

ZGNIATANIE PLASTYCZNEGO WALCA PŁASKIMI, GŁADKIMI STEMPLAMI

HENRYK PETRYK (WARSZAWA)

Do analizy procesu zgniatania plastycznego walca płaskimi stemplami w warunkach płaskiej deformacji zastosowano metodę linii poślizgów. Przedstawione rozwiązania obejmują wszystkie stadia procesu symetrycznego zgniatania walca dowolną liczbą stempli. Przedyskutowano zagadnienie kompletności rozwiązań oraz podano wykresy nacisków dla trzech i czterech stempli. Na przykładzie zgniatania trzema stemplami zilustrowano wpływ asymetrii obciążenia na postać siatki linii poślizgów.

WSTĘP

Zagadnienie zgniatania plastycznego walca jest ściśle związane z takimi technologicznymi procesami obróbki plastycznej, jak kucie wałów. Jeżeli siły tarcia mają pomijalnie małą wartość, to na przebieg procesu wpływa jedynie składowa prędkości normalna do powierzchni narzędzia. W takich warunkach kucie walca między dwoma kowadłami kątowymi o kącie rozwarcia 90° oraz między kowadłem kątowym o kącie rozwarcia 60° i płaskim da taki sam efekt, jak jego symetryczne zgniatanie odpowiednio czterema i trzema płaskimi, idealnie gładkimi stemplami.

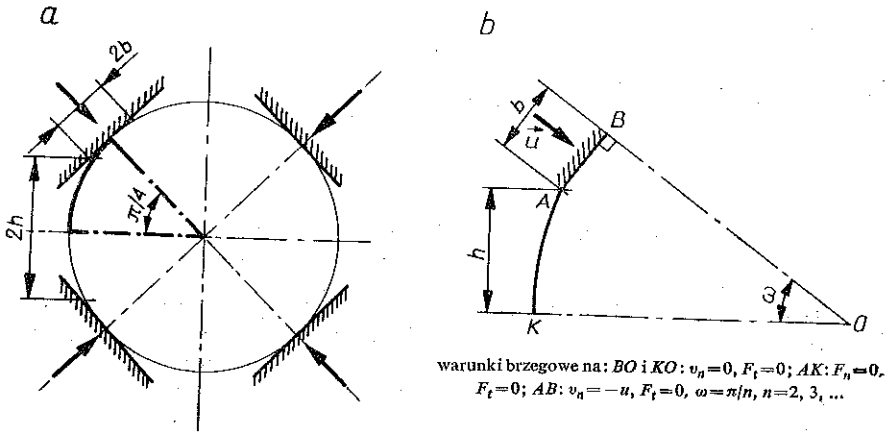
Jeżeli długość obciążonej strefy walca jest dostatecznie duża, to uzyskany stan odkształcenia zasadniczo jest płaski. Przyjmując sztywno-plastyczny model materiału bez wzmocnienia i zaniedbując efekty bezwładnościowe, można do analizy stanu naprężenia i odkształcenia zastosować metodę linii poślizgów. Opis metody linii poślizgów oraz szczegóły dotyczące jej stosowania można znaleźć w monografiach [8, 16 i 17].

Analiza zawarta w następnych rozdziałach odnosi się do przypadków, gdy kontur przekroju poprzecznego wału jest dowolną zamkniętą krzywą wypukłą posiadającą n ($n=2, 3, \dots$) osi symetrii. Podane rozwiązania obejmują praktycznie wszystkie stadia procesu deformacji wału poddanego symetrycznemu zgniataniu. W pracy przyjęto, że materiał ma początkowo kształt walca obrotowego.

1. POSTAĆ SIATKI LINII POŚLIZGÓW DLA SYMETRYCZNEGO ZGNIATANIA WALCA

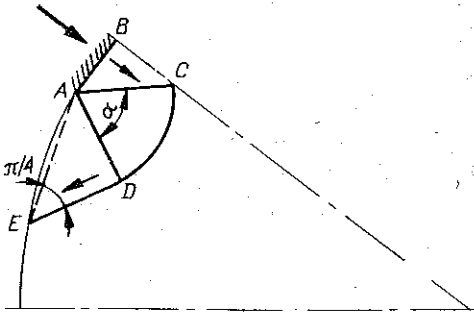
Na rys. 1a naszkicowany jest przykładowy schemat symetrycznego zgniatania walca czterema stemplami w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca. W ogólnym przypadku przekrój poprzeczny układu posiada n osi symetrii, dzielących go na $2n$

równych wycinków. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać jeden taki wycinek, formułując na jego granicach odpowiednie warunki brzegowe (rys. 1b).



