

## ANALIZA STATECZNOŚCI DŹWIGARÓW KRATOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU SIŁ ZACHOWAWCZYCH

JAN MISIAK (RADOM)

Przedmiotem pracy jest analiza stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił zachowawczych. Zbadano w niej wpływ sposobu obciążenia, układu krzyżulców, rodzajów zamocowania, wysokości dźwigara i kierunku przyłożenia obciążenia na ich stateczność. Określenie wpływu powyższych parametrów na wielkość obciążenia krytycznego ma wielkie znaczenie dla prawidłowego projektowania tych dźwigarów. Z przeprowadzonej analizy wynika, że dobierając odpowiednio wspomniane parametry (przy tej samej wielkości obciążenia) można zaprojektować dźwigary znacznie lżejsze.

### WSTĘP

Praca stanowi kontynuację pracy [3], w której dla prostokątnych dźwigarów kratowych przedstawiono analizę stateczności płaskiej postaci zginania. Wykorzystując otrzymane tam wybożeniowe równania równowagi, autor niniejszej pracy postawił sobie za cel zbadanie wpływu takich elementów jak sposób obciążenia, układ krzyżulców, rodzaj zamocowania, wysokość dźwigara i kierunek przyłożenia obciążenia na stateczność tych dźwigarów. Zagadnienia związane z pewnymi problemami stateczności dźwigarów siatkowych były rozważane w pracach [1, 2, 4 i 5]. Ze względu na to, że zostały one omówione we wstępie do pracy [3], w tym opracowaniu nie będą przedmiotem rozważań.

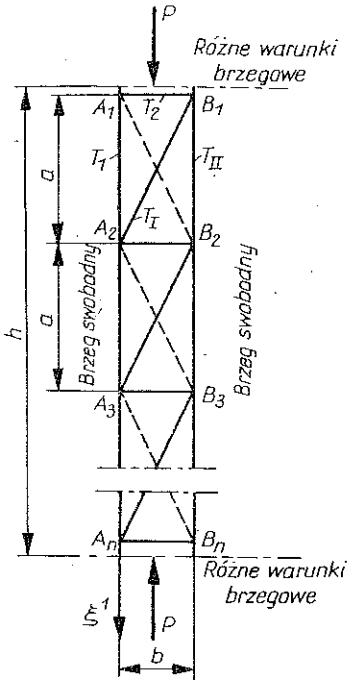
### 1. ANALIZA WPLYWU PRZYŁOŻENIA OBCIĄŻENIA, ZAMOCOWANIA, UKŁADU KRZYŻULCÓW I WYSOKOŚCI DŹWIGARA

Rozważamy regularny, płaski dźwigar prostokątny z pojedynczymi krzyżulcami, przedstawiony na rys. 1. Pionowe pasy, przewiązki i krzyżulce stanowią proste pręty sprężyste połączone w węzłach przegubami płaskimi, tworząc płaską kratownicę. Przekroje wszystkich prętów są jednakowe, a ich główne osie bezwładności są odpowiednio prostopadłe i równoległe do płaszczyzny dźwigara. Dźwigar ściskany jest siłami zachowawczymi  $P$ , leżącymi w jego płaszczyźnie.

Zajmiemy się analizą stateczności tych dźwigarów. Rozważań naszych nie ograniczymy tylko do określenia obciążenia krytycznego, ale ustalimy wpływ poszczególnych parametrów na jego wartość.

Obliczenie krytycznej wartości zewnętrznego obciążenia  $P$  dokonuje się za pomocą metody numerycznej. Dla przykładów zestawionych w tablicach 1–6 obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prętów o przekrojach osiowosymetrycznych o wymiarach gabarytowych dźwigara:  $a=1$  m,  $b=0,5$  m.

W tabelicy 1 zestawiono wartości sił krytycznych dla dźwigarów o wysokości  $h=4a$ , zamocowanych sztywno na krawędzi dolnej i swobodnie na krawędzi górnej. Przy tej samej wartości obciążenia bardziej korzystny jest układ krzyżulców, przedstawiony w wierszu 2 (najmniejsza siła krytyczna jest około 10% wyższa) w porównaniu z układem przedstawionym w wierszu 1. Natomiast obciążenie rozłożone równomiernie do obu węzłów (wiersz 3) daje wyniki pośrednie.



