

DUŻE UGIĘCIA KONSTRUKCJI OBCIĄŻONYCH DYNAMICZNIE PRZEGLĄD KRYTYCZNY STOSOWANYCH METOD

TOMASZ WIERZBICKI (WARSZAWA)

Praca stanowi próbę klasyfikacji oraz krytycznej oceny dostępnych w literaturze opracowań na temat dużych ugięć plastycznych i lepkoplastycznych konstrukcji poddanych obciążeniom dynamicznym. Omówiono cztery najbardziej rozpowszechnione metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych. Przeprowadzono dyskusję założeń aproksymacyjnych z punktu widzenia dokładności i efektywności metod. Rozważania zilustrowano przykładami dla prostych konstrukcji belkowych, płytowych i powłokowych.

1. WSTĘP

W literaturze ostatnich lat zaznacza się stały wzrost zainteresowania zagadnieniami dynamiki ciał i konstrukcji niesprężystych. Badania w tym kierunku, poza elementami czysto poznawczymi, znajdują m.in. ciekawe zastosowania w dwóch ważnych dziedzinach nurtujących badaczy i praktyków lat 60 i 70 w technice reaktorowej oraz przemyśle samochodowym (zabezpieczanie pojazdów przed zderzeniem). Zagadnienia praktyczne prowadzą na ogół do formułowania zadań szczegółowych. Obserwuje się również tendencje do opracowywania bardziej ogólnych metod rozwiązywania problemów, poprawnych dla szerokiej klasy konstrukcji i różnorodnych warunków obciążenia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj próby analitycznego ujęcia problemów geometrycznie nieliniowych, co się wiąże z występowaniem w praktyce skończonych ugięć konstrukcji.

Z wyjątkiem najprostszego przypadku belki plastycznej, gdzie udało się uzyskać ściśle rozwiązanie, we wszystkich znanych pracach z omawianego zakresu wprowadza się różnego rodzaju aproksymacje bądź w sformułowaniu problemu matematycznego, bądź też w jego rozwiązaniu. Często autorzy dochodzą do podobnego rezultatu pozornie na różnych drogach w rzeczywistości jednak upraszczające założenia okazują się być równoważne lub niemal równoważne.

Niniejszy artykuł jest próbą klasyfikacji oraz krytycznej oceny znajdujących się w dostępnej literaturze opracowań na temat dużych dynamicznych ugięć plastycznych i lepkoplastycznych konstrukcji. Zamiast szczegółowo referować poszczególne opracowania i ich wyniki, w artykule tym nacisk został położony na przedyskutowanie samego sformułowania problemu. Omówione będą te elementy, które różnią jedną metodę od drugiej lub też wyróżniają się oryginalnością. Wreszcie, wykazane będą trudności w uzyskaniu właściwego rozwiązania oraz metody ich przezwyciężenia podawane przez różnych autorów.

Redagując niniejszy artykuł starano się nadać mu taką formę, aby mógł być czytany przez osoby interesujące się problematyką konstrukcji plastycznych, natomiast naszym celem nie będzie zaznajomienie ze specyfiką zagadnień dynamicznych i bogatą literaturą w tej dziedzinie. Będzie to szkic rozwoju i poszukiwań nowych koncepcji w rozwiązywaniu problemów fizycznie i geometrycznie nieliniowych. Przedstawione rozważania staną się jednak bardziej wartościowe i zrozumiałe, jeśli czytelnik będzie mógł dotrzeć do szeregu cytowanych prac i, mając do dyspozycji niniejsze krytyczne uwagi, sam dokonać oceny przydatności poszczególnych metod i rozwiązań.

Duże zainteresowanie zagadnieniami dynamicznymi spowodowane zostało przez znaczny postęp, jaki dokonał się ostatnio w statycznej analizie konstrukcji plastycznych przy dużych ugięciach. Znaczenie tych badań polegało przede wszystkim na uświadomieniu sobie, że zakres powszechnie do tej pory stosowanej teorii zgięciowej jest bardzo ograniczony i przy ugięciach rzędu grubości ścianki konstrukcji następuje przejście ze stanu momentowego do membranowego, co daje znaczne zwiększenie wytrzymałości konstrukcji [1, 2]. W wyniku systematycznych badań, głównie DUSZEK, SAWCZUKA i JONESA, przeprowadzona została klasyfikacja różnych uproszczeń w związkach kinematycznych [3 i 4], podany został sposób uzyskiwania równań równowagi zgodnych z przyjętym stopniem aproksymacji dla związków geometrycznych [5 i 6]. Najwięcej uwagi poświęcono teorii tzw. «umiarkowanie dużych ugięć», gdzie wykazano konieczność uwzględnienia geometrycznie nieliniowych wyrazów w równaniach ruchu i związkach kinematycznych [7]. W przypadku płyt o dowolnym kształcie odpowiednie grupy równań mają postać następującą:

$$(1.1) \quad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha} w_{,\beta}), \quad \kappa_{\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta}$$

oraz

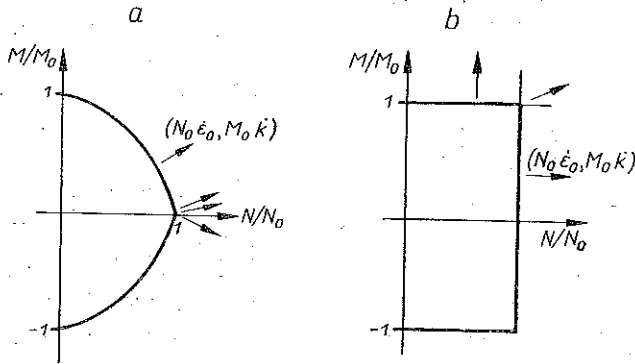
$$(1.2) \quad N_{\alpha\beta,\alpha} + p_\beta - m\ddot{u}_\beta = 0, \quad (Q_\alpha + N_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha} + p_\alpha - m\ddot{w} = 0, \quad Q_\alpha = -M_{\alpha\beta,\beta}$$

gdzie $M_{\alpha\beta}$ i $N_{\alpha\beta}$ oznaczają składowe wektorów momentów i sił, odpowiadające im uogólnione odkształcenia oznaczone są przez $\kappa_{\alpha\beta}$ i $\lambda_{\alpha\beta}$. Składowe wektorów ciśnień i przemieszczeń w kierunku stycznym do niezdeformowanej powierzchni płyty oraz prostopadłymi do tej powierzchni oznaczone są odpowiednio przez u_α , p_α oraz w i p_3 . Przecinek oznacza różniczkowanie względem współrzędnej X_α ($\alpha=1, 2$) w prostopadłym układzie współrzędnych leżących na powierzchni środkowej płyty. Również w pracy [3] wykazano, że postać warunku plastyczności $F(M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta})=0$ i stowarzyszonego prawa płynięcia w teorii umiarkowanie dużych ugięć może być taka sama jak dla nieskończone małych przemieszczeń.

Chociaż wspomniane powyżej badania nie wniosły w efekcie żadnych istotnych modyfikacji w stosunku do znanych równań von Kármána, opisujących duże ugięcia płyt sprężystych, to jednak przyczyniły się do lepszego zrozumienia założeń upraszczających, dały możliwość formułowania konsystentnych równań dla dowolnych powłok, a zatem stworzyły podstawy do opracowania ogólnych metod rozwiązywania zagadnień dynamicznych.

2. ROZWIĄZANIA DLA ŚCISLYCH I PRZYBLIŻONYCH WARUNKÓW PLASTYCZNOŚCI

Rozważmy na wstępie sztywno-plastyczną belkę o długości $2l$, dla której jest dany jednorodny rozkład prędkości początkowej V_0 . Belka jest zamocowana, tzn. jej końce nie mogą się przemieszczać w żadnym kierunku, ani też obracać. Ścisłe rozwiązanie tego problemu w ramach teorii zgięciowo-membranowej podane zostało przez SYMONDSEA i MENTEŁA [6]. Ponieważ zagadnienie to dość dobrze charakteryzuje pewne typowe sytuacje występujące w problemach dużych ugięć plastycznych konstrukcji, najważniejsze etapy rozwiązania omówione zostaną dość szczegółowo.



Rys. 1. Krzywa graniczna dla belki

W przypadku prostokątnego przekroju belki wykres warunku plastyczności zbudowany jest z dwóch wycinków następującej paraboli:

$$(2.1) \quad \frac{|M|}{M_0} + \frac{N^2}{N_0^2} = 1,$$

gdzie $M_0 = 0,25 \sigma_0 b h^2$, $N_0 = \sigma_0 b h$ oznaczają całkowicie plastyczny moment i siłę osiową, σ_0 granicę plastyczności materiału, a b i h odpowiednio szerokość i grubość belki (rys. 1). Zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia stosunek prędkości wydłużenia $\dot{\lambda}$ do prędkości krzywizny $\dot{\kappa}$ określony jest przez warunki

$$(2.2) \quad \frac{N_0 \dot{\lambda}}{M_0 \dot{\kappa}} = \frac{2N}{N_0}, \quad \text{jeśli } |N| < N_0,$$

oraz

$$(2.3) \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{M_0 \dot{\kappa}}{N_0 \dot{\lambda}} \leq \frac{1}{2}.$$

Ostatnia nierówność wyraża następujący fakt. Jeśli stan naprężenia będzie określony przez wierzchołek krzywej granicznej $N = \pm N_0$, to uogólniony wektor prędkości odkształceń może przyjąć dowolny kierunek między normalnymi do dodatniej i ujemnej gałęzi krzywej granicznej.