Rys. 1

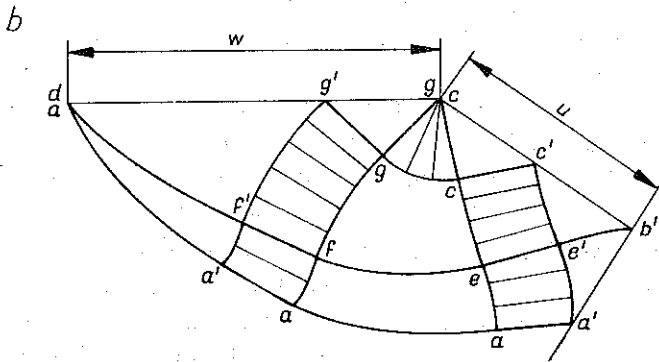
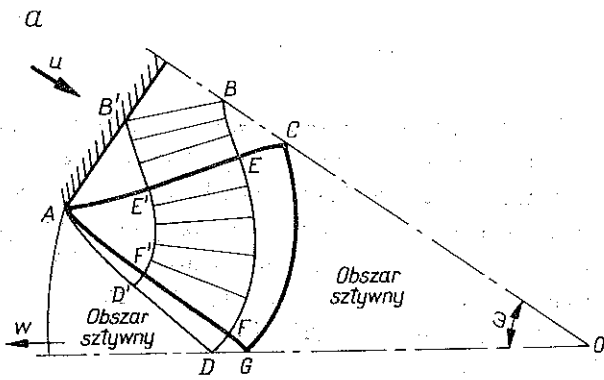
Wektory sił powierzchniowych oraz prędkości oznaczono odpowiednio przez F i v , indeksy n oraz t oznaczają odpowiednio składową normalną (zewnątrzną) oraz styczną do brzegu. Zakładamy, że środek O układu pozostaje w spoczynku, a stemple przemieszczają się promieniowo z prędkością u . Jako miarę stopnia zaawansowania procesu wygodnie jest przyjąć parameter $\eta = b/h$, gdzie b oznacza połowę chwilowej szerokości powierzchni styku materiału ze stemplem, a h połowę szerokości odcinka powierzchni swobodnej (rys. 1a, b).



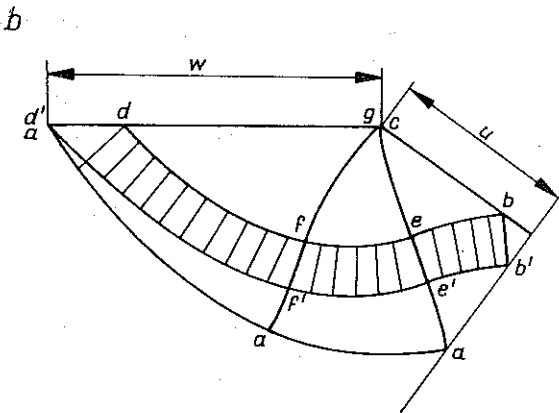
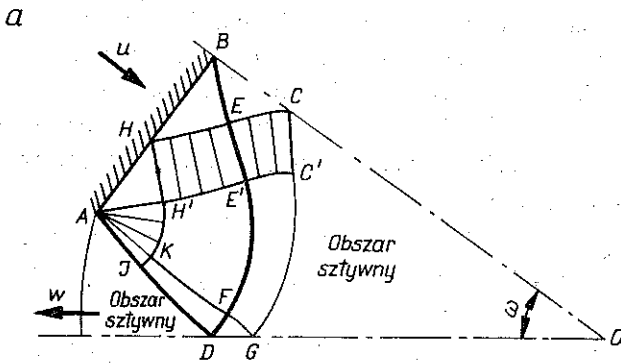
Rys. 2