Rys. 1

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabelicy 2 można stwierdzić, że sposób zamocowania dźwigarów ma decydujący wpływ na wartość siły krytycznej. Najbardziej podatne na utratę stateczności są dźwigary zamieszczone w wierszu 1, a najmniej podatne są dźwigary zamieszczone w wierszu 4. Dla wszystkich przypadków zamocowania potwierdza się wniosek, że w miarę wzrostu wysokości dźwigara siła krytyczna maleje.

Wszystkim zamieszczonym wartościom sił krytycznych odpowiadają postacie wybočenja dźwigarów. Przykładowo w tabelicy 1 (kolumna d) zamieszczono postacie wybočenja dźwigarów odpowiadających najmniejszym siłom krytycznym, jak również w tabelicy 2 (kolumna d) przedstawiono postacie wybočenja dla dźwigarów o wysokości  $h=3a$ .

Zamieszczone w tabelicy 1 wartości sił wewnętrznych w zagadnieniu tarczy (kolumna b) zostały każdorazowo uwzględnione w operatorach wyboczeńiowych równań równowagi pracy [3] — przy rozwiązywaniu poszczególnych dźwigarów. Wartości sił wewnętrznych dźwigarów z tabelicy 2 są równe zamieszczonym wyrażeniom w tabelicy 1 (wiersz 3, kolumna b).

Podane w tabelicach 1 – 6 wartości sił krytycznych zostały wyrażone przez sztywność zginania pasa pionowego  $a_1$  [kGm<sup>2</sup>], leżącego na linii parametrycznej  $\xi^1$ .

## 2. ANALIZA WPŁYWU KIERUNKU PRZYŁOŻENIA OBCIĄŻENIA

Określenie wpływu kierunku przyłożenia obciążenia uchwycono na przykładzie dźwigara o wysokości  $h=4a=4m$ , przedstawionego na rys. 2. Kierunek przyłożenia zachowawczego obciążenia  $P$  określa każdorazowo kąt  $\varphi$ , który przyjmuje wartości zawarte w przedziale  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

W tabelicy 3 zestawiono wartości najmniejszych sił krytycznych odpowiadających poszczególnym kątom  $\varphi$ . Ponadto zależność tę przedstawiono na wykresie  $P_{kr} = f(\varphi)$  (rys. 3).

Tablica 1

Kol. Wiersz	a	b	c	d
	Rodzaj obciążenia i układ krzyżulców	Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy	Siły krytyczne $P_{kr}$ [kG]	Postać wyboczenia dźwigara przy działaniu najmniejszej siły krytycznej
1		$T_1(\xi^1) = 0$ $T_2(\xi^1) = 0$ $T_{I}(\xi^1) = 0$ $T_{II}(\xi^1) = -P$	$0,424986 a_1$ $3,839670 a_1$ $10,047796 a_1$ $17,676213 a_1$	
2		$T_1(\xi^1) = -P$ $T_2(\xi^1) = 0$ $T_{I}(\xi^1) = 0$ $T_{II}(\xi^1) = 0$	$0,480889 a_1$ $4,718151 a_1$ $10,770382 a_1$ $19,059379 a_1$	
3		$T_1(\xi^1) = -\frac{P}{2}$ $T_2(\xi^1) = 0$ $T_{I}(\xi^1) = 0$ $T_{II}(\xi^1) = -\frac{P}{2}$	$0,429896 a_1$ $4,218360 a_1$ $13,452412 a_1$ $26,832140 a_1$	

Tablica 2

Kol. Wiersz	a	b	c	d
	Rodzaj zamocowania dźwigara	Wysokość dźwigara $h$ [m]	Najmniejsza siła krytyczna $P_{kr}$ [kG]	Postać wyboczenia dźwigara o wysokości $h=3a=3m$
1		2	1,834807 $a_1$	
		3	0,774351 $a_1$	
		4	0,429896 $a_1$	
2		3	3,271703 $a_1$	
		4	1,781415 $a_1$	
3		3	7,194976 $a_1$	
		4	3,834783 $a_1$	
4		3	16,603179 $a_1$	
		4	8,161909 $a_1$	

Jak widać z wykresu siły krytyczne odpowiadające stateczności płaskiej postaci zginania (wiersze 7 i 19) są około 70% wyższe od sił krytycznych, odpowiadających ścisaniu dźwigara (wiersz 1 i 25). Obciążenie krytyczne odpowiadające

równoczesnemu ścisaniu i zginaniu dźwigara

$\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi\right)$  jest zawarte między wymienionymi uprzednio. Natomiast obciążenie krytyczne odpowiadające równoczesnemu rozciąganiu

i zginaniu  $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi\right)$ , powodujące

utrata stateczności płaskiej postaci zginania jest znacznie wyższe od poprzednio wymienionych sił krytycznych. Dla wybranych dźwigarów w kolumnie d (tablica 3) przedstawiono ich postacie wybočenja.

