiv (0, 0, \varphi_3),$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczenia, a  $\boldsymbol{\varphi}$  wektorem obrotu cząstek ośrodka. W modelach KS i MK obowiązuje związek

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \left( u_{\varphi, r} - \frac{1}{r} u_{r, \varphi} \right),$$

w modelu EN zaś  $\varphi_3$  jest składową stanu przemieszczenia niezależną od  $\mathbf{u}$ .

Jak wiadomo [8], zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia przyjmie postać dogodną do rozwiązywania po wprowadzeniu dwóch funkcji naprężeń  $F$  i  $\Psi$ . Za pomocą tych funkcji zagadnienie opisują trzy równania różniczkowe cząstkowe:

$$(2.1) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 F = 0,$$

$$(2.2) \quad \nabla_1^2 (1 - I^2 \nabla_1^2) \Psi = 0,$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} (1 - I^2 \nabla_1^2) \Psi = -A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla_1^2 F.$$

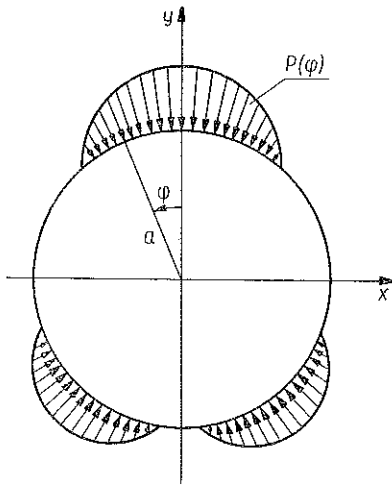
w powyższych wzorach  $F$  jest funkcją naprężeń Airy'ego,  $\Psi$  drugą, pomocniczą funkcją naprężeń,  $\nabla_1^2$  zaś oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a we współrzędnych biegunowych

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r};$$

$I^2 = (\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)/4\mu\alpha$  jest stałą materiałową charakteryzującą ośrodek i mającą wymiar [długość]<sup>2</sup>. Wreszcie  $A = (\lambda + 2\mu)(\gamma + \varepsilon)/4\mu(\lambda + \mu)$ . Ponadto  $\lambda, \mu$  są to stałe materiałowe typu Lamégo, a  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  — nowe stałe materiałowe ośrodka mikropolarnego typu EN.

Naprężenia wyrażają się przez funkcje  $F$  i  $\Psi$  w sposób następujący:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \\ \mu_{13} &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \mu_{23} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$



Rys. 1

Rozważmy teraz tarczę kołową o promieniu  $r=a$  przedstawioną na rys. 1, obciążoną na brzegu  $r=a$  siłami normalnymi. Przedstawmy obciążenie brzegowe  $p(\varphi)$  za pomocą szeregu Fouriera przy zmiennym  $\varphi$  i okresie  $L=2\pi$ . Szereg ten ma postać:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi,$$

gdzie  $a_1=0$  ze względu na warunek równowagi całości. Tak więc

$$(2.5) \quad p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Funkcję naprężeń  $F(r, \varphi)$ , będącą rozwiązaniem równania (2.1), przyjmijmy podobnie jak w klasycznej teorii sprężystości w postaci

$$(2.6) \quad F(r, \varphi) = \frac{a_0}{4} r^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{n+2}) \cos n\varphi.$$

Zauważmy, że funkcję  $\Psi(r, \varphi)$ , spełniającą równanie (2.2), możemy otrzymać jako sumę rozwiązań dwóch prostszych równań. Mamy więc

$$(2.7) \quad \nabla_1^2 \Psi_1 = 0,$$

$$(2.8) \quad \Psi_2 - l^2 \nabla_1^2 \Psi_2 = 0,$$

$$(2.9) \quad \Psi(r, \varphi) = \Psi_1(r, \varphi) + \Psi_2(r, \varphi).$$

Napiszmy w postaci rozwiniętej równanie (2.8). Mamy

$$(2.9)' \quad \Psi_2 - l^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right) = 0.$$

Funkcję  $\Psi_2$  przedstawimy w postaci

$$(2.10) \quad \Psi_2 = \sum_{n=2}^{\infty} D_n Z_n(r) \sin n\varphi$$

i wstawimy do (2.9)'. Wtedy otrzymamy równanie różniczkowe

$$(2.11) \quad \frac{d^2 Z_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ_n}{dr} - \left( \frac{1}{l^2} + \frac{n^2}{r^2} \right) Z_n = 0.$$

Dokonując w tym równaniu zamiany zmiennych  $r = l\zeta$  otrzymamy

$$\frac{d^2 Z_n}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dZ_n}{d\zeta} - \left( 1 + \frac{n^2}{\zeta^2} \right) Z_n = 0.$$

Jest to równanie różniczkowe typu Bessela. Całka ogólna tego równania ma postać

$$(2.12) \quad Z_n = E_n I_n(\zeta) + F_n K_n(\zeta),$$

gdzie  $E_n$  i  $F_n$  są ciągami wielkości niezależnych od  $\zeta$ , natomiast  $I_n(\zeta)$  jest funkcją Bessela zmiennej urojonej pierwszego rodzaju rzędu  $n$  lub inaczej funkcją Bessela zmodyfikowaną, a  $K_n(\zeta)$  jest funkcją Mac Donalda. Rozwiązaniem równania (2.11) jest zatem funkcja

$$(2.12)' \quad Z_n = E_n I_n\left(\frac{r}{l}\right) + F_n K_n\left(\frac{r}{l}\right).$$

W takim razie dla funkcji  $\Psi_2$  otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(2.13) \quad \Psi_2(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ D_n I_n\left(\frac{r}{l}\right) + F_n K_n\left(\frac{r}{l}\right) \right] \sin n\varphi.$$

Rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

$$(2.14) \quad \Psi_1 = \sum_{n=2}^{\infty} B_n r^n \sin n\varphi.$$

Na podstawie (2.9) otrzymujemy więc następujące wyrażenie dla funkcji  $\Psi(r, \varphi)$ :

$$(2.15) \quad \Psi(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ B_n r^n + D_n I_n \left( \frac{r}{l} \right) + F_n K_n \left( \frac{r}{l} \right) \right] \sin n\varphi.$$

Ze względu jednak na to, że  $K_n(0) = \infty$ , a naprężenia dla  $r=0$  są ograniczone, musimy przyjąć w (2.15), że  $F_n = 0$ . Ostateczną postacią funkcji naprężeń będzie więc

$$(2.16) \quad \Psi(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[ B_n r^n + D_n I_n \left( \frac{r}{l} \right) \right] \sin n\varphi.$$

Potrzebne tutaj i w dalszym ciągu podstawowe wiadomości o funkcjach Bessela można znaleźć np. w pracy [6].

Warunki brzegowe dla  $r=a$  otrzymujemy z zależności  $p_i = \sigma_{ji} n_j$ ,  $m_i = \mu_{ji} n_j$ , gdzie  $\sigma$  jest naprężeniem siłowym,  $\mu$  naprężeniem momentowym,  $\mathbf{n}$  jednostkowym wektorem normalnym do brzegu. Warunki te napisane w sposób jawny mają tu postać:

$$(2.17) \quad [\sigma_{rr}]_{r=a} = p(\varphi), \quad [\sigma_{r\varphi}]_{r=a} = 0, \\ [\mu_{rz}]_{r=a} = 0.$$

Wykorzystując trzy warunki brzegowe (2.17) oraz równanie zgodności (2.3), otrzymujemy cztery nieskończone ciągi równań z niewiadomymi  $A_n, B_n, C_n, D_n$ , skąd wyznaczamy te stałe. Następnie zaś wyznaczamy naprężenia.

Przy kontroli licznych w tej części pracy przekształceń typu algebraicznego autor wykorzystał pracę [2]. Ponieważ w pracy wszystkie badania prowadzimy na przykładzie naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , przeto podamy tutaj dokładny wzór jedynie na to naprężenie. Tak więc dla modelu EN mamy:

$$(2.18) \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n(l/a, A/l^2)} \left\{ \Xi_n \left( \frac{l}{a}, \frac{A}{l^2} \right) \xi^{n-2} + \right. \\ \left. + A_n \left( \frac{l}{a}, \frac{A}{l^2} \right) \xi^n - 2n \frac{l}{a} \frac{A}{l^2} \left[ \frac{-n(1+n)l^2}{a^2 \xi^2} I_n \left( \frac{\xi a}{l} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{nl}{a\xi} I_{n-1} \left( \frac{\xi a}{l} \right) \right] \right\} \cos n\varphi,$$

gdzie

$$A_n(l/a, A/l^2) = \left[ 1 + 2 \left( \frac{l}{a} \right)^2 \frac{A}{l^2} n(n+1) \right] I_{n-1} \left( \frac{a}{l} \right) - \left[ n \frac{l}{a} + 4 \left( \frac{l}{a} \right)^3 \frac{A}{l^2} n^2(n+1) \right] I_n \left( \frac{a}{l} \right),$$

$$E_n \left( \frac{l}{a}, \frac{A}{l^2} \right) = -n \left[ \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{l}{a} \right)^2 \frac{A}{l^2} \right] I_{n-1} \left( \frac{a}{l} \right) + n^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{l}{a} + 2(n+1) \left( \frac{l}{a} \right)^3 \frac{A}{l^2} \right] I_n \left( \frac{a}{l} \right),$$

$$A_n \left( \frac{l}{a}, \frac{A}{l^2} \right) = \frac{1}{2} (n+2) \left[ I_{n-1} \left( \frac{a}{l} \right) - \frac{l}{a} n I_n \left( \frac{a}{l} \right) \right], \quad \xi = \frac{r}{a}.$$

Dla modelu MK będziemy przyjmować  $\nu=0,3$ . Jak wiadomo z [7], rozwiązania dla modelu MK otrzymamy, jeżeli we wzorze (2.18) podstawimy  $A=2(1-\nu)l^2$ . Uwzględniając, że  $\nu=0,3$ , wzór na  $\sigma_{\varphi\varphi}$  dla modelu MK otrzymamy, jeżeli podstawimy  $A/l^2=1,4$ . Wzoru tego nie będziemy wypisywali. Wreszcie, dla najprostszego modelu KS, dla którego rozwiązanie znaleźć można np. w [3], przyjmiemy  $A=0$ . Wtedy otrzymamy

$$(2.19) \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\xi, \varphi) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_n [n\xi^{n-2} - (n+2)\xi^n] \cos n\varphi.$$

### 3. ŚCISKANIE TARCZY OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM NA CZĘŚCI BRZEGU

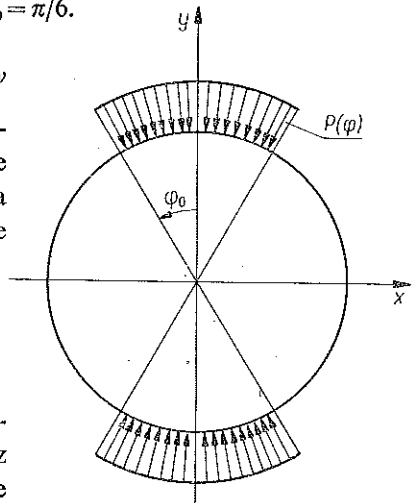
Jako pierwszy przykład obciążenia brzegu tarczy rozpatrzmy obciążenie rozłożone wzdłuż dwóch odcinków brzegu tarczy, odpowiadających dwu kątom środkowym o wielkości  $2\varphi_0$  (rys. 2). Przyjmiemy  $\varphi_0 = \pi/6$ .

