*ROZPRAWY INŻYNIERSKIE*, 21, 1, 113–120, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# HIPOTEZA TŁUMIENIA SOROKINA W PRZYPADKU DRGAŃ APERIODYCZNYCH

RYSZARD SKARŻYŃSKI (WARSZAWA)

## 1. Wstęp

Praca niniejsza stanowi analizę możliwości linearyzacji rozwiązania zagadnienia wymuszonych nieokresowo drgań lepkosprężystego ciała. W wielu zagadnieniach technicznych rozpatrywanie problemu drgań aperiodycznych z pominięciem wpływu tłumienia nie daje prawidłowego poglądu na ich przebieg i skutki mechaniczne; uwzględnienie tego wpływu prowadzi do znacznych utrudnień natury matematycznej, uniemożliwiając często otrzymywanie konkretnych wyników analitycznych.

Jednak w tych przypadkach, gdy analiza dynamiczna dotyczy drgań konstrukcji wykonanych z materiałów o silnym tłumieniu wewnętrznym takich, jak np. beton lub żelbet, lub też gdy konstrukcje te spoczywają na podłożu gruntowym, to uwzględnienie wpływu zanikania drgań jest raczej nieodzowne. Konieczność ta dotyczy zatem w szczególności drgań budowli o przeznaczeniu inżynieryjno-lądowym.

Od dziesiątków lat w praktyce inżynierskiej przyjął się i upowszechnił model lepkosprężystego ciała Voigta mający najczęstsze zastosowanie we wszelkiego rodzaju obliczeniach. Jest on tym chętniej stosowany, że dysponujemy dziś niemal wszystkimi doświadczalnymi danymi, charakteryzującymi własność tłumienia drgań wielu powszechnie stosowanych materiałów i że sformułowano je w sposób bezpośrednio odpowiadający charakterystykom tego modelu.

W przypadku gdy rozpatrujemy wymuszone nieokresowo drgania ustroju o masie rozłożonej, bardzo często zmuszeni jesteśmy szukać rozwiązań otwartych wykonując na równaniu amplitud transformację skończoną. Wówczas okazuje się, że tylko bardzo mała liczba początkowych prędkości kątowych ma wartości rzeczywiste, harmoniki zaś odpowiadające dalszym, urojonym wartościom tych prędkości przyjmują postać innych funkcji, najczęściej hiperbolicznych zamiast trygonometrycznych. Zachodzi zatem konieczność rozwiązania zagadnienia w dwu etapach.

Zilustrujemy to na prostym przykładzie poprzecznych drgań pręta pryzmatycznego. Niech będzie on zbudowany z lepkosprężystego materiału Voigta, drgania zaś wymuszone rozłożonym wzdłuż jego osi i dowolnym lecz ciągłym względem czasu obciążeniem $q(x, t)$

Równanie różniczkowe ruchu pręta ma w tym przypadku postać

$$\frac{EI}{\bar{m}}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\frac{EJ\theta}{\bar{m}}\frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4\partial t}+\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\bar{m}}q(x,t), \tag{1.1}$$

gdzie $\theta$ oznacza czas relaksacji, $\bar{m}$ masę jednostki długości pręta.

Rozwiązanie postuluje się przy warunkach początkowych

$$[w(x,t)]_{t=0}=w(x,0), \quad \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0}=\dot{w}(x,0).$$

Przyjmując oznaczenia

$$\frac{EI}{\bar{m}}\equiv C, \quad \frac{EI}{\bar{m}}\theta\equiv h \tag{1.2}$$

i wykonując na równaniu (1.1) transformację Laplace'a w odniesieniu do funkcji czasu, otrzymujemy

$$\frac{d^4 w(x,p)}{dx^4}(C+hp)+p^2 w(x,p)=\frac{1}{\bar{m}}q(x,p)+pw(x,0)+h\frac{d^4 w(x,0)}{dx^4}+\dot{w}(x,0). \tag{1.3}$$