Wartości sił wewnętrznych w zagadnieniu tarczy omawianych dźwigarów mające następującą postać:

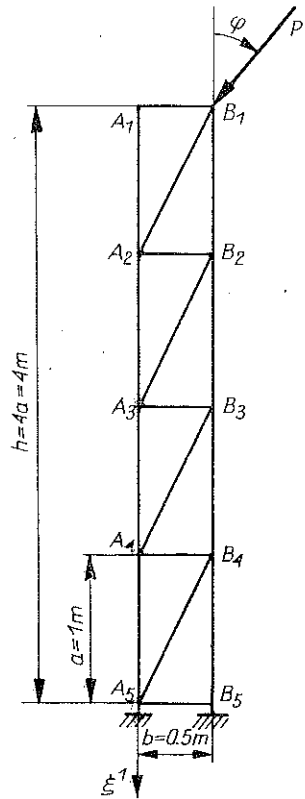
$$T_{I(\xi^1+1)} = -P \frac{a}{b} \xi^1 \sin \varphi,$$

$$T_{2(\xi^1+1)} = P \sin \varphi,$$

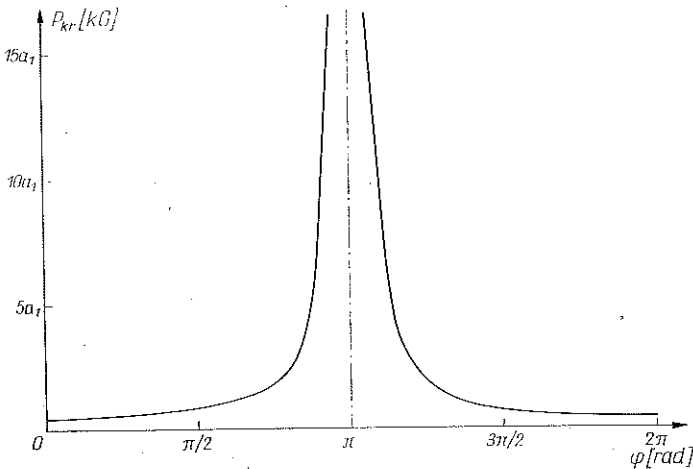
$$T_{I(\xi^1)} = -\frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \sin \varphi,$$

$$T_{II(\xi^1)} = P \frac{a}{b} \xi^1 \sin \varphi - P \cos \varphi$$

zostały uwzględnione w operatorach wyboczeńowych równań równowagi.

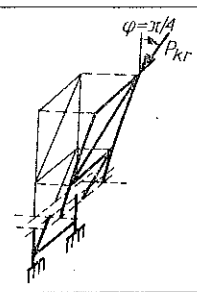
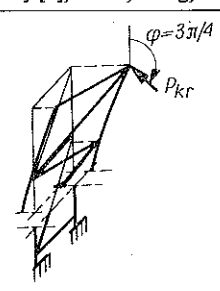
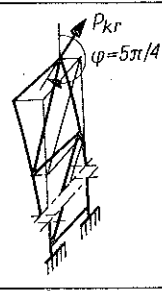
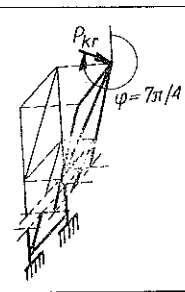