#### 3.1. Naprężenia normalne w środku tarczy

Zajmiemy się przede wszystkim wyznaczeniem naprężeń w środku tarczy. W tym celu we wzorze (2.18) podstawimy  $\xi=0$ , co odpowiada  $r=0$ , oraz  $\varphi=3\pi/2$ . Wprowadzimy oznaczenie na wartość naprężenia w środku tarczy

$$\sigma_{\varphi\varphi} \left( 0, 3 \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_0.$$

Wzór na  $\sigma_0$  otrzymamy z (2.18). W występującym tam szeregu pozostanie tylko wyraz odpowiadający  $n=2$ , wszystkie pozostałe znikną.



Rys. 2

Tablica 1. Wartości funkcji  $\sigma_0(A, D) \frac{2P}{\pi}$  dla tarczy kołowej obciążonej według rys. 2 dla różnych materiałów mikropolarnych

MODEL KS		1,38962				
MODEL EN	$l/a$	0,02	0,05	0,10	0,20	0,50
	$A/l^2$					
	0,02	1,38957	1,38930	1,38838	1,38542	1,37799
	0,04	1,38952	1,38897	1,38715	1,38127	1,36667
	0,10	1,38935	1,38798	1,38347	1,36909	1,3345
	1,0	1,38692	1,37362	1,33288	1,22544	1,04408
MODEL MK	1,4	1,38585	1,36745	1,31286	1,17854	0,97465

Tablica 2. Wartości naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi} \frac{2P}{\pi}$  wzdłuż poziomej średnicy tarczy kołowej, obciążonej według rys. 2

$N \backslash \xi$	3	5	10	20	30
0,0	1,38962	1,38962	1,38962	1,38962	1,38962
0,1	1,36377	1,36377	1,36377	1,36377	1,36377
0,2	1,28778	1,28783	1,28783	1,28783	1,28783
0,3	1,16632	1,16683	1,16683	1,16683	1,16683
0,4	1,00719	1,00957	1,00958	1,00958	1,00958
0,5	0,82130	0,82823	0,82835	0,82834	0,82834
0,6	0,62267	0,63663	0,63739	0,63737	0,63737
0,7	0,42847	0,44738	0,45067	0,45039	0,45039
0,8	0,25894	0,27064	0,28057	0,27816	0,27818
0,9	0,13748	0,12129	0,13605	0,12662	0,12715
1,0	0,09059	0,04728	-0,05478	0,01373	0,00962

Model EN:  $l/a=0,1$ ;  $A/l^2=0,01$ Model MK:  $l/a=0,1$ 

$N \backslash \xi$	3	5	10	$N \backslash \xi$	3	5	10
0,0	1,38900	1,38900	1,38900	0,0	1,31286	1,31286	1,31286
0,1	1,36319	1,36319	1,36319	0,1	1,29148	1,29148	1,29148
0,2	1,28731	1,28736	1,28736	0,2	1,22834	1,22836	1,22836
0,3	1,16603	1,16654	1,16654	0,3	1,12697	1,12721	1,12721
0,4	1,00712	1,00948	1,00949	0,4	0,99315	0,99423	0,99423
0,5	0,82146	0,82835	0,82847	0,5	0,83490	0,83806	0,83809
0,6	0,62305	0,63693	0,63768	0,6	0,66242	0,66887	0,66903
0,7	0,42899	0,44780	0,45105	0,7	0,48776	0,49701	0,49762
0,8	0,25947	0,27114	0,28095	0,8	0,32413	0,33183	0,33319
0,9	0,13775	0,12173	0,13628	0,9	0,18382	0,18159	0,18276
1,0	0,09012	0,04693	-0,05354	1,0	0,07310	0,05145	0,05147

Tak więc dla modelu EN będziemy mieli:

$$(3.1) \quad \sigma_0 = \frac{a_0}{2} + a_2 \frac{\left[1 + 4 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2}\right] I_1\left(\frac{a}{l}\right) - \left[2 \frac{l}{a} + 24 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2}\right] I_2\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{l}{a} \frac{A}{l^2}}{\left[1 + 12 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2}\right] I_1\left(\frac{a}{l}\right) - \left[2 \frac{l}{a} + 48 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2}\right] I_2\left(\frac{a}{l}\right)}$$

Wartość naprężenia  $\sigma_0$  w modelu MK otrzymamy podstawiając  $A/l^2 = 1,4$ . Natomiast aby otrzymać naprężenie  $\sigma_0$  w modelu KS należy przyjąć  $A = 0$ .

Obciążenie brzegowe z rys. 2 rozłożmy w szereg Fouriera:

$$(3.2) \quad p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Współczynniki  $a_n$  przyjmują wartości

$$(3.3) \quad a_0 = \frac{2P}{\pi} \frac{\pi}{3}, \quad a_n = \frac{2P}{\pi} \frac{2}{n} \sin n \frac{\pi}{6} \quad \text{dla } n = 2, 4, \dots,$$

$$a_n = 0 \quad \text{dla } n = 1, 3, 5, \dots$$

Wstawiając do (3.1) współczynniki  $a_0$  oraz  $a_2$  otrzymamy dla modelu EN

$$(3.4) \quad \sigma_0 / \frac{2P}{\pi} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left[1 + 4 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2}\right] I_1\left(\frac{a}{l}\right) - \left[2 \frac{l}{a} + 24 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2}\right] I_2\left(\frac{a}{l}\right) + \frac{l}{a} \frac{A}{l^2}}{\left[1 + 12 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2}\right] I_1\left(\frac{a}{l}\right) - \left[2 \frac{l}{a} + 48 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2}\right] I_2\left(\frac{a}{l}\right)}$$

Wzór dla modelu MK otrzymamy przyjmując  $A/l^2 = 1, 4$ . Dla modelu KS będzie

$$(3.5) \quad \sigma_0 / \frac{2P}{\pi} = 1,38962.$$

Obliczenie wartości  $\sigma_0$  w modelach EN i MK przeprowadzono dwoma sposobami, aby ustrzec się ewentualnych błędów. Wielkość  $\sigma_0$  w modelu EN tabelaryzowano dla  $l/a = 0,01, 0,02, \dots, 0,1$  i dla  $A/l^2 = 0,01, 0,02, \dots, 0,10$ .