W przypadku obciążenia impulsowego mamy $p_a = p_3 = 0$ i odpowiednie równanie ruchu otrzymać można z ogólnego układu równań (1.2) dla płyt prostokątnych.

W pracy [8] przyjęto założenie upraszczające odnośnie składowej poziomej wektora przemieszczenia $\dot{u} = \ddot{u} = 0$. W konsekwencji z równania (1.3) otrzymujemy $N' = 0$ czyli stałość siły osiowej wzdłuż długości belki. Pozostałe równania ruchu redukują się w tym przypadku do równania

$$(2.4) \quad M'' + Nw'' + m\ddot{w} = 0,$$

gdzie m jest masą belki na jednostkę długości a «prim» oznacza różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej x .

Ze względu na nieciągłość wektora normalnego do powierzchni płynięcia, określonej równaniami (2.2) i (2.3), w ruchu belki można wyróżnić następujące fazy. W pierwszej fazie deformacje plastyczne zlokalizowane są w stacjonarnym przegubie plastycznym $x = 0$ i ruchomym przegubie $x = \xi(t)l$. Pole prędkości posiada kształt trapezu, przy czym środkowa część belki przemieszcza się z prędkością początkową V_0 , natomiast boczne części obracają się jako ciało sztywne (rys. 2). W chwili początkowej $\xi(0) = 0$ spełnione są zatem warunki początkowe dla jednorodnej stałej prędkości V_0 i zerowych przemieszczeń. Ponieważ warunek plastyczności spełniony jest jedynie na końcach obracających się części belki, przeto punkty pośrednie nie odkształcają się plastycznie. Część środkowa również porusza się jak ciało sztywne, chociaż stały moment i stała siła spełniają warunek plastyczności.

Z równań kinematycznych i prawa płynięcia można otrzymać następujący wzór:

$$(2.5) \quad \frac{\delta}{h} = \frac{4NM_0}{N_0^2 h} = \frac{N}{N_0}$$

dla $N < N_0$. Powyższy wzór mówi, że jeśli ugięcie środka δ osiąga grubość belki h , to siła osiowa dąży do N_0 , a zatem moment gnący na podstawie (2.1) dąży do zera. Dla $t > t^*$, gdzie $\delta(t^*) = h$, belka jest jedynie rozciągana, przy czym $N = N_0$, $M = 0$. Jest to druga faza ruchu, w której belka staje się plastyczną struną. Rzeczywiście, z równania ruchu (2.4) otrzymujemy teraz równanie falowe

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

gdzie $c = N_0/m = \sigma_0/\rho$.

Dla małej początkowej energii kinetycznej scharakteryzowanej przez parametr λ , $0 \leq \lambda \leq 8$

$$(2.7) \quad \lambda \equiv \frac{ml^2 V_0^2}{M_0 h}$$

ugięcia nie przekraczają grubości belki $\delta_f/h < 1$. Maksymalne ugięcie środka belki δ_f otrzymać można rozważając pole prędkości z ruchomym a następnie stacjonarnym przegubem plastycznym $\xi=1$. Wynosi ono

$$(2.8) \quad \frac{\delta_f}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta_f}{h} \right)^3 = \frac{\lambda}{6}.$$

Natomiast dla dużej energii kinetycznej ($\lambda > 16$) po osiągnięciu ugięcia równo-grubości w chwili $t=t^*$, belka zamienia się w strunę. Prędkość i przemieszczenie w momencie $t=t^*$ wyznaczone z pierwszej fazy giętno-membranowej określają teraz warunki początkowe dla równania (2.6). Tak więc w końcu otrzymuje się następujący wzór na trwałe ugięcie środka belki:

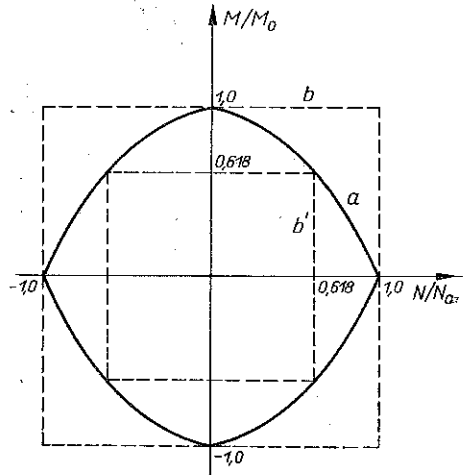
$$(2.9) \quad \frac{\delta_f}{h} = \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda} - 1).$$

Warto wspomnieć, że rozwiązanie tego samego problemu w ramach czysto zgięciowej teorii belek dane jest przez formułę (2.8) przy zaniedbaniu wyrazu w trzeciej potęgze, czyli $\delta_f/h = \lambda/\sigma$.

Chociaż w omawianym przypadku zamocowanej belki uzyskano zamkniętą postać rozwiązania, to jednak uwzględnienie nieliniowego warunku plastyczności wymagało rozpatrzenia kilku faz ruchu oraz dość pracochłonnych rachunków, które zostały tu pominięte. W pracy JONESA [9] uzyskano znaczne uproszczenie obliczeń, zastępując paraboliczny warunek plastyczności przez kwadrat wpisany lub opisany na wykresie odpowiadającym rzeczywistemu procesowi uplastycznienia (rys. 1). W przypadku wpisanego kwadratu jego wymiary wynoszą $|M/M_0| = |N/N_0| = 0,618$. Nietrudno odgadnąć, że mamy tu do czynienia z dolną lub górną oceną wytrzymałości przekroju belki. Otrzymane tą drogą trwałe ugięcia powinny stanowić odpowiednio górne lub dolne oszacowanie na rzeczywiste ugięcie.

Zaznaczamy, że są to jedynie rozważania intuicyjne i nie dysponujemy do tej pory dowodem potwierdzającym ich prawdziwość. Jeśli nawet tak jest, to powstaje pytanie, w jakim sensie rozwiązanie jednego problemu daje oszacowanie dla rozwiązania tego samego problemu przy innym warunku plastyczności. Czy własność ta dotyczy maksymalnych ugięć, czy średnich ugięć i jak zdefiniowanych. Ten ważny i ciekawy problem dynamiki ciał plastycznych oczekuje dopiero na rozwiązanie.

Wracając do problemu belki, rozważmy najpierw kwadratowy warunek plastyczności opisany na paraboli i stowarzyszone prawo płynięcia (rys. 3). Obraz deformacji

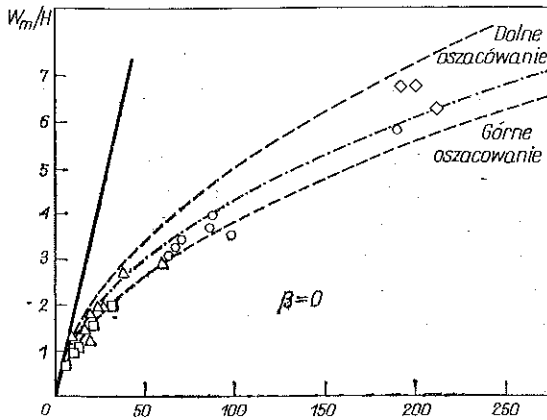


Rys. 3. Kwadratowy warunek plastyczności wpisany i opisany na paraboli

będzie się różnił od obserwowanego poprzednio. Pierwszą różnicą jest pojawienie się całkowitej wartości siły osiowej $N=N_0$ natychmiast po rozpoczęciu ruchu. Pole prędkości ma kształt trapezu i chociaż zmiany krzywizny następują w dalszym ciągu w przegubach plastycznych, to prawo płynięcia pozwala, aby odkształcenia osiowe i występowały wzdłuż całych obracających się części belki. Rozważając dwa etapy ruchu z ruchomym i stacjonarnym przegubem plastycznym, otrzymuje się maksymalne ugięcie belki:

$$(2.10) \quad \frac{\delta_f}{h} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{3} \lambda + 1} - 1 \right].$$

Dla «wpisanego» warunku plastyczności należy zastąpić λ we wzorze (2.10) przez $\lambda/0,618$. Porównanie rozwiązania ścisłego z «górną» i «dolną» oceną oraz z wykresem rozwiązania dla nieskończone małych ugięć przedstawiony jest na rys. 4.



Rys. 4. Porównanie rozwiązania ścisłego dla belki z «górną» i «dolną» oceną

Procedura zastąpienia nieliniowego warunku plastyczności przez odpowiednią wpisaną lub opisaną powierzchnię graniczną o prostszym kształcie, omówiona na przykładzie belki, znalazła zastosowanie w konstrukcjach płytowych i powłokowych, gdzie uplastycznienie następuje w złożonym stanie naprężenia. Sposób ten, powszechnie stosowany w statycznej analizie konstrukcji plastycznych, gdzie istnieją odpowiednie twierdzenia o oszacowaniach, tak dalece przyjął się w problemach dynamicznych, że zagadnienie dokładności rozwiązania przestało budzić wątpliwości. Na ogół odpowiednie rozwiązanie traktuje się jako dokładne dla hipotetycznego materiału podlegające takiemu lub innemu zlinearyzowanemu warunkowi plastyczności. Jak już wspomniano w zagadnieniach dynamicznych sprawa, w jakim sensie hipotetyczny materiał aproksymuje materiał rzeczywisty, nie doczekała się wyjaśnienia.