Postać siatki linii poślizgów i hodografu dla $\eta \leq 1$ podał JOHNSON [13]. Z jego rozwiązania wynika, że materiał leżący pod powierzchnią swobodną nie jest uplastyczniony. Strefy odkształceń plastycznych łączą się ze

sobą wewnątrz przekroju wału, centralny obszar sztywny jest nieruchomy, a zewnętrzne obszary sztywne wypychane są w kierunkach promieniowych. Niewątpliwie dla dostatecznie małych wartości η , np. $\eta < \eta_1$, taki schemat odkształcania nie będzie poprawny, gdyż nastąpi wówczas lokalne wypływanie materiału w pobliżu miejsc przyłożenia nacisku [13]. Ten etap deformacji przebiegał będzie analogicznie do deformacji przy wciskaniu gładkiego płaskiego stempla w ośrodek ograniczony wypukłą powierzchnią przy płaskim stanie odkształcania. Niestety ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia nie jest dotychczas znane. Rozwiązania przy założeniu stanu granicznego pod powierzchnią swobodną nie spełniają warunku dodatniości mocy dysypowanej [15].



Rys. 3



Rys. 4

Z kolei usunięcie tego założenia znacznie komplikuje problem ze względu na nieznane położenie i kształt sztywno-plastycznej granicy. Rozwiązanie podane na rys. 2 wynika z przyjęcia równomiernego rozkładu nacisków na powierzchni stempla. Stanowi ono jedynie kinematycznie dopuszczalne rozwiązanie przybliżone, gdyż w otoczeniu punktu E materiał z pewnością będzie obciążony powyżej granicy plastyczności [10]. Cechuje się ono natomiast dużą prostotą. Deformacja zachodzi według klasycznego schematu Prandtla: obszary ADE i ABC przemieszczają się jako bryły sztywne, a linie poślizgu AC i CDE są liniami nieciągłości prędkości. Wartość nacisku wyraża się wzorem $p=2k(1+\alpha)$, gdzie k oznacza granicę plastyczności na ścinanie, a α jest kątem wachlarza CAD . Wartość α zależy od parametrów geometrycznych aktualnej konfiguracji, która nie jest jednakże znana, gdyż wynika z przebiegu deformacji w chwilach poprzednich. Pomijając wpływ wybrzuszenia się powierzchni walca można wyznaczyć kąt α ze wzoru $\alpha=\pi/2-2 \arcsin b/R$, gdzie R oznacza promień walca. Dla dostatecznie małych wartości η można się spodziewać, że użyte rozwiązanie jest bliskie rozwiązaniu kompletnemu.

Przejdziemy z kolei do przedstawienia postaci rozwiązań dla $\eta \geq 1$.

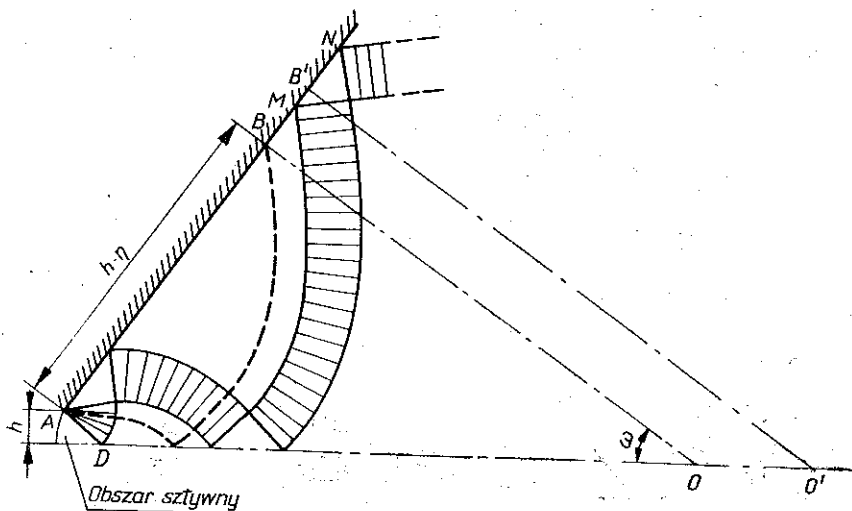
Ogólną postać siatki linii poślizgów oraz hodografu dla przedziałów $1 \leq \eta \leq \sqrt{2}$ i $\sqrt{2} \leq \eta \leq 2$ ukazują odpowiednio rys. 3 i rys. 4. Struktura rozwiązań jest analogiczna do struktury w zagadnieniu wyciskania przez gładką prostokątną matrycę przy redukcji pomiędzy 50% i 66²/₃% [7 i 2]. Jedyną istotną różnicą polega na zmianie kąta $E'AF$ wachlarzy: dla zagadnienia wyciskania kąt ten był równy $\pi/2$, podczas gdy w tym przypadku wynosi $\pi/2-\omega$. Różnica ta nie wpływa jednak na postać wzajemnych powiązań pomiędzy rozwiązaniami z rys. 3 i rys. 4, a tym samym wszystkie zależności algebraiczne wyprowadzone przez COLLINSA [2] pozostają bez zmian. W szczególności można wykazać, że jedno z tych rozwiązań przechodzi w drugie z chwilą, gdy η osiąga wartość $\sqrt{2}$.