Rys. 2

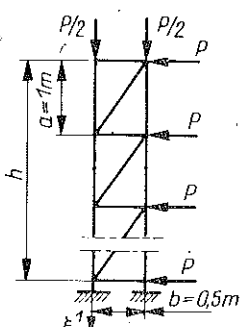
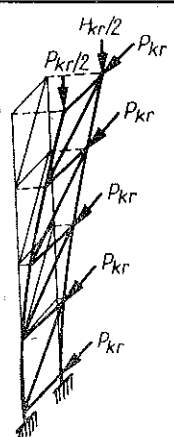
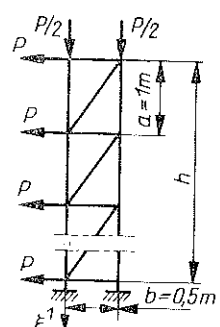
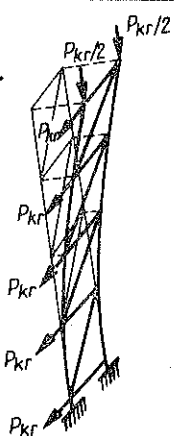
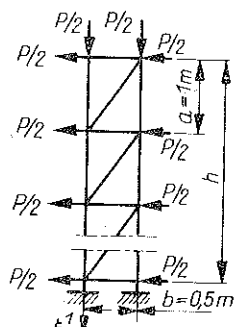
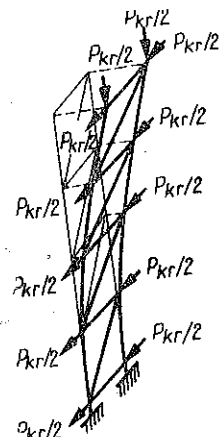


Rys. 3

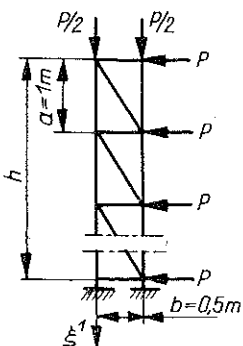
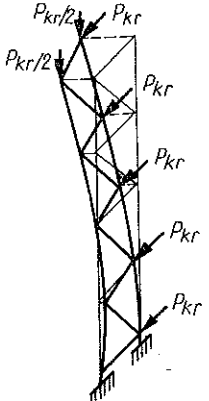
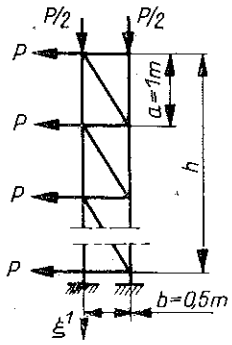
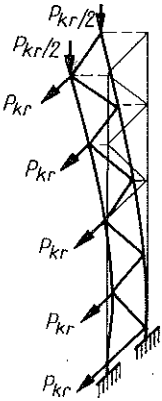
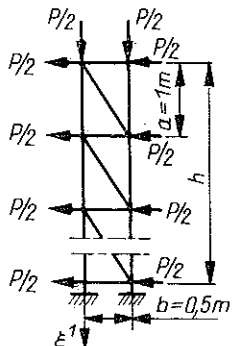
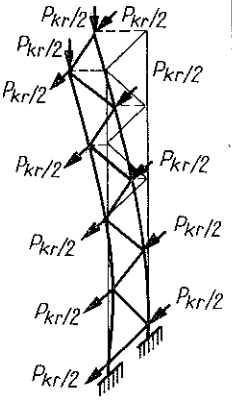
Tablica 3

Wiersz \ Kol.	a	b	c	d
	Wartość kąta $\varphi$ [rad]	Wartość siły krytycznej $P_{kr}$ [kG]	Rodzaj obciążenia	Postacie wyboczenia wybranych dźwigarów
1	0	0,424986 $a_1$	ściskanie	postać wybocz. zamieszczono w tab. 1, kol. d, wiersz 1.
2	$\frac{\pi}{12}$	0,438177 $a_1$	ściskanie ze zginaniem	
3	$\frac{\pi}{6}$	0,466496 $a_1$		
4	$\frac{\pi}{4}$	0,514034 $a_1$		
5	$\frac{\pi}{3}$	0,581149 $a_1$		
6	$\frac{5}{12} \pi$	0,673140 $a_1$		
7	$\frac{\pi}{2}$	0,780343 $a_1$	zginanie	postać wybocz. zamieszcz. w pracy [3], tab. 2, kol. g, wiersz 1
8	$\frac{7}{12} \pi$	1,015324 $a_1$	zginanie z rozciąganiem	
9	$\frac{2}{3} \pi$	1,285432 $a_1$		
10	$\frac{3}{4} \pi$	1,743733 $a_1$		
11	$\frac{5}{6} \pi$	3,185237 $a_1$		
12	$\frac{11}{12} \pi$	11,728234 $a_1$		
13	$\pi$	$\infty$	rozciąganie	—
14	$\frac{13}{12} \pi$	12,474310 $a_1$	zginanie z rozciąganiem	
15	$\frac{7}{6} \pi$	3,390922 $a_1$		
16	$\frac{5}{4} \pi$	1,851621 $a_1$		
17	$\frac{4}{3} \pi$	1,225908 $a_1$		
18	$\frac{17}{12} \pi$	0,909256 $a_1$		
19	$\frac{3}{2} \pi$	0,706502 $a_1$	zginanie	postać wybocz. zamieszcz. w pracy [3], tab. 3, kol. g, wiersz 2.
20	$\frac{19}{12} \pi$	0,610238 $a_1$	ściskanie ze zginaniem	
21	$\frac{10}{6} \pi$	0,526472 $a_1$		
22	$\frac{7}{4} \pi$	0,473903 $a_1$		
23	$\frac{11}{6} \pi$	0,421537 $a_1$		
24	$\frac{23}{12} \pi$	0,397682 $a_1$		
25	$2\pi$		jak w wierszu 1	