W literaturze znaleźć można niezbyt wielką liczbę analitycznych rozwiązań problemów dużych ugięć dla przybliżonych warunków plastyczności, głównie w pracach Jonesa. Rozwiązania te dotyczą jedynie konstrukcji osiowo-symetrycznych, a więc płyt pierścieniowych [10], płyt kołowych [11] i powłok cylindrycznych [13]. W pracach [11 i 12] rozwinięto konsekwentnie koncepcje aproksymacji warunku plastyczności dla belek, gdzie siły i momenty uplastyczniające przekrój były od

dopuszczalnych naprężeń ($M_{\alpha\beta}^0, N_{\alpha\beta}^0, p_\alpha, p_\beta$) występuje konfiguracja ciała (u_α, w). Fakt ten utrudnia przeprowadzenie dowodów lub też uniemożliwia efektywne korzystanie [15]. Tym nie mniej pojęcie stanów dopuszczalnych stanowi podstawę większości metod przybliżonych w dynamice konstrukcji plastycznych i lepko-plastycznych przy dużych ugięciach. W tej sytuacji pozostaje jedynie kwestia wygody, tzn. takiego doboru dopuszczalnej klasy funkcji, aby odpowiednie rachunki były najprostsze i maksymalne ugięcia obliczone były ze stosunkowo najmniejszym nakładem pracy. Wobec braku kryteriów dokładności porównanie znanych metod przybliżonych dokonane zostanie z punktu widzenia wspomnianego czynnika wygody lub efektywności metody.

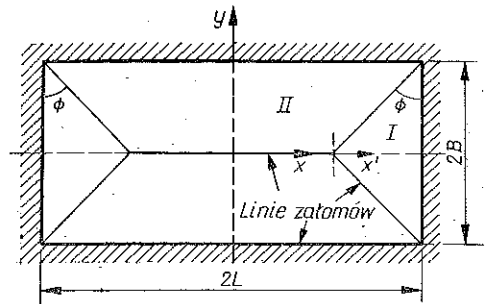
Próby ścisłego wyznaczenia górnego oszacowania na ugięcia dla sprężystych i sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych idealnym impulsem podane zostaną w dalszej części niniejszego opracowania.

Wzorując się na pracach Sawczuka dla zagadnień statycznych, Jones zaproponował, aby przybliżone rozwiązanie poszukiwać w klasie funkcji z rozdzielonymi zmiennymi, gdzie kształt pola przemieszczeń i prędkości przemieszczeń jest stały i taki sam, jak w odpowiednim rozwiązaniu zagadnienia statycznego dla nieskończonego małych ugięć. Metoda ta opracowana została w [16] dla płyt o dowolnym kształcie i uogólniona następnie na przypadek powłok [17]. Jednakże nawet w takim sformułowaniu problem okazał się zbyt trudny i wprowadzono dwa dalsze uproszczenia, zaniebując składową poziomą wektora przemieszczenia i przyjmując, tak jak w teorii linii załamów, że deformacje plastyczne lokalizują się wzdłuż pewnej liczby prostoliniowych linii przegubów o długości Lm . Wówczas z przyrównania wewnętrznej mocy dysypowanej otrzymuje się dla przypadku płyt

$$(3.1) \quad \int_S (p_3 - m\ddot{w}) \dot{w} dS = \sum_{m=1}^p \int_{l_m} (N_w - M) \dot{\theta}_m dl_m,$$

gdzie $\dot{\theta}_m$ jest względną prędkością obrotu w przegubie. Wyrażenie podcałkowe $D = (N_w - M) \dot{\theta}_m$ można wyrazić efektywnie przez przemieszczenia, przyjmując odpowiednią formę warunku plastyczności. W omawianej metodzie przybliżonej równanie ruchu (1.4) spełnione jest w sposób całkowity z wagą \dot{w} . Jednakże w dowolnym punkcie płyty nie możemy się spodziewać spełnienia równania dynamicznego równowagi. Również warunki początkowe, jeśli dane są w prędkościach, nie są dokładnie spełnione przez przybliżone rozwiązanie.

Mimo wyliczonych braków metoda Jonesa daje zupełnie zadowalające rezultaty, co potwierdza przykład płyty prostokątnej zamocowanej na brzegu (rys. 6). W pracy [16] przyjęto kształt pola ugięć dla przypadku dynamicznego o iden-



Rys. 6 Zamocowana płyta prostokątna

tycznej postaci co pole prędkości zastosowane przez WOODA w statycznej analizie podobnej płyty. Pole to jest określone przez następujące wzory: obszar 1

$$(3.2) \quad w = W \frac{B \operatorname{tg} \Phi - x'}{B \operatorname{tg} \Phi}$$

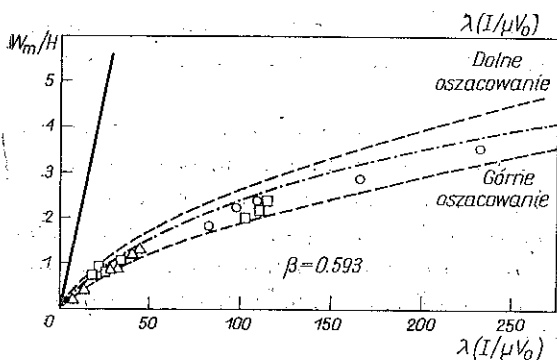
oraz obszar 2

$$(3.3) \quad w = W \frac{B - y}{B}$$

Podstawiając (3.2) i (3.3) do (3.1) i wykorzystując paraboliczny lub kwadratowy warunek plastyczności dochodzi się do nieliniowego równania różniczkowego zwyczajnego na ugięcie środka płyty:

$$(3.4) \quad \ddot{w} + \alpha w^2 = \beta,$$

gdzie współczynniki α i β zależą od mechanicznych i geometrycznych parametrów zagadnienia oraz od intensywności impulsu ciśnienia. Wyniki obliczeń pokazane są na rys. 7. Linia ciągła oznacza wykres rozwiązania dla najprostszej teorii momentowej nie uwzględniającej sił



Rys. 7. Przybliżone rozwiązania dla płyty prostokątnej

o grubościach odpowiednio $H = 0,244''$, $H = 0,188''$ i $H = 0,122''$. Płyty obciążane były równomiernie rozłożonym impulsem ciśnienia. Stosunek boków płyty wynosił $\beta = B/L = 0,5931$. Dobra zgodność danych doświadczalnych z wynikami przybliżonej teorii świadczy o tym, że ujmuje ona zasadnicze efekty występujące w rzeczywistym procesie deformacji płyty.

W pracy [18] zaproponowano, aby jako kinematycznie dopuszczalne pole prędkości przemieszczeń w problemie dynamicznym wziąć rzeczywiste pole prędkości w rozwiązaniu podobnego problemu statycznego z siłą punktową P . Z zasady równości wewnętrznej i zewnętrznej mocy dysypowanej w problemie statycznym mamy

$$(3.5) \quad P(\delta^*) \delta^* = \int_{V_0} S_{KL}^* \dot{E}_{KL}^* dV^0,$$

gdzie S_{KL} jest tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, a \dot{E}_{KL} jest tensorem prędkości odkształcenia Greena.

Jak wiadomo, pole to zmienia się w procesie deformacji i ze wzrostem skalar-
nego parametru, który może być wartością ugięcia δ w kierunku działania siły,
następuje stopniowe przejście ze stanu czysto zgięciowego do stanu membrano-
wego. Dla statecznych konfiguracji nośność konstrukcji jest rosnącą funkcją pa-
rametru δ^* . Tak zdefiniowane pole statyczne identyfikujemy z rzeczywistym po-
lem w procesie dynamicznym przy impulsowym obciążeniu żądając, aby w każdej
chwili δ^* było rzeczywistym ugięciem $\delta^* = \delta(t)$. Ponieważ funkcja (3.5) jest jedno-
rodna względem prędkości, prędkość ugięcia można określić niezależnie, przyj-
mując, że jest równa rzeczywistej prędkości ugięcia $\dot{\delta}^* = \dot{\delta}$:

$$(3.6) \quad E = \int_0^{t_f} dt \int_{V_0} S_{KL} \dot{E}_{KL} dV^0.$$

Postulując równość całkowitych energii dysypowanych przez rzeczywiste pole
prędkości odkształceń \dot{E}_{KL} i pole wynikające z rozwiązania statycznego \dot{E}_{KL}^* otrzy-
mujemy

$$(3.7) \quad E_K = \int_0^{t_f} P(t) \dot{\delta} dt = \int_0^{\delta_f} P(\delta) d\delta,$$

Znając krzywą siła-ugięcie $P(\delta)$ w problemie statycznym i wykonując całkowanie
dochodzimy do uwikłanego równania algebraicznego na trwałe ugięcie konstrukcji
w procesie dynamicznym.

Należy tu zaznaczyć, że w każdej chwili moc dysypowana w procesie dynamicz-
nym i statycznym jest różna, a aproksymacja w omawianej metodzie polega na
założeniu, że całki względem czasu (czyli wartości pracy) są sobie równe.

Przedstawiona metoda zastosowana została w pracy [18] do rozwiązania kilku
problemów brzegowych dla płyt obciążonych idealnym impulsem oraz uderzonych
pociskiem. Otrzymano dobrą zgodność z doświadczeniami [19] oraz z rozwiąza-
niem uzyskanym na innej drodze [20].

Ogólnie rzecz biorąc należałoby się tu spodziewać większej dokładności niż
w metodzie Jonesa, ponieważ przyjęte pole kinematyczne nie jest stałe lecz zmienia
się w procesie, dobrze charakteryzując przejście ze stanu momentowego do membra-
nowego w rzeczywistym problemie dynamicznym.