Ponieważ argumenty funkcji Bessela były tu duże, a funkcja  $I_n(z)$  bardzo szybko rośnie wraz z argumentem  $z$ , przeto posłużono się wzorami asymptotycznymi dla  $I_1(a/l)$  oraz  $I_2(a/l)$ . Użyto mianowicie wzoru asymptotycznego ([6], s. 132):

$$(3.6) \quad I_\nu(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (v, k)}{(2z)^k} + 0(z^{-n-1}) \right],$$

gdzie

$$(v, 0) = 1, \quad (v, k) = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(v + \frac{1}{2} - k\right)}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$\Gamma(z)$  oznacza funkcję gamma Eulera.

Dla funkcji  $I_1(z)$  oraz  $I_2(z)$  przy  $z \geq 10$  otrzymamy stąd z dokładnością do  $10^{-4}$ :

$$(3.7) \quad \begin{aligned} I_1(z) &= \frac{0,3989}{z^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{3}{8z} - \frac{15}{128z^2} - \frac{105}{1024z^3} \right\}, \\ I_2(z) &= \frac{0,3989}{z^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{15}{8z} + \frac{105}{128z^2} + \frac{315}{1024z^3} \right\}. \end{aligned}$$

Podstawmy wyrażenia (3.7) do wzoru (3.4), a następnie podzielmy licznik i mianownik przez

$$0,3989 \exp\left(\frac{a}{l}\right) / \left(\frac{a}{l}\right)^{1/2} = A_1\left(\frac{l}{a}\right).$$

Wtedy w liczniku wystąpi wielkość  $(l/a \cdot A/l^2)/(A_1 \cdot l/a)$ . Wielkość tę możemy w naszych obliczeniach zaniedbać jako małą w stosunku do pozostałej części licznika. W ten sposób otrzymamy wyrażenie dogodne już do obliczeń numerycznych. Wyrażenie to ma postać:

$$(3.8) \quad \sigma_0 / \frac{2P}{\pi} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left[ 1 + 4 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2} \right] B_1\left(\frac{l}{a}\right) - \left[ 2 \frac{l}{a} + 24 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2} \right] B_2\left(\frac{l}{a}\right)}{\left[ 1 + 12 \left(\frac{l}{a}\right)^2 \frac{A}{l^2} \right] B_1\left(\frac{l}{a}\right) - \left[ 2 \frac{l}{a} + 48 \left(\frac{l}{a}\right)^3 \frac{A}{l^2} \right] B_2\left(\frac{l}{a}\right)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_1\left(\frac{l}{a}\right) &= 1 - \frac{3}{8} \frac{l}{a} - \frac{15}{128} \left(\frac{l}{a}\right)^2 - \frac{105}{1024} \left(\frac{l}{a}\right)^3, \\ B_2\left(\frac{l}{a}\right) &= 1 - \frac{15}{8} \frac{l}{a} + \frac{105}{128} \left(\frac{l}{a}\right)^2 + \frac{315}{1024} \left(\frac{l}{a}\right)^3. \end{aligned}$$

Dla modelu MK przyjmujemy  $A/l^2 = 1,4$ .

Wartości  $\sigma_0$  dla modeli EN i MK zostały obliczone na maszynie elektronicznej ZAM 41. Podane są one w tablicy 1. Tablica ta zawiera tylko część otrzymanych wyników numerycznych, pozostałych w niej nie umieszczono, ponieważ charakter zmienności  $\sigma_0$  jest i tak już widoczny.

Inną metodą stabelaryzowano także wielkość  $\sigma_0$  dla modelu EN dla  $l/a = 0,1; 0,2; 0,5$  oraz  $A/l^2 = 0,01, 0,02, \dots, 0,05$  oraz dla modelu MK dla trzech wymienionych wyżej wartości stosunku  $l/a$ . Również te wartości umieszczono w tablicy 1. Obliczenia drugim sposobem były również przeprowadzone na maszynie ZAM 41, przy



tym wykorzystano tablice funkcji Bessela z jedenastoma cyframi wartościowymi [1]. Wyniki obliczeń przeprowadzonych różnymi sposobami okazały się zgodne.

W celu kontroli programów pewne obliczenia przeprowadzono niezależnie od maszyny. Np. dla modelu EN dla  $l/a=0,1$ ;  $A/l^2=0,1$  otrzymano w ten sposób  $\sigma_0=1,38346$ , podczas gdy maszyna podała wielkość  $\sigma_0=1,38347$ . Natomiast dla modelu MK przy  $l/a=0,1$  otrzymano niezależnie od maszyny 1,3129090 (maszyna podała 1,31290900570).

Otrzymane wyniki numeryczne pozwalają zorientować się w zmianie naprężeń w środku tarczy w modelach EN i MK w stosunku do modelu KS.

### 3.2. Naprężenia normalne wzdłuż poziomej średnicy

Obecnie próbujemy zorientować się w rozkładzie naprężeń wzdłuż całej poziomej średnicy. W tym celu należy w odpowiednich wzorach przyjąć  $\varphi = \frac{3}{2} \pi$ .