Tablica 4

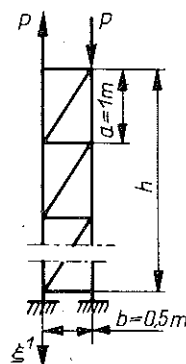
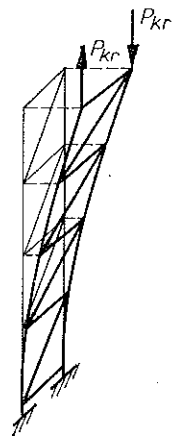
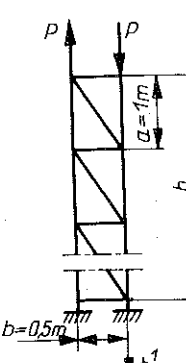
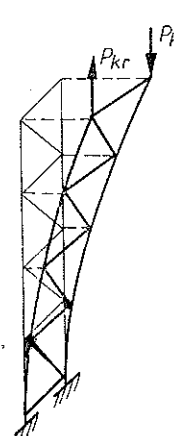
Kol. Wiersz	a	b	c	d
	Rodzaj obciążenia	Wysokość dźwigara $h$ [m]	Najmniejsza siła krytyczna $P_{kr}$ [kG]	Postać wyoboczenia dźwigara o wysokości $h=4a=4$ m
1		2	1,631284 $a_1$	
		3	0,617365 $a_1$	
		4	0,298676 $a_1$	
2		2	1,694942 $a_1$	
		3	0,642005 $a_1$	
		4	0,317166 $a_1$	
3		2	1,670140 $a_1$	
		3	0,627930 $a_1$	
		4	0,309134 $a_1$	

Tablica 5

Kol. Wiersz	a	b	c	d
	Rodzaj obciążenia	Wysokość dźwigara $h$ [m]	Najmniejsza siła krytyczna $P_{kr}$ [kG]	Postać wyboczenia dźwigara o wysokości $h=4a=4$ m
1		2	2,209851 $a_1$	
		3	0,895700 $a_1$	
		4	0,434534 $a_1$	
2		2	5,171669 $a_1$	
		3	2,207133 $a_1$	
		4	0,645399 $a_1$	
3		2	3,441705 $a_1$	
		3	1,195890 $a_1$	
		4	0,437071 $a_1$	



Tablica 6

Kol. Wiersz	a	b	c		d
	Rodzaj obciążenia i układ krzyżulców	Siły wewn. w zagadn. tarczy	Wysokość dźwigara $h$ [m]	Najmniejsza siła krytyczna $P_{kr}$ [kG]	Postać wybożenia dźwigara o wysok. $h=4a=4$ m
1		$T_1(\xi^1) = P$ $T_2(\xi^1) = 0$ $T_I(\xi^1) = 0$ $T_{II}(\xi^1) = -P$	2	4,376978 $a_1$	
			3	2,844177 $a_1$	
			4	2,114491 $a_1$	
			2	4,470382 $a_1$	
2		$T_1(\xi^1) = -P$ $T_2(\xi^1) = 0$ $T_I(\xi^1) = 0$ $T_{II}(\xi^1) = P$	2	4,470382 $a_1$	
			3	2,889055 $a_1$	
			4	2,143568 $a_1$	