*Zaletą omawianej metody jest prostota rachunków, co widać ze wzoru (3.7);
podstawową wadą jest konieczność znajomości ścisłego rozwiązania odpowiedniego
problemu statycznego z siłą skupioną.* Takich rozwiązań niestety w literaturze jest
niewiele. Ponadto wzoru (3.7) nie można stosować w przypadku zależnego od czasu
ciśnienia.

Pewnego rodzaju połączenie obu metod zaproponował niedawno KALISZKY
[21]. Praca ta zasługuje jednak na krytykę nie dlatego, że formułując problem du-
żych odkształceń stosuje się miary odpowiednie dla infinitezymalnej teorii, ale
za brak konsekwencji w przyjmowaniu założeń upraszczających. W zasadzie prac
wirtualnych autor wprowadza do pewnych wyrazów kinematyczne pole prędkości
z rozdzielonymi zmiennymi do innych wyrazów natomiast inne pole kinematyczne do-
puszczalne, odpowiadające rozwiązaniu statycznemu przy dużych ugięciach, a więc

o zmiennym kształcie. W efekcie interpretacja uzyskanej aproksymacji rozwiązań jest niejasna. Z drugiej strony przedstawione przykłady liczbowe świadczą na korzyść teorii. Stosowanie wspomnianej metody również uzależnione jest od znajomości krzywej pokrytycznej dla podobnej konstrukcji pod działaniem siły punktowej.

4. METODY PRZYBLIŻONE WYKORZYSTUJĄCE DOPUSZCZALNE POLA NAPRĘŻEŃ

W pracy [22] podane zostało przybliżone rozwiązanie problemu dużych ugięć lepkoplastycznej płyty kołowej zamocowanej na obwodzie z danym jednorodnym rozkładem prędkości początkowej. Podobne zagadnienie dla swobodnie podparte płyty rozpatrywane było w pracy [23]. Zastosowana metoda aproksymacyjna uogólniona została na przypadek płyt i powłok plastycznych o dowolnym kształcie. Przeprowadzając klasyfikację omawianej metody należy uznać, że przybliżenie polegało tu na wprowadzeniu statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Istotę aproksymacji wyjaśnimy na przykładzie równań dla dużych ugięć płyt lepkoplastycznych. Za punkt wyjścia przyjmijmy równanie konstytutywne Hohenemsera i Pragera dla materiału sztywno-lepkoplastycznego z liniową funkcją relaksacji. W płaskim stanie naprężenia równania te przyjmują postać

$$(4.1) \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \gamma \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \frac{s_{\alpha\beta}}{\sqrt{J_2}}, \quad \sqrt{J_2} \geq k, \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie

$$(4.2) \quad J_2 = \frac{1}{3} [3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}], \quad s_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} [3\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{jj}\delta_{\alpha\beta}].$$

Po odwróceniu równań (4.1), wykorzystując (4.2), (4.3) i (4.4), otrzymujemy

$$(4.3) \quad \sigma_{\alpha\beta} - k \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sqrt{J_2}} = \frac{k}{\gamma} (\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \dot{\epsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}).$$

Całkując (4.3) w przedziale odpowiadającym grubości konstrukcji przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów i prostych normalnych, otrzymujemy związki płynięcia dla sił i momentów:

$$(4.4) \quad M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^0 = \frac{4h^3}{3} \frac{k}{\gamma} (\dot{\kappa}_{\alpha\beta} + \dot{\kappa}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}),$$

$$(4.5) \quad N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^0 = 4h \frac{k}{\gamma} (\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}),$$

gdzie

$$(4.6) \quad M_{\alpha\beta}^0 = \int_{-h}^h k \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sqrt{J_2}} z dz, \quad N_{\alpha\beta}^0 = \int_{-h}^h k \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sqrt{J_2}} dz.$$

Zauważmy, że stan naprężenia, występujący pod znakami całek (4.6), znajduje się zawsze na statycznej powierzchni plastyczności. Oznacza to, że również uogólnione naprężenia spełniać muszą warunek pływaczności $F(M_{\alpha\beta}^0, N_{\alpha\beta}^0) = 0$.

Formułując problem początkowo-brzegowy dla równań (4.4) i (4.5), można zastosować metodę aproksymacyjną i założyć, aby stan «z kółeczkami» był

statycznie dopuszczalny, tzn. spełniał statyczne równanie dużych ugięć płyt ($u_\alpha = p_\alpha = 0$):

$$(4.7) \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta}^0 - (N_{\alpha\beta}^0 w_{,\beta}^0)_{,\alpha} + p_3^0 = 0.$$

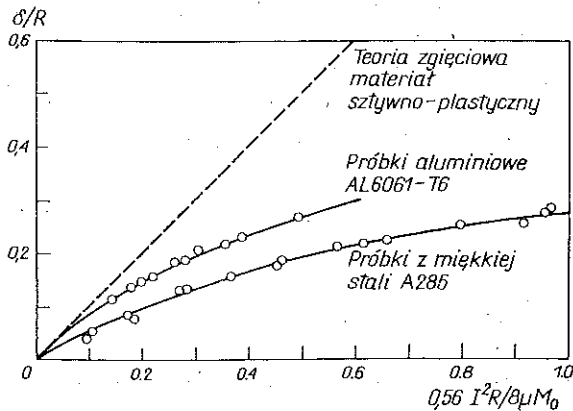
Równanie dynamicznej równowagi dla ścisłego rozwiązania posiada natomiast postać

$$(4.8) \quad -M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} w_{,\beta})_{,\alpha} + p_3 - m\ddot{w} = 0.$$

Można zauważyć, że problem da się sformułować całkowicie w wielkościach w i \dot{w} , jeśli utożsamiamy w równaniach (4.7) i (4.8): $w_{,\beta}^0 = w_{,\beta}$. Odejmując stronami (4.7) i (4.8) otrzymamy

$$(4.9) \quad (M_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^0)_{,\alpha\beta} - [(N_{\alpha\beta} - N_{\alpha\beta}^0) w_{,\beta}]_{,\alpha} - (p_3 - p_3^0) = m\ddot{w},$$

co w połączeniu z równaniami (4.4) i (4.5) pozwala całkowicie wyeliminować naprężenia.



Rys. 8. Ugięcie środka płyty kołowej jako funkcja impulsu dla próbek stalowych i aluminiowych

Na przykład dla wspomnianego problemu płyty kołowej otrzymuje się następujące nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe na ugięcia płyty $w(r)$:

$$(4.10) \quad \nabla^4 \dot{w} + a\ddot{w} + bp^0 + c\dot{w}' w' w'' = 0.$$

Równanie to rozwiązane zostało w sposób przybliżony stosując metodę ortogonalizacji Galerkina. Wyniki liczbowe przedstawione są na rys. 8 (linia ciągła); dla porównania linią przerywaną pokazane jest klasyczne rozwiązanie Wanga dla małych ugięć. Kółeczka oznaczają punkty doświadczalne dla płyt z miękkiej stali, czyli wrażliwych na prędkość odkształcenia ($\gamma = 350$), i dla płyt aluminiowych, czyli niewrażliwych na prędkość odkształcenia ($\gamma \rightarrow \infty$).

Zaletą omawianej metody jest możliwość ścisłego spełniania warunków początkowych dla prędkości i uwzględnienia lepkości materiału. Poważnym jej niedostatkim jest brak kryteriów oceny dokładności. Chociaż w szczególnym przypadku płyt porównania z doświadczeniem świadczą na korzyść zastosowanej metody aproksymacji, to jednak wniosku tego nie można uogólniać na inne konstrukcje i inne typy obciążeń. Ponadto same obliczenia w metodzie Galerkina są dość żmudne.

5. OSZACOWANIA DUŻYCH UGIĘĆ SPRĘŻYSTYCH KONSTRUKCJI

Rozważania przedstawione w tym rozdziale mają na celu zilustrowanie metod energetycznych w przypadku występowania jedynie nieliniowości typu geometrycznego. Punktem wyjścia w dowodach stosowanych w geometrycznie liniowej teorii sprężystości są własności wypukłości funkcji energii sprężystej $W(\epsilon_{ij})$ i energii dopełniającej $\Omega(\sigma_{ij})$. Wzorując się na wyprowadzeniu podanym w [24] dojdziemy do zasady minimum energii potencjalnej uogólnionej na przypadek skończonych deformacji. Stosowany będzie opis Lagrange'a.