W przypadku modelu KS do wzoru (2.19) należy podstawić wzory (3.3) na współczynniki. Wtedy otrzymamy wzór

$$(3.9) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{KS} \left( \xi, \frac{3}{2} \pi \right) / \frac{2P}{\pi} = \frac{\pi}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k \frac{\pi}{3}}{k} [k \xi^{2k-2} - (k+1) \xi^{2k}].$$

Obliczenia dokonano na maszynie ZAM 41 dla  $\xi=0,0, 0,1, \dots, 1,0$ , otrzymane zaś wartości umieszczone zostały w tablicy 2 (model KS). Podano tam sumę 3, 5, 10, 20 i 30 wyrazów tego szeregu.

Dla modelu EN szczegółowo stabelaryzowano naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi}$  dla  $l/a=0,1$  i  $A/l^2=0,01$ .

Podstawiając do (2.18) powyższe wartości parametrów  $l/a$  i  $A/l^2$  oraz wzory na współczynniki (3.3), jednocześnie przyjmując  $\varphi=3\pi/2$ , otrzymamy po przekształceniach wzór

$$(3.10) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{EN} \left( \xi, 3 \frac{\pi}{2} \right) / \frac{2P}{\pi} = \frac{\pi}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{k\pi}{3}}{k} \frac{1}{A_{2k}} \left\{ \Xi_{2k} \xi^{2k-2} + \right. \\ \left. + A_{2k} \xi^{2k} - 0,004k \left[ \frac{-2k(1+2k)}{(10\xi)^2} I_{2k}(10\xi) + \frac{2k}{10\xi} I_{2k-1}(10\xi) \right] \right\},$$

gdzie

$$A_{2k} = [1 + 0,0004k(2k+1)] I_{2k-1}(10) - [0,2k + 0,00016k^2(2k+1)] I_{2k}(10),$$

$$\Xi_{2k} = -1,0004k I_{2k-1}(10) + k^2 [0,2 + 0,00008(2k+1)] I_{2k}(10),$$

$$A_{2k} = (k+1) [I_{2k-1}(10) - 0,2k I_{2k}(10)].$$

Wielkość  $\sigma_{\varphi\varphi}^{EN}$  została stabelaryzowana dla  $\xi=0,1 (0,1) 1,0$ . Odpowiednie wartości zawiera tablica 2 (model EN). Tablica ta podaje sumę 3, 5 i 10 wyrazów powyższego

szeregu. Wreszcie dla modelu MK przy  $l/a=0,1$  naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi}$  wyraża się następującym wzorem:

$$(3.11) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{MK}} \left( \xi, 3 \frac{\pi}{2} \right) / \frac{2P}{\pi} = \frac{\pi}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k \frac{\pi}{3}}{k} \frac{1}{A_{2k}} \left\{ E_{2k} \xi^{2k-2} + \right. \\ \left. + A_{2k} \xi^{2k} - 0,56k \left[ \frac{-2k(1+2k)}{(10\xi)^2} I_{2k}(10\xi) + \frac{2k}{10\xi} I_{2k-1}(10\xi) \right] \right\},$$

gdzie

$$A_{2k} = [1 + 0,056k(2k+1)] I_{2k-1}(10) - [0,2k + 0,0224k^2(2k+1)] I_{2k}(10),$$

$$E_{2k} = -1,056k I_{2k-1}(10) + k^2 [0,2 + 0,0112(2k+1)] I_{2k}(10),$$

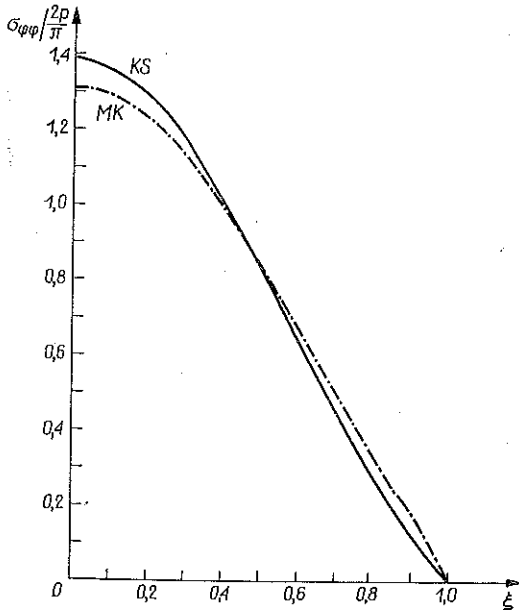
$$A_{2k} = (k+1) [I_{2k-1}(10) - 0,2k I_{2k}(10)].$$

Wartości liczbowe tego naprężenia podaje tablica 2 (model MK).

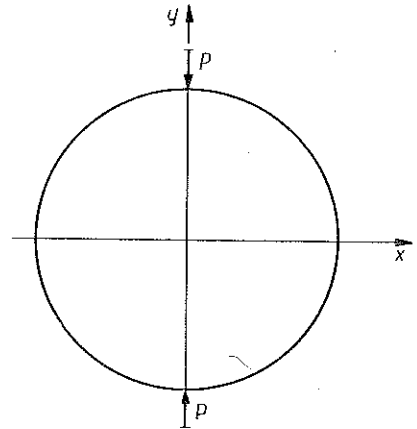
Na rys. 3 przedstawiono wykresy  $\sigma_{\varphi\varphi}$  wzdłuż poziomej średnicy. Rysunek uwzględnia wykresy naprężenia dla modelu KS oraz dla modelu MK przy  $l/a=0,1$ . Dla modelu EN przy  $l/a=0,1$  i  $A/l^2=0,01$  wykres naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi}$  pokrywa się z wykresem dla modelu KS w granicach dokładności  $10^{-2}$ , uwzględnionej na rys. 3.