Jeśli następnie funkcje $w(x,p)$, $q(x,p)$, $w(x,0)$ i $\dot{w}(x,0)$ rozwiniemy w szeregi wg spełniających warunek

$$\frac{d^4 W_n(x)}{dx^4}=\alpha_n^4 W_n(x) \tag{1.4}$$

unormowanych funkcji własnych $W_n(x)$

$$\begin{aligned} w(x,p)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(p)W_n(x), \qquad q(x,p)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(p)W_n(x),\\ w(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(0)W_n(x), \qquad \dot{w}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{w}_n(0)W_n(x), \end{aligned} \tag{1.5}$$

to podstawiając rozwinięcia (1.5) do równania (1.3) i wykorzystując warunek (1.4) znajdujemy zależność pomiędzy współczynnikami rozwinięcia funkcji (1.5):

$$A_n(p)=\frac{\frac{1}{\bar{m}}q_n(p)+(\alpha_n^4 h+p)w_n(0)+\dot{w}_n(0)}{p^2+\alpha_n^4 hp+\alpha_n^4 C}. \tag{1.6}$$

Przyjmijmy w mianowniku wyrażenia (1.6) oznaczenia

$$\alpha_n^4 C\equiv\omega_{on}^2, \quad \alpha_n^4 h\equiv 2\varepsilon_n \tag{1.7}$$

i przedstawmy go w postaci kanonicznej

$$p^2+2\varepsilon_n p+\omega_{on}^2\equiv(p-p_{1n})(p-p_{2n}). \tag{1.8}$$

Znajdujemy, że $p_{1n}=-\varepsilon_n+i\omega_n$, $p_{2n}=-\varepsilon_n-i\omega_n$, gdzie $\omega_n$ jest kolejnym wyrazem szeregu własnych prędkości kątowych drgań tłumionych:

$$\omega_n=\sqrt{\omega_{on}^2-\varepsilon_n^2}=\alpha_n^2\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}\left[1-\alpha_n^2\frac{EI}{\bar{m}}\frac{\theta^2}{4}\right]}. \tag{1.9}$$

Prędkość kątowa $\omega_n$ zmieniając swą wartość wraz ze wzrostem wskaźnika $n$ jest rzeczywista tylko, gdy

$$\alpha_n \leqslant \frac{2}{\theta}\sqrt{\frac{m}{EI}}. \tag{1.10}$$

Przy wskaźnikach wyższych jest ona urojona, w wyniku czego funkcja przebiegu drgań musi przybrać inną postać. W niektórych przypadkach ma to miejsce już w drugiej harmonice.

## 2. Rozwiązanie problemu

Niedogodność dwuetapowego analizowania przebiegu drgań zmusza do poszukiwania innego modelu lepkosprężystego ciała. Modelem przydatnym w tym przypadku okazuje się model Sorokina [1], przyjęcie jego bowiem umożliwia linearyzację zapisu drgań.

W modelu tym, jak wiadomo, siły wewnętrznego tłumienia materiału są związane z pulsacją drgań swobodnych $\omega$:

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) + \frac{\psi}{2\pi\omega}\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t}\right]. \tag{2.1}$$

We wzorze (2.1) $\psi$ oznacza współczynnik rozpraszania energii drgań. Twórca modelu przewidując okresowy charakter drgań

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \tag{2.2}$$

ustalił związek

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t} = i\varepsilon(t) \tag{2.3}$$

i przedstawił wpływ tłumienia wewnętrznego jako wartość urojoną

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t)\left[1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right]. \tag{2.4}$$

W przypadku gdy chodzi o drgania aperiodyczne, zależność (2.4) jako wynikająca z okresowego charakteru drgań jest nieprzydatna. Pozostaje jednak założenie o charakterze fizycznym (2.1), którego prawdziwości dowodzą doświadczenia przytoczone w pracy [1]. Jeśli przyjmiemy je w naszych rozważaniach, to przyniesie nam ono pożądany efekt w postaci zlinearyzowanych drgań własnych, których wszystkie pulsacje, niezależnie od wartości wskaźnika, będą rzeczywiste. Ocena rezultatów tego założenia możliwa jest jednak dopiero, gdy zostanie rozwiązany konkretny przykład.