Wypukłość funkcji energii sprężystej wyraża się przez następującą nierówność:

$$(5.1) \quad W(E_{KL}) - W(E_{KL}^S) - (E_{KL} - E_{KL}^S) S_{KL}^S \geq 0,$$

gdzie tensor odkształceń Greena ma postać

$$(5.2) \quad E_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}).$$

Niech stan oznaczony literą s znajduje się w statycznej równowadze na powierzchni

$$(5.3) \quad (S_{KL}^S + S_{LM}^S U_{K,M}^S)_{,L} = 0 \quad \text{w } V^0$$

oraz

$$(5.4) \quad (S_{KL}^S + S_{LM}^S U_{K,M}^S) N_L = T_K^S \quad \text{na } A^0,$$

gdzie N_L oznacza składowe jednostkowego wektora normalnego do niezdeformowanej powierzchni ciała. Całkując nierówność (5.1), spełnioną w każdym punkcie ciała sprężystego, po całej objętości V^0 znajdziemy

$$(5.5) \quad \int_{V^0} W(E_{KL}) dV^0 - \int_{V^0} W(E_{KL}^S) dV^0 - \int_{V^0} E_{KL} S_{KL}^S dV^0 + \int_{V^0} E_{KL}^S S_{KL}^S dV^0 \geq 0.$$

W teorii nieskończenie małych odkształceń ostatnie dwie całki w wyrażeniu (5.5) zastąpić można przez odpowiednie całki powierzchniowe. W teorii geometrycznie nieliniowej, dokonując podobnych operacji transformacji, pojawiają się nowe wyrazy. Wykorzystując równania (5.2), (5.3) i (5.4) można udowodnić następujące tożsamości:

$$(5.6) \quad \int_{V^0} S_{KL}^S E_{KL} dV^0 = \int_{A^0} T_K^S U_K dA^0 - \frac{1}{2} \int_{V^0} S_{KL}^S U_{M,K} [2U_{M,L}^S - U_{M,L}] dV^0$$

oraz

$$(5.7) \quad \int_{V^0} S_{KL}^S E_{KL}^S dV^0 = \int_{A^0} T_K^S U_K^S dA^0 - \frac{1}{2} \int_{A^0} S_{KL}^S U_{M,K}^S U_{M,L}^S dV^0.$$

Po podstawieniu (5.6) i (5.7) do (5.5) zasada minimum energii potencjalnej, uogólniona na duże odkształcenia, przyjmuje postać

$$(5.8) \quad \int_{V^0} W(E_{KL}) dV^0 - \int_{A^0} T_K^S U_K dA^0 \geq \int_{V^0} W(E_{KL}^S) dV^0 + \int_{A^0} T_K^S U_K^S dA^0 + R,$$

gdzie dodatkowy wyraz

$$(5.9) \quad R = \frac{1}{2} \int_{V^0} S_{KL}^S (U_{M,K} - U_{M,K}^S) (U_{M,L} - U_{M,L}^S) dV^0.$$

Wyraz ten uwzględnia zmiany geometrii i ewentualną niestateczność konstrukcji. Wyrażenie podcałkowe w (5.9) jest formą kwadratową; współczynnikami formy jest tensor naprężenia S_{KL}^S . Wystarczającym warunkiem, aby R było dodatnie, jest dodatniość wyrażenia podcałkowego. Forma kwadratowa jest dodatnio określona, jeśli składowe tensora naprężenia spełniają nierówności:

$$(5.10) \quad S_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Jeśli warunki (5.10) są rzeczywiście spełnione, to dodatni wyraz w (5.8) można pominąć bez naruszenia znaku nierówności. Zasada minimum energii potencjalnej przyjmie wówczas formalnie tę samą postać, co w teorii infinytezymalnej:

$$(5.11) \quad \int_{V^0} W(E_{KL}) dV^0 - \int_{A^0} T_K^S U_K dA^0 \geq \int_{V^0} W(E_{KL}^S) dV^0 - \int_{A^0} T_K^S U_K^S dA^0.$$

Formułując problem oszacowań dla dużych dynamicznych odkształceń konstrukcji i ograniczając się do statecznych konfiguracji, MARTIN przyjął warunek stateczności w formie nierówności (5.11), [25]. Warunek ten oznacza, że każda skończona zmiana przemieszczeń od konfiguracji równowagi powodować musi wzrost całkowitej potencjalnej energii układu. Rozumując w powyższy sposób Martin uniknął konieczności badania znaku wyrażenia (5.9); zamiast tego zmuszony był *a priori* zdecydować, czy proces deformacji konstrukcji jest stateczny.

Jako ilustrację powyższych rozważań wypiszmy zasadę minimum energii potencjalnej dla belki sprężystej obciążonej siłą punktową P^A w zakresie umiarkowanie dużych ugięć. Wychodząc z postulatu wypukłości funkcji energii sprężystej

$$(5.12) \quad W(Q_j) - W(Q_j^S) - (q_j - q_j^S) Q_j^S \geq 0,$$

gdzie składowymi wektorów uogólnionych naprężeń i odkształceń są $Q_j = (M, N)$, $q_j = (\kappa, \lambda)$, i dokonując całkowania przez części równań (1.1)–(1.5) przy założeniu $p_\alpha = u_\alpha = 0$, otrzymujemy następującą postać zasady minimum energii potencjalnej:

$$(5.13) \quad \int_0^l W(q_j) dx - P^A w^A \geq \int_0^l W(q_j^S) dx - P^A w^{S^A} + R,$$

gdzie

$$(5.14) \quad R = \frac{1}{2} \int_0^l N(W_{,x} - w_{,x}^S)^2 dx.$$

Znak wyrażenia (5.14) zależy do sposobu obciążenia i warunków brzegowych danej konstrukcji. Na przykład, siła osiowa N jest dodatnia w przypadku prostopadłego obciążenia belki, ale może być ujemna, jeśli ta sama belka jest obciążona horyzontalnie. Można łatwo wykazać, że w przypadku kołowo symetrycznych płyt i powłok cylindrycznych wyrażenie R ma tę samą postać, co w przypadku belki.

Martin w charakterze przykładu rozpatrzył belkę z danym sinusoidalnym rozkładem prędkości początkowej. Belka posiadała możliwość swobodnego obrotu na brzegu, natomiast przemieszczenia jej końców były równe zeru. Proces deformacji belki jest stateczny, siła osiowa jest dodatnia, na podstawie (5.14) $R \geq 0$ i ostatni wyraz w nierówności (5.13) może być tu rzeczywiście pominięty. Tak więc w tym konkretnym przypadku zasada minimum energii potencjalnej i postulat stateczności konstrukcji prowadzą do identycznej równości.

Aby otrzymać górne oszacowanie na maksymalne ugięcia belki w punkcie A , Martin przeprowadził następujące rozumowanie. Niech wielkości q_j i w oznaczają odkształcenia i ugięcia w rzeczywistym procesie dynamicznym, natomiast q_j^s i w^s są znanymi wielkościami w pomocniczym procesie statycznym, w którym ta sama belka obciążona jest siłą skupioną działającą w punkcie A (rys. 9). Wówczas z (5.13) otrzymujemy

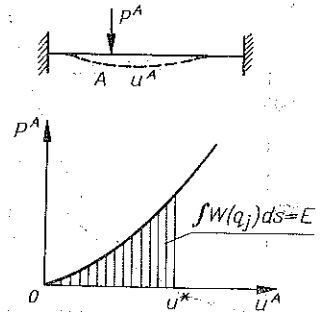
$$(5.15) \quad P^A (w^s - w) \geq \int_0^l W(q_j^s) dx - \int_0^l W(q_j) dx$$

lub też

$$(5.16) \quad w^s \geq w, \quad \text{jeśli} \quad \int_0^l W(q_j^s) dx \geq \int_0^l W(q_j) dx.$$

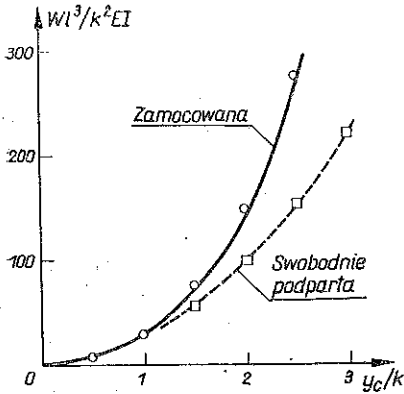
Powyższa nierówność pozwala uzyskać górne oszacowania na poszukiwane przemieszczenie, jeśli znana jest całkowita energia sprężysta $\int_0^l W(q_j) dx$ lub też wielkość większa od tej energii. W problemach obciążenia impulsowego górną oceną całkowitej energii sprężystej jest początkowa energia kinetyczna E_k wprowadzona do układu. Jeśli teraz wykreślimy krzywą siła-ugięcie w pomocniczym problemie statycznym, to pole powierzchni pod tą krzywą reprezentuje całka $\int_0^l W(q_j^s) dx$. Wartość ugięcia w^s , dla którego całka ta równa się E_k , stanowi poszukiwaną górną ocenę maksymalnego ugięcia sprężystego w procesie dynamicznym (rys. 9).

Porównanie uzyskanych tą drogą oszacowań (kółka i kwadraty) z dostępnym w literaturze dokładnym rozwiązaniem tego problemu (linia ciągła i przerywana) przedstawione jest na rys. 10. W tym przypadku, dzięki doborowi rozkładu początkowej prędkości belki w formie sinusoidy dokładność oszacowania jest bardzo dobra.



Rys. 9. Interpretacja graficzna energetycznego oszacowania ugięć sprężystych konstrukcji

Przedstawiona metoda aproksymacji, zaproponowana wcześniej w nieco innej formie dla przypadku nieskończenie małych ugięć [26], jest interesująca, prosta i efektywna.



Rys. 10. Porównania górnej oceny i rozwiązania ścisłego dla dużych ugięć sprężystych belek

W literaturze dotyczącej liniowych i nieliniowych drgań sprężystych konstrukcji jest w zasadzie nie znana, zasługuje jednak na znacznie szersze rozpowszechnienie. Znalezienie oszacowań na ugięcia wymaga tutaj znajomości ścisłego rozwiązania dla statycznie obciążonej konstrukcji, a nie jedynie statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Nie jest to problem trywialny. Czasami celowe może się okazać poszukiwanie zależności energii sprężystej pochodzącej od siły wyznaczonej z doświadczeń modelowych. W każdym razie jednak znalezienie kompletnego rozwiązania statycznego problemu dużych ugięć jest znacznie łatwiejsze niż rozwiązanie odpowiedniego problemu dynamicznego.