#### 4. ŚCISKANIE TARCZY DWIEMA SIŁAMI SKUPIONYMI

Jako drugi przykład obciążenia brzegu tarczy rozpatrzmy obciążenie brzegu tarczy dwiema siłami skupionymi, działającymi wzdłuż pionowej średnicy, jak na rys. 4.



Rys. 3



Rys. 4

Obciążenie brzegowe z rys. 4 rozkładamy w szereg Fouriera

$$p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Otrzymamy następujące wzory na współczynniki  $a_n$ :

$$(4.1) \quad a_0 = \frac{2P}{\pi a}, \quad a_n = \frac{2P}{\pi a} \quad \text{dla } n=2, 4, \dots,$$

$a_n=0$  dla  $n$  nieparzystych,  $a$  jest długością promienia tarczy. Rozwiązanie zagadnienia otrzymamy podstawiając w (2.18) wyrażenia (4.1) dla współczynników  $a_n$ . Otrzymanego wzoru nie napiszemy, ponieważ jest bardzo długi.

#### 4.1. Naprężenia w środku tarczy

Podobnie jak dla obciążenia ciągłego, tak również teraz zbadano przede wszystkim wielkość naprężenia w środku tarczy  $\sigma_0 = \sigma_{\varphi\varphi}(0, 3\pi/2)$ . Wzór na  $\sigma_0$  otrzymamy teraz podstawiając do (3.1) wartości  $a_0$  i  $a_2$  wzięte z (4.1). Wzór ten napiszemy w postaci:

$$(4.2) \quad \sigma_0 / \frac{P}{\pi a} = 1 + 2 \frac{\left[ 1 + 4 \left( \frac{l}{a} \right)^2 \frac{A}{l^2} \right] I_1 \left( \frac{a}{l} \right) - \left[ 2 \frac{l}{a} + 24 \left( \frac{l}{a} \right)^3 \frac{A}{l^2} \right] I_2 \left( \frac{a}{l} \right) + \frac{l}{a} \frac{A}{l^2}}{\left[ 1 + 12 \left( \frac{l}{a} \right)^2 \frac{A}{l^2} \right] I_1 \left( \frac{a}{l} \right) - \left[ 2 \frac{l}{a} + 48 \left( \frac{l}{a} \right)^3 \frac{A}{l^2} \right] I_2 \left( \frac{a}{l} \right)}.$$

Jest to wzór dla modelu EN. Odpowiedni wzór dla modelu MK otrzymujemy podstawiając w (4.2)  $A/l^2=1,4$ ; natomiast wzór dla modelu KS otrzymujemy przyjmując  $A=0$ .

Wielkość  $\sigma_0 / \frac{P}{\pi a}$  została stabelaryzowana. Jak łatwo stwierdzić

$$\sigma_0^{\text{KS}} / \frac{P}{\pi a} = 3.$$

Dla modelu EN wielkość  $\sigma_0 / \frac{P}{\pi a}$  stabelaryzowano przy następujących wartościach parametrów  $A/l^2=0,01, 0,02, \dots, 0,10$  oraz  $l/a=0,01, 0,02, \dots, 0,10$ . Zastosowano przy tym wzory asymptotyczne dla funkcji Bessela. Ponadto dla modelu EN obliczono tę wielkość dla tych samych wartości  $A/l^2$  oraz  $l/a=0,1, 0,2, 0,5$  ale metodą niezależną. Dla modelu MK wielkość  $\sigma_0 / \frac{P}{\pi a}$  policzono dla  $l/a=0,01, 0,02, \dots, 0,10$  z zastosowaniem wzorów asymptotycznych dla funkcji Bessela oraz dla  $l/a=0,1, 0,2, 0,5$  metodą niezależną. Niektóre z otrzymanych wartości numerycznych umieszczone zostały w tabelicy 3.

#### 4.2. Naprężenia normalne wzdłuż poziomej średnicy

W następnym etapie pracy stabelaryzowano naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi}$  wzdłuż poziomej średnicy tarczy dla modelu KS przy siłach skupionych, podstawiając mianowicie we wzorze (2.19) wyrażenia (4.1)

Tablica 3. Wartości funkcji  $\sigma_0(A, l) \frac{P}{\pi a}$  dla tarczy kołowej obciążonej według rys. 4 dla różnych materiałów mikropolarnych

MODEL KS		3,00000				
MODEL EN	$l/a$	0,02	0,05	0,10	0,20	0,50
	$A/l^2$					
	0,02	2,99987	2,99924	2,997714	2,99030	1,97312
	0,04	2,99975	2,99848	2,99428	2,98071	2,94699
	0,10	2,99937	2,99621	2,98578	2,95259	2,87272
	1,0	2,99376	2,96304	2,86897	2,62083	2,20199
MODEL MK	1,4	2,99128	2,94879	2,82772	2,51253	2,04166

na współczynniki  $a_n$  oraz przyjmując  $\varphi = 3\pi/2$  otrzymamy

$$(4.3) \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{KS}} \frac{P}{\pi a} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [k \xi^{2k-2} - (k+1) \xi^{2k}].$$

Powyższe naprężenie stabilaryzowano dla  $\xi = 0, 0, 1, \dots, 1, 0$ . Odpowiednie wartości umieszczono w tablicy 4 (model KS). Tablica ta podaje sumy 3, 5, 10, 20 i 30 wyrazów tego szeregu. Dla  $\xi$  bliskich 1 szereg ten jest coraz słabiej zbieżny, natomiast dla  $\xi = 1$  jest on rozbieżny. Mianowicie dla  $\xi = 1$  mamy

$$\left( \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{KS}} \frac{P}{\pi a} \right)_{\xi=1, \varphi=\frac{3\pi}{2}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.$$