Konkretną postać rozwiązań dla określonej konfiguracji można najwygodniej znaleźć stosując technikę macierzową opracowaną przez COLLINSA [3 i 4]. Nie zachodzi potrzeba ponownego wyprowadzania równań macierzowych, gdyż związki (24) i (30) z pracy [2] są nadal spełnione. Należy jednak uwzględnić fakt, że operatory zaopatrzone w indeks "0" odnoszą się w tym przypadku do kąta $\pi/2-\omega$, a nie do $\pi/2$ jak w pracy [2]. W granicznych przypadkach $\eta=1$ i $\eta=2$ charakterystyki AD (rys. 3, 4) będą liniami prostymi, a rozwiązania osiągną odpowiednio graniczną postać wspomnianego już rozwiązania JOHNSONA [13] i rozwiązania obejmującego przedział $\eta \geq 2$, opisanego poniżej.

Bliska analogia między rozwiązaniami dla procesu symetrycznego zgniatania walca płaskimi, gładkimi stemplami i dla procesu wyciskania przez prostokątną matrycę (przy płaskiej deformacji) nie wystąpiła przypadkowo, lecz wynika z nałożenia bardzo zbliżonych warunków brzegowych. Gdy przyjmiemy $\omega=0$ oraz nałożymy translację $-u$ (rys. 1b), to otrzymamy dokładnie warunki brzegowe dla połowy układu przy wyciskaniu przez gładką prostokątną matrycę. Zmiana kąta ω dokonana np. przez sztywny obrót linii ABO dookoła punktu A (rys. 1b) wpływa jedynie

na wielkość osobliwości rozwiązania w punkcie A . Można się z góry spodziewać, że niezależnie od chwilowej wartości η struktura rozwiązań pozostanie przy tym niezmienną.

Schemat rozwiązania dla przedziału $\eta \geq 2$ przedstawiony jest na rys. 5. W tym przypadku oprócz strukturalnego podobieństwa do rozwiązania dla wyciskania przez prostokątną matrycę [12] siatka linii poślizgów ma dokładnie taką samą postać jak dla zagadnienia przeciągania (bądź wyciskania) przez gładką klinową matrycę o kącie rozwarcia $\pi - 2\omega$ z odpowiednio dużą redukcją przekroju [8 i 16]. Ta ostatnia analogia nie występuje jednak dla wszystkich wartości η , np. nie zachodzi dla $1 < \eta < 2$. Istnieje natomiast dla $\eta_1 \leq \eta \leq 1$ [13].



Rys. 5

Siatka linii poślizgów z rys. 5 jest zgodna z warunkami dla prędkości wówczas, gdy punkt B znajduje się poza odcinkami MN, \dots równomiernie rozłożonego nacisku (por. [8], str. 170) albo dokładnie w środku któregoś z tych odcinków. W przypadku przeciwnym spełnienie warunków dla prędkości wymaga wprowadzenia krzywoliniowych wyjściowych charakterystyk AD ; podobnie jak dla przedziału $1 < \eta < 2$. Ze względu na bardzo skomplikowaną postać takich rozwiązań oraz ich niewielkie znaczenie praktyczne poprzestaniemy jedynie na zasygnalizowaniu takiej możliwości.