Metoda oszacowań dla nieliniowych konstrukcji sprężystych stała się punktem wyjścia do opracowania podobnych metod przybliżonych dla konstrukcji niesprężystych.

6. OSZACOWANIA DUŻYCH UGIĘĆ KONSTRUKCJI NIESPRĘŻYSTYCH

W niniejszym rozdziale przedstawione będą dwie metody znajdowania górnych oszacowań na trwałe ugięcia sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych idealnym impulsem. Zakres stosowalności obu metod ograniczony jest do umiarkowanie dużych ugięć, tzn. zakłada się małość odkształceń, jednakże ugięcia są na tyle duże, że równania dynamiki i związki geometryczne zawierają wyrazy nieliniowe. Przeprowadzając dowody odpowiednich twierdzeń oraz podając zastosowania, przyjąć trzeba szereg dodatkowych założeń i hipotez, które były i są krytykowane przez wielu autorów. *Mimo iż sformułowanie twierdzeń o oszacowaniach dla dużych ugięć jest dalekie jeszcze od doskonałości, to jednak stanowią one pierwsze próby określenia dokładności rozwiązań przybliżonych i z tego punktu widzenia zasługują na dość szczegółowe omówienie.* Znaczeniemy od zreferowania koncepcji MARTINA i PONTERA [27].

Jeśli rozważać będziemy materiały, dla których istnieje zależność od drogi obciążenia oraz nieodwracalność odkształceń, to twierdzenie wyprowadzone dla konstrukcji sprężystych, np wzór (5.15), przestają być poprawne. Zależność od drogi implikuje nieistnienie funkcji energii sprężystej $W(\epsilon_{ij})$ i energii depełniającej $\Omega(\sigma_{ij})$. W pracy [26] Martin podał następującą nierówność na ugięcia w procesie dynamicznym dla niesprężystych konstrukcji, mającą zastosowanie w zakresie małych ugięć:

$$(6.1) \quad \int_S p_i^S u_i ds \leq \int_V \hat{\Omega}(\sigma_{ij}^S) dV + E_k,$$

gdzie $\hat{\Omega}(\sigma_{ij}^S)$ oznacza energię dopełniającą w elemencie ciała wyliczoną dla drogi w przestrzeni naprężeń, która maksymalizuje $\Omega(\sigma_{ij}^S)$:

$$(6.2) \quad \hat{\Omega}(\sigma_{ij}^S) \geq \Omega(\sigma_{ij}^S) \equiv \int_0^{\sigma_{ij}^S} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij},$$

gdzie $\Omega(\sigma_{ij}^S)$ obliczona jest dla dowolnej drogi. Powyższe twierdzenie wyprowadzone było przy założeniu intuicyjnym, że musi istnieć jedna lub kilka dróg, które prowadzą do maksymalnej energii dopełniającej. Sposób określenia maksymalnej wartości $\hat{\Omega}(\sigma_{ij}^S)$ podać można łatwo dla pewnych szczególnych przypadków. Można wykazać, że następujące drogi maksymalizują energię dopełniającą:

- 1) jeśli występuje tylko jedna składowa wektora uogólnionych naprężeń (np. moment zginający w belce) i nie występuje zmiana znaku naprężenia;
- 2) jeśli końcowy stan naprężenia σ_{ij}^S osiągnąć można wzdłuż drogi odwracalnej (tzn. «sprężyste»);
- 3) jeśli materiał jest sprężysto-plastyczny z izotropowym wzmocnieniem i obciążenie jest proporcjonalne.

Przeprowadzenie ścisłego dowodu nierówności (6.1) dla małych ugięć oraz uogólnienie metody oszacowań na duże ugięcia możliwe było dzięki podstawowej pracy MARTINA i PONTERA [27]. Autorzy ci podali precyzyjną definicję deformacyjnej teorii plastyczności, która pozwala traktować materiały plastyczne («zależne od drogi») w ramach koncepcji nieliniowych materiałów sprężystych.

Dla materiałów niesprężystych nie istnieje jednoznaczna zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Jeżeli naprężenie zmienia się od $\sigma_{ij}=0$ do σ_{ij}^a , to odpowiadający stan odkształcenia ε_{ij}^a zależy od σ_{ij}^a oraz od drogi obciążenia. Załóżmy jednak, że historia naprężenia od $\sigma_{ij}=0$ do σ_{ij}^a ograniczona jest do takich dróg obciążenia, dla których energia dopełniająca osiąga ekstremum. Wówczas otrzymuje się jedno-jednoznaczną zależność odkształceń od naprężeń tak, jak w deformacyjnej teorii plastyczności. Ponadto w pracy [27] udowodniono podstawową własność ekstremalnej pracy dopełniającej, polegającą na tym, że staje się ona potencjałem dla odkształceń. Innymi słowy wykazano, że nierówność (6.2) (gdzie symbol $\Omega(\sigma_{ij}^S)$ oznacza energię obliczoną wzdłuż dowolnej drogi) jest wystarczającym warunkiem, aby

$$(6.3) \quad \varepsilon_{ij}^S = \left. \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\sigma_{ij}^S}.$$

Podobny wynik zachodzi dla funkcji energii $W(\varepsilon_{ij})$. Rozważając drogi w przestrzeni odkształceń od $\varepsilon_{ij}=0$ do ε_{ij}^b , wyróżnić można pewną klasę dróg ekstremalizujących funkcję $W(\varepsilon_{ij})$:

$$(6.4) \quad \hat{W}(\varepsilon_{ij}) \leq W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}^b} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Napężenie oblicza się teraz ze wzoru

$$(6.5) \quad \sigma_{ij}^b = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\varepsilon_{ij}^b}.$$

Łatwo wykazać, że droga, która maksymalizuje $\Omega(\sigma_{ij})$ minimalizuje jednocześnie $W(\varepsilon_{ij})$.

Wreszcie można wykazać własność wypukłości funkcji $\hat{W}(\varepsilon_{ij})$ i $\hat{\Omega}(\sigma_{ij})$. Na przykład mamy

$$(6.6) \quad \hat{W}(\varepsilon_{ij}^a) - \hat{W}(\varepsilon_{ij}^b) - (\varepsilon_{ij}^a - \varepsilon_{ij}^b) \sigma_{ij}^b \geq 0.$$

Podobną nierówność (5.12) otrzymaliśmy dla materiałów sprężystych. Wypukłość wspomnianych funkcji pozwala na udowodnienie nowej wersji twierdzeń o maksimum całkowitej energii dopełniającej i minimum całkowitej energii potencjalnej dla konstrukcji lub ciała z «hipotetycznego» statecznego materiału sprężystego. Otrzymuje się

$$(6.7) \quad \int_V \hat{\Omega}(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} \hat{p}_i u_i dS \geq \int_V \Omega(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} p_i u_i dS$$

oraz

$$(6.8) \quad \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_r} p_i u_i dS \geq \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_r} p_i u_i dS.$$

Z powyższych nierówności otrzymuje się oszacowanie (6.1) lub też alternatywną postać [28]

$$(6.9) \quad \int_{S_r} p_i^s (u_i - u_i^s) dS \leq E_k - \int_V \hat{W}(\varepsilon_{ij}^s) dV,$$

formalnie identyczną z (5.15). Tak jak poprzednio dla materiałów sprężystych nierówność (6.9) i (6.8) interpretować można albo jako zasadę minimum energii potencjalnej dla małych ugięć, albo jako obrane kryterium dla skończonych ugięć, jeśli konfiguracja jest stateczna.

W tym miejscu pojawia się pewna trudność. W przypadku materiałów sprężystych kryterium (5.15) ma sens fizyczny, gdyż odpowiada wymaganiu, aby w położeniu statecznej równowagi całkowita energia potencjalna była najniższa. Dla materiałów plastycznych, zastępowanych w pracy [28] przez hipotetyczny materiał sprężysty, energii $W(\varepsilon_{ij})$ nie można odzyskać, jest ona nieodwracalnie stracona i zamienia się na ciepło. Nazwa «całkowita energia potencjalna» [w odniesieniu do nierówności (6.8)] jest czysto umowna i wprowadzona została przez formalne podobieństwom wzorów (5.15) i (6.8). W rezultacie interpretacja nierówności (6.8) jako warunku stateczności dla konstrukcji z materiału niesprężystego jest zupełnie niejasna. W tym miejscu tkwi zasadnicza słabość metody Martina i Pontera.

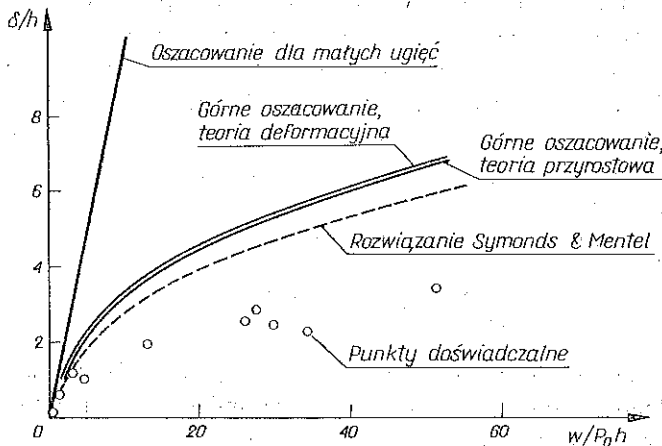
Mimo braku absolutnej ścisłości teoria omawiana prowadzi do zadowalających ocen ugięć w wielu ważnych zagadnieniach praktycznych. Jako ilustrację rozważmy ten sam problem zamocowanej belki sztywno-plastycznej, omawianej wyczerpująco w p. 2. Aby zastosować (6.9) należy w pierwszym rzędzie znaleźć statyczną

zależność siły punktowej P od ugięcia środka belki δ w ramach deformacyjnej teorii plastyczności.