Tablica 4. Wartości naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi} \frac{P}{\pi a}$  wzdłuż poziomej średnicy tarczy kołowej obciążonej siłami skupionymi, rys. 4

Model KS

$N$					
$\xi$	3	5	10	20	30
0,0	3,00000	3,00000	3,00000	3,00000	3,00000
0,1	2,92112	2,92118	2,92118	2,92118	2,92118
0,2	2,69869	2,69823	2,69822	2,69822	2,69822
0,3	2,37137	2,36678	2,36672	2,36672	2,36672
0,4	1,99443	1,97351	1,97265	1,97265	1,97265
0,5	1,62500	1,56641	1,55999	1,56000	1,56000
0,6	1,30195	1,19207	1,16228	1,16263	1,16263
0,7	1,02001	0,89281	0,79642	0,80171	0,80172
0,8	0,69805	0,66785	0,44251	0,48611	0,48719
0,9	0,14167	0,31535	0,06043	0,17042	0,21105
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tablica 4 c. d.

Model EN:  $l/a=0,1, \quad A/l^2=0,01$

Model MK:  $l/a=0,1$

$\xi \backslash N$	3	5	10	$\xi \backslash N$	3	5	10
0,0	2,99857	2,99857	2,99857	0,0	2,82272	2,82272	2,82272
0,1	2,91990	2,91989	2,91989	0,1	2,75945	2,75944	2,75944
0,2	2,69777	2,69731	2,69731	0,2	2,57842	2,57821	2,57821
0,3	2,37091	2,36635	2,36629	0,3	2,30535	2,30325	2,30323
0,4	1,99433	1,97355	1,97270	0,4	1,97687	1,96724	1,96698
0,5	1,62498	1,56676	1,56040	0,5	1,63186	1,60449	1,60267
0,6	1,30166	1,19240	1,16292	0,6	1,29988	1,24630	1,23841
0,7	1,01926	0,89258	0,79721	0,7	0,98844	0,91692	0,89432
0,8	0,69734	0,66661	0,44388	0,8	0,67371	0,62295	0,58229
0,9	0,14318	0,31502	0,06354	0,9	0,30703	0,33682	0,31083
1,0	-0,00029	-0,00029	-0,00029	1,0	0,03726	0,03726	0,03726

Szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  jest szeregiem rozbieżnym. Istnieją jednak metody sumowania szeregów rozbieżnych (por. [5]). Stosując np. metodę  $C_1$  otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -\frac{1}{2},$$

stąd

$$\left[ \sigma_{\varphi\varphi}^{KS} / \frac{P}{\pi a} \right]_{\xi=1, \varphi=3\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi}$  dla modelu EN wzdłuż poziomej średnicy w przypadku sił skupionych obliczono dla  $l/a=0,1, A/l^2=0,01$ . Odpowiedni wzór ma postać:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{EN} / \frac{P}{\pi a} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{A_{2k}} \left\{ \Xi_{2k} \xi^{2k-2} + A_{2k} \xi^{2k} - 0,004k \left[ \frac{-2k(1+2k)}{(10\xi)^2} I_{2k}(10\xi) + \frac{2k}{10\xi} I_{2k-1}(10\xi) \right] \right\},$$

przy czym  $A_{2k}, \Xi_{2k}, A_{2k}$  są dane wzorami (3.10). Wielkość  $\sigma_{\varphi\varphi}^{EN} / \frac{P}{\pi a}$  została stabelaryzowana dla  $\xi=0,1, 0,2, \dots, 0,9$ , a odpowiednie wartości podano w tablicy 4 (model EN). Tablica podaje sumę 3, 5 i 10 wyrazów tego szeregu. Dla  $\xi=1$  rozważany szereg jest rozbieżny. Sumę jego obliczono więc metodą  $C_1$  przyjmując

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{s_1 + \dots + s_{10}}{10},$$

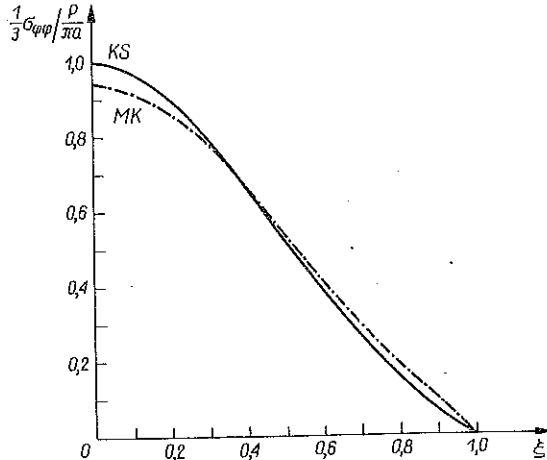
a otrzymaną wartość wstawiono do tablicy.

Dla modelu MK policzono naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{MK}} / \frac{P}{\pi a}$  wzdłuż poziomej średnicy przy  $l/a=0,1$ . Odpowiedni wzór ma postać:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{MK}} / \frac{P}{\pi a} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{A_{2k}} \left\{ E_{2k} \xi^{2k-2} + A_{2k} \xi^{2k} + \right. \\ \left. - 0,56k \left[ \frac{-2k(1+2k)}{(10\xi)^2} I_{2k}(10\xi) + \frac{2k}{10\xi} I_{2k-1}(10\xi) \right] \right\},$$

przy czym  $A_{2k}$ ,  $E_{2k}$ ,  $A_{2k}$  wyrażają się wzorami (3.11). Naprężenie to stabilaryzowano dla  $\xi=0,1, 0,2, \dots, 0,9$ , a wyniki (sumę 3, 5 i 10 wyrazów szeregu) umieszczono w tablicy 4 (model MK). Dla  $\xi=1$  zastosowano metodę  $C_1$  sumowania szeregów rozbieżnych.