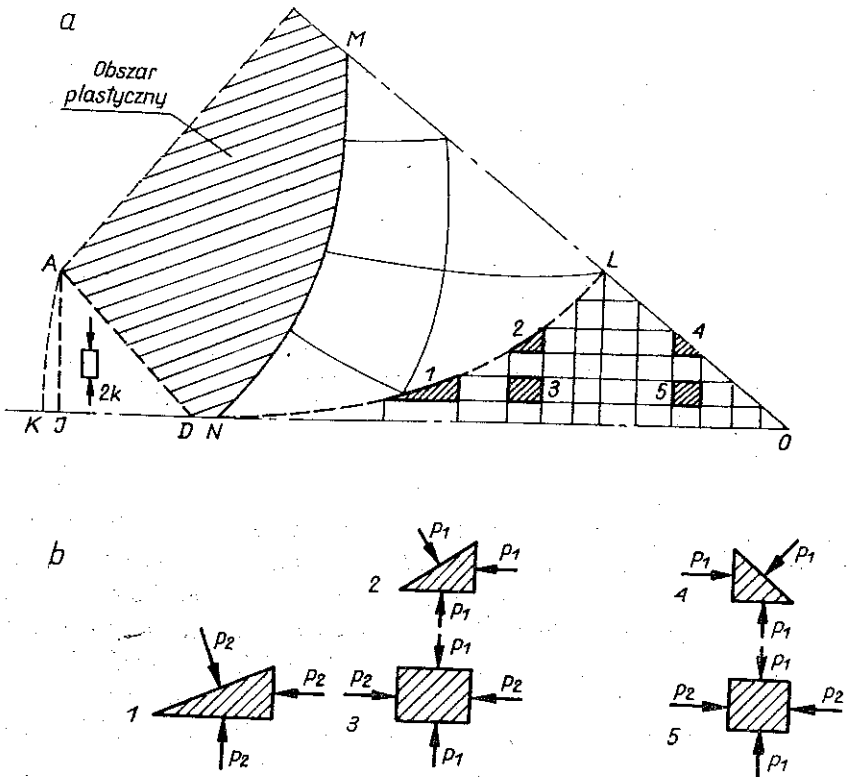
Wszystkie podane powyżej rozwiązania w przedziałach ich stosowalności są kinematycznie dopuszczalne⁽¹⁾; zachodzi pytanie, czy są one równocześnie statycznie dopuszczalne, tj. czy stanowią rozwiązania kompletne. Aby udzielić odpowiedzi na to pytanie należy zbadać możliwość zbudowania statycznie dopuszczalnych przedłużeń pól naprężeń w obszary sztywne. Następna część pracy dotyczy tego zagadnienia.

⁽¹⁾ Warunek dodatniości mocy dysypowanej sprawdzono stosując metodę GREENA [6] lub FORDA [5] w odniesieniu do ogólnych schematów siatek linii poślizgów i odpowiednich hodografów.

2. STATYCZNIE DOPUSZCZALNE PRZEDŁUŻENIA PÓL NAPRĘŻEŃ W OBSZARY SZTYWNE

We wszystkich rozwiązaniach dla przedziału $\eta_1 < \eta < \infty$ występuje jeden centralny oraz n zewnętrznych obszarów sztywnych. Poniżej przedstawiono sposób konstrukcji statycznie dopuszczalnego przedłużenia pola naprężeń w centralny obszar sztywny. Wykorzystano w tym celu metodę podaną przez BISHOPA [1].

Rozpatrując ponownie jeden wycinek przekroju (rys. 1b) zauważmy, że w obszarze tego wycinka sztywno-plastyczną granicę we wszystkich omawianych rozwiązaniach stanowi jedna linia poślizgu, podchodząca do ograniczających wycinek osi symetrii pod kątem $\pi/4$ i nie posiadająca punktów przegięcia. Zakładając, że przyległy do tej linii obszar znajduje się w stanie granicznym, można wyznaczyć w nim stan naprężenia rozwiązując zagadnienie mieszane, określone danymi na charakterystyce MN i osi symetrii np. MO (rys. 6a). Tak otrzymane przedłużenie