Droga, wzdłuż której praca osiąga wartość minimalną w deformacyjnej teorii plastyczności, nie może zawierać ani obciążenia, ani neutralnego obciążenia wzdłuż powierzchni granicznej. Stosując zasadę prostokątowości całkowitego wektora odkształcenia do powierzchni granicznej, otrzymuje się następujące rozwiązanie k :

$$(6.10) \quad \frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\delta}{h} \right)^2, \quad \frac{N}{N_0} = \frac{\delta}{2h} \leq 1, \quad \frac{P}{P_0} = 2 \left(\frac{\delta}{h} \right), \quad \frac{\delta}{2h} > 0, \quad \frac{N}{N_0} = 1.$$

Wyniki obliczeń i porównanie z innymi teoriami oraz punktami doświadczalnymi przedstawione jest na rys. 11. W porównaniu ze ścisłym rozwiązaniem jest to oszacowanie z nadmiarem zgodne z przewidywaniami.



Rys. 11. Oszacowania dużych ugięć plastycznych belek

Przejdźmy z kolei do omówienia drugiej koncepcji sformułowania zagadnienia oszacowań, zaproponowanej w [29]. Dowód podstawowej nierówności przeprowadzony będzie dla ośrodka trójwymiarowego, natomiast przykład dotyczy będzie dużych ugięć płyt kołowych.

Rozważmy dwa identyczne sztywno-plastyczne ciała w stanie nieodkształcalnym. Niech jedno ciało obciążone będzie idealnym impulsem (siły powierzchniowe równe są zero, dany jest rozkład prędkości początkowych), drugie natomiast statycznym układem sił działającym na części powierzchni. Obliczmy całkowitą moc naprężeń w problemie statycznym dla rzeczywistych prędkości w procesie dynamicznym. Ponieważ powierzchnie zdeformowanych ciał są w obu przypadkach na ogół różne, wspomniana moc zdefiniowana jest poprawnie w odniesieniu do początkowej, niezdeformowanej konfiguracji. Stosować będziemy zatem opis Lagrange'a. Statyczny układ S_{KL}^S , U_L^S , T_L^S spełnia równania statycznej równowagi (5.3) i (5.4). Niezależny układ wielkości kinematycznych oznaczymy przez U_K , \dot{U}_K , \dot{E}_{KL} , gdzie pochodna względem czasu tensora odkształceń Greena (5.2) wynosi

$$(6.11) \quad 2\dot{E}_{KL} = \dot{U}_{K,L} + \dot{U}_{L,K} + \dot{U}_{M,K} \dot{U}_{M,L} + U_{M,K} \dot{U}_{M,L}.$$

Wykorzystując (6.11), moc naprężeń S_{KL}^S na prędkościach odkształceń \dot{E}_{KL} przekształcić można do postaci

$$(6.12) \quad \int_{V^0} S_{KL}^S \dot{E}_{KL} dV^0 = \int_{V^0} (S_{KL}^S + S_{KM}^S U_{L,M}) \dot{U}_{K,L} dV^0.$$

Łatwo zauważyć, że siły określone przez wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równania (6.12) nie są w równowadze ze statycznym obciążeniem T_L^S . Aby móc zastosować równania (5.3) i (5.4), musimy dodać i odjąć wyraz $S_{KM}^S U_{L,M}^S$. Przekształcając otrzymane wyrażenie za pomocą twierdzenia Gaussa znajdziemy

$$(6.13) \quad \int_{V^0} S_{KL}^S \dot{E}_{KL} dV^0 = \int_{S^0} T_K^S \dot{U}_K dS^0 + \int_{V^0} S_{KL}^S \dot{U}_{M,K} (U_{M,L} - U_{M,L}^S) dV^0.$$

Jest to uogólnienie zasady mocy wirtualnych na przypadek dużych odkształceń. W powyższym wzorze wielkości statyczne i kinematyczne są od siebie niezależne. Dodatkowy wyraz w (6.13) zeruje się w następujących przypadkach: 1) jeśli gradienty przemieszczeń są małe $U_{M,L} \approx 0$, $U_{M,L}^S \approx 0$ (nieskończenie małe odkształcenia); 2) jeśli pola przemieszczeń w rozwiązaniu problemu statycznego i dynamicznego są takie same $U_K = U_K^S$; 3) jeśli wielkości statyczne i kinematyczne odpowiadają rozwiązaniu tego samego problemu brzegowego. Wówczas (6.13) wyraża równość wewnętrznej i zewnętrznej dysypacji:

$$(6.14) \quad \int_{V^0} S_{KL} \dot{E}_{KL} dV^0 = \int_{S^0} T_K \dot{U}_K dS^0.$$

Nas interesuje jednak pełny wzór (6.13). W przypadku obciążenia impulsowego siły powierzchniowe równe są zeru, $T_K = 0$, natomiast równanie (6.14) musi być uzupełnione przez siły bezwładności:

$$(6.15) \quad \int_{V^0} S_{KL} \dot{E}_{KL} dV^0 = - \int_{V^0} m \ddot{U}_K \dot{U}_K dV^0.$$

Odejmując stronami (6.13), całkując względem czasu w granicach $[0, t_f]$ i wykorzystując postulat stateczności materiału

$$(6.16) \quad (S_{KL} - S_{KL}^S) \dot{E}_{KL} \geq 0,$$

otrzymujemy

$$(6.17) \quad E_K \geq \int_0^{t_f} dt \int_{S^0} T_K^S \dot{U}_K dS^0 + R,$$

gdzie początkowa energia kinetyczna wynosi

$$(6.18) \quad E_K = \int_0^{t_f} dt \int_{V^0} (-m \ddot{U}_K) \dot{U}_K dV^0,$$

natomiast

$$(6.19) \quad R = \int_0^{t_f} dt \int_{S^0} S_{KL}^S \dot{U}_{M,K} (U_{M,L} - U_{M,L}^S) dV^0.$$

Niech statyczny układ obciążeń składa się z siły skupionej. Dla geometrycznie statecznych konfiguracji siła ta jest rosnącą funkcją statycznych przemieszczeń U_K^S lub też pewnej normy przemieszczenia $\delta^s = \|U_K^S\|$. Podobnie normę przemieszczenia dynamicznego oznaczamy przez $\delta = \|U_K\|$. Wówczas (6.17) przepisać można w postaci

$$(6.20) \quad E_K \geq \int_0^{\delta_f} T_K^S(\delta^s) dU_K + R.$$

Jeśli kierunki wektorów T_K^S i U_K są takie same, to można mówić o absolutnych długościach i nierówność (6.20) można zastąpić przez

$$(6.21) \quad E_K \geq \int_0^{\delta_f} \|T_K^S(\delta^s)\| d\delta + R.$$

Przy wyprowadzaniu powyższej nierówności nie było do tej pory mowy, w jaki sposób wielkość δ^s zależy od wielkości δ . Z kolei można zrobić użytek z dowolności wyboru δ^s i statyczne ugięcie związać tak z ugięciem dynamicznym δ , aby wyraz R , zdefiniowany przez (6.19), był nieujemny. Jeśli taką zależność uda się uzyskać, to R można pominąć w (6.21) bez naruszenia kierunku nierówności i wzór na górną ocenę ugięć uprości się do postaci

$$(6.22) \quad E_K \leq \int_0^{\delta_f} \|T_K^S(\delta^s)\| d\delta, \quad \delta^s = f(\delta).$$

Zasadnicza trudność w zastosowaniu przedstawionej metody do oszacowania dynamicznych ugięć konstrukcji polega na określeniu znaku wyrażenia R . Zgodnie z (6.19) wielkość ta zależy od rozwiązania problemu statycznego, a więc od S_{KL}^S , $U_{M,L}^S$ (przyjmuje się, że wielkości te są znane) oraz od niewiadomego rozwiązania problemu dynamicznego, tj. od U_M, \dot{U}_M . W odróżnieniu od geometrycznie nieliniowych zagadnień sprężystych [wzory (5.9) i (5.14)] wyrażenie podcałkowe w (6.19) nie jest formą kwadratową i nie można łatwo podać warunków dodatniości tego wyrażenia. Na przykład dla belki nieliniowy wyraz R przyjmuje postać

$$(6.23) \quad R = \int_0^L N \dot{w}(w_{,x} - w_{,x}^S) dx,$$

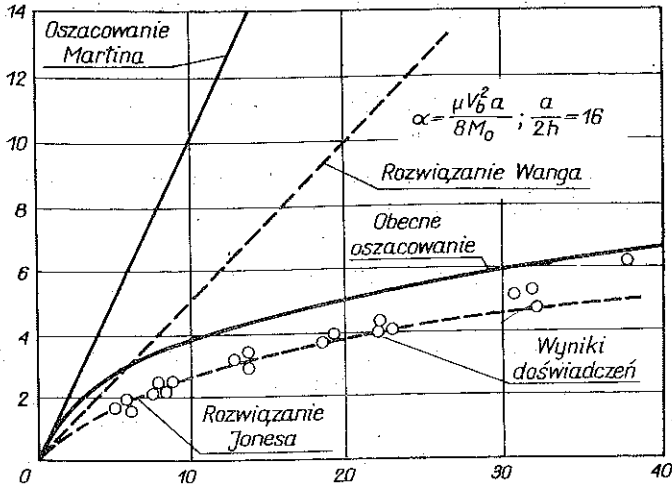
natomiast dla płyty kołowej

$$(6.24) \quad R = \int_0^R N_r \dot{w}(w_{,r} - w_{,r}^S) r dr,$$

gdzie N jest siłą membranową w kierunku radialnym. W pracy [29] wykazano nieujemność funkcji (6.24) dla problemu dynamicznego z jednorodnym rozkładem prędkości początkowej i problemu statycznego z siłą punktową w środku płyty. Przyjęty był następujący warunek normalizacji statycznego pola ugięć:

$$(6.25) \quad \frac{w(r, t)}{w^s(r, t)} \Big|_{r=0} = 1,$$

czyli $\delta = \delta^s$. Porównanie uzyskanego tą drogą oszacowania z przewidywaniami innych teorii oraz wynikami doświadczeń jest przedstawione na rys. 12.