### 3. DŹWIGARY ŚCISKANE OBCIĄŻONE POPRZECZNIE SIŁAMI SKUPIONYMI

Wyniki uzyskane w p. 1 porównamy teraz z bardziej ogólnym przypadkiem, gdy dźwigary ściskane obciążane są poprzecznie układem sił, powodujących utratę stateczności płaskiej postaci zginania. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dźwigarów zamieszczonych w tablicach 4 i 5. Porównując wartości sił krytycznych zamieszczonych w tych tablicach z wartościami sił krytycznych zamieszczonymi w tablicy 2 (wiersz 1) można stwierdzić, że siły krytyczne z tablicy 4 są około 25% niższe, a z tablicy 5 nieco wyższe. Ponadto potwierdziły się poprzednio wysunięte wnioski, że układ krzyżulców w dźwigarach z tablicy 5 jest bardziej korzystny niż w tablicy 4, jak również wraz ze wzrostem długości dźwigara siła krytyczna maleje.

Postacie wybočenja dźwigarów o wysokości  $h=4$  m przedstawiono w kolumnie *d*.

Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy rozpatrywanych dźwigarów są algebraiczną sumą sił z tablicy 1 (wiersz 3) i odpowiednich z tablic 2 i 3 zamieszczonych w pracy [3].

Na podstawie wyników zestawionych w tablicach 1–5 można stwierdzić, że sposób obciążenia, układ krzyżulców, rodzaj zamocowania, wysokość dźwigara, kierunek przyłożenia obciążenia i możliwość wystąpienia obciążeń poprzecznych — ma istotny wpływ na wartość siły krytycznej dźwigarów będących przedmiotem analizy. Dobierając prawidłowo powyższe parametry przy projektowaniu tych dźwigarów na odpowiednią wartość siły krytycznej otrzymuje się je znacznie lżejsze.

### 4. DŹWIGARY OBCIĄŻONE MOMENTAMI (PARAMI SIŁ)

Znając rozwiązania stateczności dźwigara przy jego ściskaniu ( $P_{kr}=0,424986 a_1$ ) i rozciąganiu ( $P_{kr}=\infty$ ) uzyskane w p. 1, rozpatrzmy przypadek równoczesnego ściskania z rozciąganiem. Będzie to przypadek obciążenia skupionym momentem  $M=Pb$ .

Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 6. Wartości sił krytycznych dla dźwigarów o wysokości  $h=4a$  można bezpośrednio porównać z wynikami przedstawionymi w tablicy 1. Usztywnienie dźwigara siłą rozciągającą  $P$  powoduje dla obu układów krzyżulców podwyższenie siły krytycznej: pięciokrotnie dla danych z wiersza 1 (tablica 6) oraz cztero i półkrotnie danych z wiersza 2 (tablica 6). Układ krzyżulców stosowany w wierszu 2 (tablica 6) ma również bardziej korzystny wpływ na działanie rozpatrywanego obciążenia.

Utratę stateczności rozpatrywanych dźwigarów zilustrowano w kolumnie *d* (tablica 6).

### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Łądowej, 19, 1, 1973.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., 23, 4, 1971.
3. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych*, Rozpr. Inżyn., 23, 1, 1975.

4. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
5. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasach równoległych*, Rozpr. Inżyn., 21, 1, 1973.

## Резюме

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРМ ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВИЮ  
КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Предметом работы является анализ устойчивости ферм подвергнутых действию консервативных сил. В работе исследовано влияние способа нагрузки, системы диагоналей, родов закрепления, высоты фермы и направления приложения нагрузки на их устойчивость. Определение влияния вышеперечисленных параметров на величину критической нагрузки имеет большое значение для правильного проектирования этих ферм. Из проведенного анализа следует, что подбирая соответственно упомянутые параметры (при этой же самой величине нагрузки) можно проектировать фермы значительно более легкие.

## SUMMARY

ANALYSIS OF STABILITY OF LATTICE GIRDERS UNDER ACTION  
OF CONSERVATIVES FORCES

A subject of this paper is the analysis of stability of lattice girders under action of conservative forces. The influence of a manner of loading, system of cross braces, kind of support, height of girder and direction of the application of load on the stability of structures is examined. Determination of the influence of above parameters on the value of critical load has great importance in correct design of these structures. From the analysis performed it results that by proper choice of the parameters mentioned (at the same value of load) it is possible to design the girder significantly lighter.

INSTYTUT POJAZDÓW  
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, OŚRODEK W RADOMIU

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1974 r.*