Poniżej zamieszczono rozwiązanie problemu drgań aperiodycznych cienkiej, lepkosprężystej płyty, wymuszonych ruchomym obciążeniem. Wykażemy w nim, że pod względem formalnym uzyskany wynik jest w odniesieniu do postaci funkcji amplitud identyczny z wynikiem uzyskanym dla pierwszego etapu przy przyjęciu modelu lepkosprężystego ciała Voigta, natomiast wartości wszystkich kolejnych wyrazów szeregu pulsacji drgań własnych, tłumionych są rzeczywiste.

## 3. Przykład I

Równanie różniczkowe ruchu prostokątnej płyty o masie jednostki powierzchni $m$ i sztywności $D$, wymuszonego obciążeniem $q(x, t)$ ma postać

$$\frac{D}{m}\nabla^4 w(x,y,t)+\frac{D\psi}{2\pi\omega m}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^4 w(x,y,t)+\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{q}{m}(x,y,t). \tag{3.1}$$

Jeśli na równaniu (3.1) wykona się transformację Laplace'a względem funkcji czasu, to otrzymuje się

$$\frac{D}{m}\nabla^4 w(x,y,p)+\frac{D\psi}{2\pi\omega m}p\nabla^4 w(x,y,p)+p^2 w(x,y,p)= \tag{3.2}$$

$$=\frac{1}{m}q(x,y,p)+\frac{D\psi}{2\pi\omega m}\nabla^4 w(x,y,0)+pw(x,y,0)+\dot{w}(x,y,0).$$

Jeśli następnie funkcje $w(x, y, p)$, $q(x, y, p)$, $w(x, y, 0)$ i $\dot{w}(x, y, 0)$ rozwinie się w szeregi wg spełniających warunek

$$\nabla^4 W_{m,n}(x,y)=\lambda^4_{m,n}W_{m,n}(x,y) \tag{3.3}$$

oraz warunki brzegowe unormowanych i ortogonalnych funkcji własnych $W_{m,n}(x, y)$

$$\begin{aligned} w(x,y,p)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}(p)W_{m,n}(x,y),\\ w(x,y,0)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{m,n}(0)W_{m,n}(x,y),\\ q(x,y,p)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{m,n}(p)W_{m,n}(x,y),\\ \dot{w}(x,y,0)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{w}_{m,n}(0)W_{m,n}(x,y), \end{aligned} \tag{3.4}$$

to podstawiając rozwinięcia (3.4) do równania (3.2) i wykorzystując (3.3) otrzymuje się zależność pomiędzy współczynnikami rozwinięcia funkcji (3.4):

$$A_{m,n}(p)=\frac{\frac{1}{m}q_{m,n}(p)+\left[p+\frac{D\psi}{2\pi\omega m}\lambda^4_{m,n}\right]w_{m,n}(0)+\dot{w}_{m,n}(0)}{p^2+\frac{D\psi}{2\pi\omega m}\lambda^4_{m,n}p+\frac{D}{m}\lambda^4_{m,n}}. \tag{3.5}$$

Przyjmując oznaczenia

$$\frac{D}{m}\lambda^4_{m,n}\equiv\omega^2_{0,m,n},\qquad \frac{D\psi}{2\pi m\omega}\lambda^4_{m,n}\equiv 2\varepsilon_{m,n},\qquad \varepsilon_{m,n}=\omega_{0,m,n}\frac{\psi}{4\pi} \tag{3.6}$$

i przedstawiając mianownik wyrażenia (3.5) w postaci iloczynu

$$p^2+2\varepsilon_{m,n}^2 p+\omega_{0,m,n}^2 \equiv (p-p_{1,m,n})(p-p_{2,m,n}), \tag{3.7}$$

można je przedstawić w postaci sumy

$$A_{m,n}(p) \equiv \frac{C_{1,m,n}}{p-p_{1,m,n}}+\frac{C_{2,m,n}}{p-p_{2,m,n}}. \tag{3.8}$$

We wzorze (3.8)

$$p_{1,m,n}=-\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n}, \qquad p_{2,m,n}=-\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n}. \tag{3.9}$$