Rys. 6

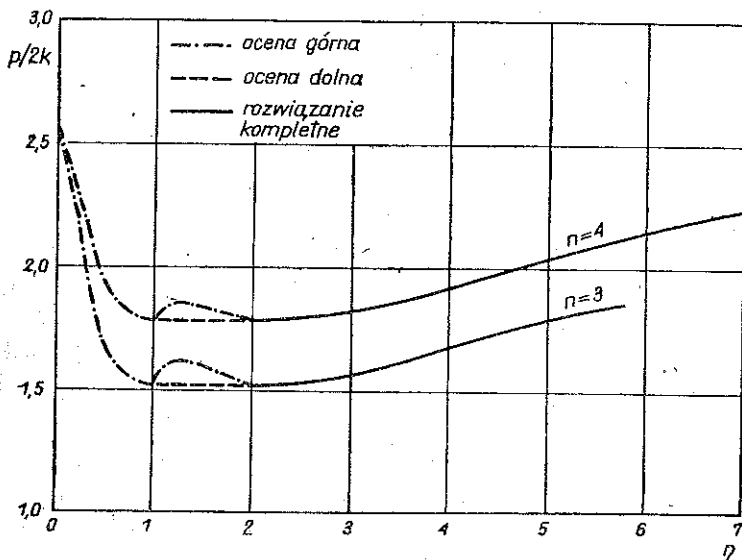
obcinamy trajektorią naprężeń głównych przechodzącą przez punkt N . Pozostałą centralną część wycinka dzielimy na małe prostokątne i trójkątne elementy prowadząc serię prostych równoległych i prostopadłych do osi ON . Zakładamy, że elementy trójkątne obciążone są ciśnieniem hydrostatycznym, a elementy prostokątne ściskane są dwuosiowo w sposób schematycznie pokazany na rys. 6b. Zagęszczając prostokątną siatkę otrzymujemy w granicy ciągłe pole naprężeń, spełniające zarówno

warunki równowagi wewnętrznej, jak i warunki równowagi na brzegach wycinka (linie OM i ON nie są liniami nieciągłości naprężeń). Aby w tak zbudowanym polu warunek plastyczności nie został nigdzie przekroczony potrzeba i wystarcza, żeby maksymalna różnica ciśnienia hydrostatycznego wzdłuż trajektorii NL była nie większa od $2k$. W sposób oczywisty warunek ten będzie spełniony, gdy $\pi/2 - \omega \leq 1$, tj. dla $n \leq 5$. Dla $n \geq 6$ pewności tej w ogólnym przypadku nie ma; wydaje się jednak mało prawdopodobne, aby ten warunek był kiedykolwiek niespełniony. Oczywiście dla każdego konkretnego rozwiązania można przeprowadzić weryfikację bezpośrednio.

Pozostaje jeszcze do rozpatrzenia możliwość skonstruowania statycznie dopuszczalnego przedłużenia pola naprężeń w zewnętrzne obszary sztywne. Jeżeli zewnętrzny obszar sztywny jest ograniczony prostymi odcinkami linii poślizgu, to łatwo zbudować takie przedłużenie przyjmując, że do odcinka AJ (rys. 6a) materiał jest ściskany jednoosiowo naprężeniem $-2k$, a na zewnątrz tego odcinka materiał jest wolny od naprężeń. Tym samym rozwiązanie dla przedziału $\eta \geq 2$ (rys. 5) w zakresie swojej stosowalności jest rozwiązaniem kompletnym, podobnie jak rozwiązanie dla $\eta = 1$ (przynajmniej dla $n \leq 5$). Niestety w chwili obecnej nie jest znany sposób konstruowania statycznie dopuszczalnego przedłużenia pola naprężeń w zewnętrzne obszary sztywne ograniczone krzywoliniowymi charakterystykami. Tak więc pozostałe rozwiązania należy traktować jako jedynie kinematycznie dopuszczalne, chociaż wydaje się, że przynajmniej dla niektórych przedziałów parametru η odpowiednie przedłużenie pola naprężeń powinno istnieć.