Rysunek 5 przedstawia wykres naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi} / \frac{P}{\pi a}$  wzdłuż poziomej średnicy. Rysunek uwzględnia wykresy naprężenia dla modelu KS oraz dla modelu MK przy  $l/a=0,1$ . Dla modelu EN przy  $l/a=0,1$  i  $A/l^2=0,01$  wykres naprężenia  $\sigma_{\varphi\varphi}$



Rys. 5

pokrywa się z wykresem w modelu KS w granicach dokładności  $10^{-2}$ . Jedynie dla  $\xi$  bliskich 1 wielkości numeryczne dla modelu EN różnią się od wielkości numerycznych dla modelu KS, ale z powodu słabej już zbieżności trudno stąd wyciągnąć wnioski.

## 5. DYSKUSJA WYNIKÓW

Analiza przytoczonych w tablicach wyników liczbowych dowodzi, że uwzględnienie naprężeń momentowych prowadzić może do zmian w stanie naprężenia w tarczy.

W przypadku obciążenia tarczy według rys. 2 naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi} / \frac{2P}{\pi}$  wzdłuż poziomej średnicy osiąga w modelu KS wartość maksymalną  $\sigma_0 / \frac{2P}{\pi} = 1,39$ , następnie naprężenie to maleje do zera. Model EN zmniejsza maksymalne wartości naprężenia.

W przypadku największych wartości stałych  $l$  i  $A$  uwzględnionych w tablicy 1 ( $l/a=0,5$ ;  $A/l^2=1$ ) otrzymujemy spadek maksymalnej wartości o 25% w stosunku do KS. Dla mniejszych wartości parametrów  $l/a$  i  $A/l^2$  ten spadek jest mniejszy, ale także znaczny. Dla modelu MK przy  $l/a=0,5$  otrzymujemy zmniejszenie wartości maksymalnej o 30% również w stosunku do odpowiedniej wartości KS. Przypadek drugiego typu obciążenia przedstawiają rys. 4, 5 oraz tablica 3. Naprężenie  $\sigma_{\varphi\varphi} \left/ \frac{P}{\pi a} \right.$  przyjmuje tutaj wartość maksymalną  $\sigma_0 \left/ \frac{P}{\pi a} \right. = 3$ . Tu również modele EN i MK obniżają maksymalne wartości naprężenia. Dla modelu EN przy  $l/a=0,5$  i  $A/l^2=1$  ten ubytek wynosi 27% w stosunku do analogicznej wartości KS, natomiast w modelu MK przy  $l/a=0,5$  nawet 32%. Inna rzecz, że przyjęcie takich czy innych wartości stosunków  $l/a$  i  $A/l^2$  jest sprawą otwartą. Ale również dla mniejszych wartości tych stosunków omawiane zmiany procentowe w modelach z naprężeniami momentowymi są znaczne.

Otrzymane wyniki świadczą o tym, że uwzględnienie naprężeń momentowych, podobnie jak w pracy [9], prowadzi do szybszego wyrównywania się naprężeń wewnątrz tarczy, obciążonej nierównomiernie na powierzchni, obniżania naprężeń maksymalnych oraz podwyższania naprężeń mniejszych.

Drugi wniosek dotyczy stwierdzenia, że w przypadku płaskiego stanu odkształcenia model MK stanowi przypadek szczególny modelu EN; ten ostatni model daje możliwość dość poważnych modyfikacji rozwiązania problemu drogą odpowiedniego doboru współczynnika materiałowego  $A$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. *Bessel functions*, Part II, *Functions of positive integer order*, Mathematical Tables, Vol. X, Cambridge 1952.
2. A. DUSZA, *Naprężenia momentowe w tarczy kołowej* [rękopis].
3. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.
4. W. T. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Kon. Ned. Akad. Wet, Ser. B, I, 67, 1964.
5. K. KNOPP, *Szeregi nieskończone*, Warszawa 1956.
6. N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
7. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentration*, Experimental Mechanics, 1, 3, 1-7, 1963.
8. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
9. Cz. USIDUS, *Naprężenia momentowe w pasmie tarczowym — porównanie trzech modeli ciała sprężystego*, Prace IPPT PAN, 1972.

#### Резюме

#### МОМЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ДИСКЕ

Работа содержит попытку количественного анализа влияния моментных напряжений на распределение напряжений в круглом диске (плоское деформированное состояние). Вопрос рассмотрен на примере двух вариантов нагружения края диска: распределенная нагрузка на части края и сосредоточенные силы. В каждом из этих случаев учтены три модели

твёрдого тела: классическая упругая среда, среда со связанными вращениями и микрополярная среда с тремя дополнительными степенями свободы. Введены две функции напряжений: функция Эри и вспомогательная функция напряжений  $\Psi$ . Даны результаты вычислений на ЭЦВМ. Показано, что учет моментных напряжений может привести в серьёзным изменениям в напряжённом состоянии диска в зависимости от принятых дополнительных значений материальных констант микрополярной среды.

## SUMMARY

## COUPLE STRESSES IN A CIRCULAR DISK

This paper represents an attempt at quantitative analysis of the influence of couple stresses on the stress distribution in a circular disk (plane strain). The analysis is based on two particular examples of the disk boundary loading: by forces uniformly distributed over a portion of the boundary, and by concentrated forces. Each of the cases is considered for three different models of the solid: the classical elastic body, the medium with constrained rotations and the micropolar body possessing three additional degrees of freedom. Two stress functions are introduced: the Airy stress function and the auxiliary stress function  $\Psi$ . Numerical analysis is performed on a computer. It is shown that the existence of couple stresses may lead to considerable modifications in the state of stress inside the disk, depending upon the values of the additional material constants of the micropolar medium.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1972 r.*