Stałe $C$ zaś wynoszą

$$\begin{aligned} C_{1,m,n}&=\frac{1}{2i\omega_{m,n}}\left[\frac{1}{m}q_{m,n}(p)+(\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n})w_{m,n}(0)+\dot{w}_{m,n}(0)\right],\\ C_{2,m,n}&=\frac{1}{2i\omega_{m,n}}\left[\frac{1}{m}q_{m,n}(p)+(\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n})w_{m,n}(0)+\dot{w}_{m,n}(0)\right]; \end{aligned} \tag{3.10}$$

$\omega_{mn}$ jest kolejnym wyrazem szeregu prędkości kątowych własnych drgań tłumionych:

$$\omega_{m,n}=\sqrt{\omega_{0,m,n}^2-\varepsilon_{m,n}^2}=\lambda_{m,n}^4\sqrt{\frac{D}{m}\left[1-\left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2\right]}. \tag{3.11}$$

Jak widać wszystkie wartości $\omega_{mn}$ są rzeczywiste niezależnie od wskaźników, a wyrażenie w nawiasie pod pierwiastkiem dla znanych materiałów konstrukcyjnych bardzo niewiele różni się od jedności.

Na funkcji (3.8) wykonujemy odwrotną transformację skończoną korzystając z pierwszego ze wzorów (3.4):

$$w(x,y,p)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_{1,m,n}}{p-p_{1,m,n}}+\frac{C_{2,m,n}}{p-p_{2,m,n}}\right]W_{m,n}(x,y). \tag{3.12}$$

Zważywszy, że współczynniki rozwinięcia funkcji (3.10) można otrzymać ze wzorów

$$\begin{aligned} A_{m,n}(p)&=\int_0^a\int_0^b w(x,y,p)\,W_{m,n}(x,y)\,dx\,dy,\\ g_{m,n}(p)&=\int_0^a\int_0^b q(x,y,p)\,W_{m,n}(x,y)\,dx\,dy,\\ w_{m,n}(0)&=\int_0^a\int_0^b w(x,y,0)\,W_{m,n}(x,y)\,dx\,dy,\\ \dot{w}(0)&=\int_0^a\int_0^b \dot{w}(x,y,0)\,W_{m,n}(x,y)\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{3.13}$$

można na funkcji (3.12) po podstawieniu stałych $C$ ze wzoru (3.10) wykonać odwrotną transformację Laplace'a:

$$(3.14)\quad w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{m,n}(x,y)\int_0^a\int_0^b\frac{1}{2i\omega_{m,n}}\Big\{\int_0^t\frac{1}{m}q(\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times[e^{(-\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n})(t-\tau)}-e^{(-\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n})(t-\tau)}]\,d\tau+[(\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n})e^{(-\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n})t}-$$

$$-(\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n})e^{(-\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n})t}]\,w(\xi,\eta,0)+$$

$$+[e^{(-\varepsilon_{m,n}-i\omega_{m,n})t}-e^{(-\varepsilon_{m,n}+i\omega_{m,n})t}]\,\dot{w}(\xi,\eta,0)\Big\}W_{m,n}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Przyjmijmy, że drgania płyty są wywołane stałą siłą $P$ przemieszczającą się z prędkością stałą $v$ wzdłuż prostej o równaniu $y=y_0$. Wówczas

$$(3.15)\quad q(\xi,\eta,\tau)=P\delta(x-v\tau,\,y-y_0),$$

gdzie $\delta(x-v\tau,\,y-y_0)$ jest funkcją Diraca.

Korzystając ze wzoru

$$(3.16)\quad \int_0^a\int_0^b W_{m,n}(\xi,\eta)\,q(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta=PW_{m,n}(v\tau,y_0),$$

otrzymujemy rozwiązanie

$$(3.17)\quad w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_{m,n}(x,y)}{\omega_{m,n}}P\int_0^t e^{-\varepsilon_{m,n}(t-\tau)}W_{m,n}(v\tau,y_0)\times$$

$$\times\sin[\omega_{m,n}(t-\tau)]\,d\tau+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_{m,n}(x,y)}{\omega_{m,n}}e^{-\varepsilon_{m,n}t}\int_0^a\int_0^b\{[\varepsilon_{m,n}\sin(\omega_{m,n}t)+$$