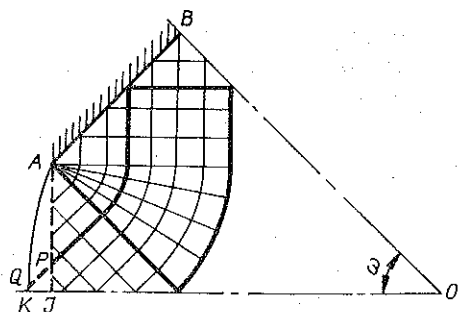
3. WYNIKI OBLICZEŃ

Rys. 7 przedstawia wykres bezwymiarowego średniego nacisku na powierzchnie stempli $p/2k$ w zależności od parametru η przy symetrycznym zgniataniu walca trzema oraz czterema stemplami.



Rys. 7

Do wyznaczenia wykresu w przedziałach $\eta_1 \leq \eta \leq 1$ i $\eta \geq 2$ ($\eta_1 \approx 0,22$ dla $n=3$ oraz $\eta_1 \approx 0,31$ dla $n=4$) wykorzystano wyniki zamieszczone w pracy [11], dotyczące wyciskania przez gładką klinową matrycę. Ze względu na zasygnalizowane uprzednio podobieństwo postaci siatek linii poślizgów dla obu procesów wystarczyło doko-



Rys. 8

nać jedynie odpowiedniej transformacji współrzędnych wykresów rys. 3 i 4 z pracy [11]. Naciski dla etapu lokalnego wypływania, tj. dla $\eta < \eta_1$, wyznaczono ze wzorów podanych przy omawianiu postaci odpowiedniego dla tego przedziału rozwiązania. Ponieważ rozwiązania dla $0 < \eta < 1$ należy traktować jako jedynie kinematycznie dopuszczalne, więc wartości nacisków obliczone dla tego przedziału stanowią górną ocenę wartości ścisłych [9].

Osobnego omówienia wymaga przedział $1 < \eta < 2$. Ze względu na skomplikowaną postać rozwiązań (rys. 3 i 4) zrezygnowano z przeprowadzania odpowiednich pracochłonnych obliczeń, poprzestając na wyznaczeniu dolnej i górnej oceny nacisków przy pomocy prostej siatki linii poślizgów przedstawionej na rys. 8. Siatka ta jest zbudowana z odcinków prostych oraz łuków okręgów. Doprowadzając linie poślizgu tylko do odcinka AJ i zakładając, że obszar AKJ jest wolny od naprężeń, otrzymujemy pole naprężeń spełniające warunki statyczne. Wynikająca z niego dolna ocena nacisków jest równa $2k(1 + \pi/2 - \omega)$ niezależnie od wartości η . Rozwiązanie kinematycznie dopuszczalne, dające górną ocenę, otrzymamy doprowadzając zaznaczoną grubo linię nieciągłości prędkości do powierzchni swobodnej. Różnica pomiędzy obiema ocenami, spowodowana wypukłością powierzchni swobodnej, nie przekracza 6,5% dla $n=3$ oraz 3,7% dla $n=4$. Bardziej szczegółowe omówienie sposobu wyznaczenia powyższych ocen zawarte jest w pracy [15].

4. OBCIĄŻENIE NIESYMETRYCZNE

Zgniatanie walca znajdującego się w warunkach odbiegających od zakładanej dotychczas symetrii jest odrębnym zagadnieniem; przeprowadzenie jego wyczerpującej analizy wymaga rozpatrzenia znacznej liczby przypadków, z których część zostanie omówiona w pracy [15]. W tej pracy ograniczymy się do przedstawienia jednego przykładu siatki linii poślizgów, dobrze ilustrującego niemożność bezkrytycznego przenoszenia struktury rozwiązania symetrycznego na przypadek niesymetryczny.

Rozważmy proces zgniatania plastycznego walca trzema gładkimi stemplami, rozmieszczonymi jak na rys. 9, w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. W praktyce taki sposób obciążania odpowiada kuciu wału pomiędzy kowadłem kątowym i płaskim przy pomijalnie małych siłach tarcia. Siatka linii poślizgów przedstawiona na rys. 10a dotyczy fazy następującej bezpośrednio po etapie lokalnego

jąca do zapewnienia równowagi obszarów sztywnych, wskutek czego rozwiązanie jest niekompletne. Rozwiązanie kompletne można prawdopodobnie uzyskać zastępując prosty odcinek EF wyizolowanej linii poślizgu łukiem okręgu. Wówczas jednak dla spełnienia warunków kinematycznych trzeba usunąć założenie o równomiernym rozkładzie nacisków, co znacznie komplikuje problem.