$$+\omega_{m,n}\cos(\omega_{m,n}t)]\,w(\xi,\eta,0)+\sin(\omega_{m,n}t)\,\dot{w}(\xi,\eta,0)\}W_{m,n}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Widoczne jest, że rozwiązanie (3.17) jest formalnie identyczne z rozwiązaniem takiego samego zadania, jeśli płyta byłaby zbudowana z lepkosprężystego materiału Voigta. Jednakże ze względu na to, że wszystkie wartości pulsacji są liczbami rzeczywistymi, szereg ten ma postać liniową dla wszystkich wskaźników $m$ i $n$ ($m=1,2,3,\ldots,\infty$; $n=1,2,3,\ldots,\infty$).

## 4. Przykład II

Aby się przekonać, że przyjęcie hipotezy (2.1) nie pociąga za sobą komplikacji rachunkowych również i w przypadku niestosowania transformacji skończonej, rozważmy nieustalone drgania układu o jednym stopniu swobody wymuszone dowolnym obciążeniem $P(t)$:

$$(4.1)\quad \ddot{u}+\frac{k\psi}{2\pi M\omega}\dot{u}+\frac{k}{M}u=\frac{1}{M}P(t).$$

W równaniu (4.1) $k$ oznacza charakterystykę nieważkiej sprężyny, $M$ masę drgającą ruchem o równaniu $u(t)$.

Przyjmując oznaczenia

$$\frac{k}{M}=\omega_0^2, \quad \frac{k\psi}{2\pi M\omega}=2\varepsilon, \quad \varepsilon=\omega_0\frac{\psi}{4\pi}, \tag{4.2}$$

wykonajmy na równaniu (4.1) transformację Laplace'a względem czasu:

$$p^2\bar{u}-pu_0-\dot{u}_0+2\varepsilon p\bar{u}-2\varepsilon u_0+\omega_0^2\bar{u}=\frac{1}{M}\bar{P}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$\bar{u}=\int_0^\infty ue^{-pt}dt, \quad \bar{P}=\int_0^\infty P(t)e^{-pt}dt.$$

Z równania (4.3) otrzymujemy

$$\bar{u}=\frac{\frac{1}{M}\bar{P}+(p+2\varepsilon)u_0+\dot{u}_0}{p^2+2\varepsilon p+\omega_0^2}. \tag{4.4}$$

Jeśli podobnie jak w przykładzie I mianownik wyrażenia (4.4) przedstawimy w postaci iloczynu, a całe wyrażenie w postaci sumy i wykonamy transformację odwrotną, to po uporządkowaniu i niewielkich przekształceniach otrzymamy równanie ruchu masy $M$:

$$u=\frac{1}{M\omega}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}p(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau+$$
$$+e^{-\varepsilon t}\left\{u_0\left[\cos(\omega t)+\frac{\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t)\right]+\dot{u}_0\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right\}. \tag{4.5}$$

We wzorze (4.5) prędkość kątowa drgań tłumionych $\omega$ wynosi

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\varepsilon^2}=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}. \tag{4.6}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem, a zarazem i wartość pierwiastka, tylko bardzo niewiele różni się od jedności. Równanie ruchu (4.5) jest formalnie takie samo jak przy tłumieniu sformułowanym wg hipotezy Voigta.

## Literatura cytowana w tekście

1. Е. С. Сорокин, *Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкции на колебания*, Исследования по динамике сооружений, Стройиздат, Москва 1951.

Резюме

## ГИПОТЕЗА ЗАТУХИВАНИЯ СОРОКИНА В СЛУЧАЕ АПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В работе дается метод обобщения вязкоупругой модели Сорокина и её приложения в исследовании апериодических колебаний сооружений. Даются примеры приложений.



Summary

## SOROKIN DAMPING HYPOTHESIS IN THE CASE OF APERIODIC VIBRATIONS

This paper presents the method of generalization of the viscoelastic model of a Sorokin body and its application to cases of aperiodic vibrations of structures. The method is illustrated by examples.


**POLITECHNIKA WARSZAWSKA**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 maja 1972 r.*