Istotne różnice pomiędzy przedstawionym powyżej rozwiązaniem a rozwiązaniem JOHNSONA [13] polegają na występowaniu wyizolowanych linii poślizgu oraz na braku połączenia pomiędzy obszarami plastycznymi przylegającymi do symetrycznie położonych stempli (na rys. 10a — dolnych). Eksperymenty [14] w przypadku obciążenia niesymetrycznego potwierdzają występowanie cienkiej strefy odkształceń plastycznych, stanowiącej rzeczywistą realizację wyizolowanej linii nieciągłości prędkości, a także wykazują istnienie nieuplastycznionego obszaru pomiędzy dolnymi stemplami. Natomiast w przypadku symetrycznego obciążenia siatka Johnsona dobrze odzwierciedla rzeczywisty przebieg linii poślizgów.

PODZIĘKOWANIE

Autor składa wyrazy podziękowania Panu Prof. W. SZCZEPIŃSKIEMU za wydatną pomoc okazaną w trakcie pisania pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, **2**, 43, 1953.
2. I. F. COLLINS, *Geometric properties of some slip-line fields for compression and extrusion*, J. Mech. Phys. Solids, **16**, 137, 1968.
3. I. F. COLLINS, *The algebraic-geometry of slip-line fields with applications to boundary value problems*, Proc. Roy. Soc., A **303**, 317, 1968.
4. P. DEWHURST, I. F. COLLINS, *A matrix technique for constructing slip-line field solutions to a class of plane strain plasticity problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., **7**, 357, 1973.
5. H. FORD, *Advances mechanics of materials*, London 1960.
6. A. P. GREEN, *The plastic yielding of notched bars due to bending*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **6**, 223, 1953.
7. W. A. GREEN, *Extrusion through smooth square dies of medium reduction*, J. Mech. Phys. Solids, **10**, 225, 1962.
8. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
9. R. HILL, *On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point*, Phil. Mag., **42**, 868, 1951.
10. R. HILL, *On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress*, J. Mech. Phys. Solids, **2**, 278, 1954.
11. W. JOHNSON, *Extrusion through wedge-shaped dies. Part. I*, J. Mech. Phys. Solids, **3**, 218, 1955.
12. W. JOHNSON, *Extrusion through square dies of large reduction*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 191, 1956.
13. W. JOHNSON, *Indentation and forging and the action of Nasmyth's anvil*, The Engineer, **205**, 348, 1958.
14. Б. А. КАЛЕДИН, *Оценка деформированного состояния заготовки при поперечной ковке с помощью физических полей линий скольжения*, Кузнечно-Штамп. Произв., **1**, 3, 1969.
15. H. PETRYK, Prace IPPT, 1976 (w przygotowaniu).
16. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Москва 1946.
17. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, Warszawa 1967.

Резюме

СЖАТИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПЛОСКИМИ ГЛАДКИМИ ШТАМПАМИ

Для анализа процесса сжатия пластического цилиндра плоскими гладкими штампами в условиях плоской деформации использован метод линий скольжения. Представленные решения охватывают все стадии процесса симметрического сжатия цилиндра произвольным числом штампов. Обсуждается проблема полноты решений и даются графики усилий для трех и четырех штампов. На примере сжатия тремя штампами иллюстрировано влияние асимметрии нагрузки на вид сетки линий скольжения.

SUMMARY

COMPRESSION OF A PLASTIC CYLINDER BETWEEN FLAT SMOOTH DIES

The theory of slip-lines is used to examine the process of compression of a plastic cylinder between flat smooth dies under plane strain conditions. Presented solutions cover all stages of the process of symmetrical compression of a cylinder between arbitrary number of dies. The problem of completeness of solutions is discussed and pressure diagrams for three and four dies are given. The influence of asymmetry of loading on the form of slip-line field is examined for the case of compression between three dies.

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lutego 1976 r.