Rys. 12. Porównanie rozwiązania ścisłego i oszacowań dla maksymalnych ugięć płyty plastycznej

Ilościowe różnice pomiędzy oszacowaniami obliczonymi na podstawie dwóch różnych teorii są niewielkie i mają się do siebie tak, jak odpowiednie rozwiązania statyczne dla przyrostowej i deformacyjnej teorii plastyczności. Jednakże potrzebne są dalsze badania w tym kierunku, aby wyeliminować niektóre dodatkowe założenia i niescisłości w dotychczasowych dowodach.

7. METODY WARIACYJNE

W ciągu ostatnich paru lat sformułowano cały szereg zasad ekstremalnych, charakteryzujących różne zachowania się ciał i konstrukcji w zakresie plastycznym w wyniku przyłożonych obciążeń dynamicznych. Zasady te przedstawiają duże potencjalne możliwości wykorzystania w problemach praktycznych, jednak do tej pory nie znalazły jeszcze tylu zastosowań, na ile zasługują. Większość znanych twierdzeń dotyczy infinitesimalnych odkształceń, jednakże najnowsze badania przyniosły uogólnienie tych metod na skończone deformacje. Na uwagę zasługuje tu praca LEE i NI [30], w której sformułowana została zasada wariacyjna i zasada minimum dla skończonych wariacji pola przyspieszeń.

Stosowany będzie opis Lagrange'a. Oznaczmy przez \dot{U}_K^* dopuszczalne pole przyspieszeń, spełniające kinematyczne warunki brzegowe oraz warunki nieciągłości. Niech dane będą w ciele siły masowe F_M , naprężenia S_{KL} , prędkości \dot{U}_K , przemieszczenia U_K oraz siły T_M działające na powierzchni S^0 . Wielkości S_{KL} , U_M , T_M spełniać muszą naprężeniowe warunki na brzegu ciała:

$$(7.1) \quad S_{KL}(\delta_{ML} + U_{M,L})N_K = T_M.$$

Rzeczywiste pole przyspieszeń \dot{U}_K , zawarte w klasie kinematycznie dopuszczalnych pól, spełnia dodatkowo równania dynamicznej równowagi

$$(7.2) \quad [S_{KL}(\delta_{ML} + U_{M,L})]_{,K} + \rho_0(F_M - \dot{U}_M) = 0.$$

Kinematycznie dopuszczalne pole przyspieszeń odkształceń \dot{E}_{KL}^* , wynikające z \dot{U}_K^* zdefiniowano za pomocą wzoru

$$(7.3) \quad \dot{E}_{KL}^* = \frac{1}{2}(\dot{U}_{K,L}^* + \dot{U}_{L,K}^* + \dot{U}_{M,K}^* \dot{U}_{M,L} + \dot{U}_{M,L}^* \dot{U}_{M,K} + 2\dot{U}_{M,K} \dot{U}_{M,L}).$$

Rozważmy z kolei następujący funkcjonał:

$$(7.4) \quad J(\dot{U}_M) = \frac{1}{2} \int_{V^0} \rho_0 \dot{U}_M^2 dV^0 + \int_{V^0} S_{KL} \dot{E}_{KL} dV^0 - \int_{S_T^0} T_M \dot{U}_M dS^0 - \int_{V^0} \rho_0 F_M \dot{U}_M dV^0.$$

Posługując się wzorami (7.1)–(7.4) łatwo wykazać stacjonarność funkcjonału (7.4), tzn. znikanie pierwszej wariacji $\delta_{acc} J = 0$. Należy jeszcze raz zaznaczyć, że przy obliczaniu wariacji funkcjonału J wielkości S_{KL} , T_M i F_M traktuje się jako znane, natomiast przyspieszenie może ulegać skończonym zmianom. Sformułowana zasada stacjonarności może być pomocna przy formułowaniu zagadnień matematycznych, ponieważ równaniem Eulera dla funkcjonału (7.4) jest równanie ruchu. Można udowodnić silniejsze twierdzenie. Oznaczmy przez J^* funkcjonał (7.4) obliczony dla kinematycznie dopuszczalnego pola przyspieszeń:

$$(7.5) \quad J^* = \frac{1}{2} \int_{V^0} \rho_0 \dot{U}_M^{*2} dV^0 + \int_{V^0} S_{KL} \dot{E}_{KL}^* dV^0 - \int_{S_T^0} T_M \dot{U}_M^* dS^0 - \int_{V^0} \rho_0 F_M \dot{U}_M^* dV^0.$$

Obliczając różnice funkcjonałów J i J^* otrzymujemy

$$(7.6) \quad J - J^* = -\frac{1}{2} \int_{V^0} \rho_0 (\dot{U}_M - \dot{U}_M^*)^2 dV^0.$$

Ponieważ całka po prawej stronie powyższej równości jest dodatnio określona, z (7.6) wynika zasada absolutnego minimum:

$$(7.7) \quad J^* \geq J.$$

W ten sposób wykazano, że rzeczywiste pole przyspieszeń minimalizuje funkcjonał (7.5). Udowodniona zasada może być przydatna przy opracowaniu numerycznych metod rozwiązywania problemów początkowo brzegowych. Brak jest do tej pory studium porównawczego, pokazującego zalety stosowania własności minimum funkcjonału w stosunku do metod różnic skończonych lub elementów skończonych. W szczególnych przypadkach, kiedy kinematycznie dopuszczalne pola \dot{U}_K^* i \dot{U}_K

zawierają rzeczywiste rozwiązanie, naprężenie we wzorze (7.5) można wyliczyć ze stowarzyszonego prawa płynięcia $S_{KL} = \partial D(\dot{E}_{LM}) / \partial \dot{E}_{KL}$ i wykorzystać własności minimum funkcjonału J^* przy poszukiwaniu rozwiązań analitycznych. Taki właśnie przypadek rozważył Lee i Ni jako ilustrację zaproponowanej metody. Przyjmując pole przyspieszeń dla zamocowanej belki z dokładnością do kilku swobodnych parametrów lub funkcji i stosując zasadę minimum, otrzymano w pracy [30] ściśle rozwiązanie tego problemu, uzyskane na innej drodze przez JONESA [9].

Taki przypadek traktować należy jednak jako wyjątkowy, ponieważ na ogół nie znamy *a priori* ściśłego rozwiązania lub też rozwiązanie to nie wyraża się przez elementarne funkcje. Dlatego też, jeśli chodzi o technikę analityczną rozwiązywania problemów, zasada minimum sformułowana w podanej formie nie może mieć większego zastosowania.

Omawiając zastosowania metod wariacyjnych do zagadnień dużych, dynamicznych ugięć konstrukcji odnotować należy jeszcze pracę TAYA i MURA [31]. Autorzy ci zaproponowali uogólnienie zasady stacjonarności Hamiltona na przypadek układów niezachowawczych, jakim są sztywno-plastyczne konstrukcje poddane obciążeniu impulsowemu.

Zasada Hamiltona głosi, że rzeczywisty ruch zapewnia funkcjonałowi J stacjonarność ze względu na wszystkie możliwe wariacje pola przemieszczeń, spełniające dane warunki na początku i końcu ruchu. Funkcjonał J ma postać

$$(7.8) \quad J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt,$$

gdzie T i U oznaczają odpowiednio całkowitą energię kinetyczną i potencjalną ciała. Dla układów niekonserwatywnych postuluje się w [31] własność stacjonarności w sensie znikania pierwszej wariacji,

$$(7.9) \quad \delta J_1 = 0,$$

zmodyfikowanego funkcjonału J_1 , w którym występuje dodatkowo funkcja pracy plastycznej E :

$$(7.10) \quad J_1 = \int_{t_0}^{t_1} (T - U - E) dt.$$

Własność (7.9) dla funkcjonału J_1 , podana została bez dowodu w postaci postulatu. Autorzy nie ustosunkowali się do zasadniczej trudności w opisie ciał plastycznych polegającej na tym, że dobrze zdefiniowaną wielkością jest nie praca plastyczna, lecz moc $D = E$. Jedynie w szczególnym przypadku pól prędkości o stałym kształcie w trakcie całego procesu deformacji, całkując moc względem czasu, można w prosty sposób obliczyć prace. Dlatego też podając zastosowania proponowanej metody Taya i Mura ograniczyli się do rozwiązań dla belek i płyt z rozdzielonymi zmiennymi. W tym miejscu można znaleźć punkt styczności z przybliżonymi metodami KALISZKY'EGO [21] i JONESA [16], gdzie również przyjmuje się rozdzielenie zmiennych.

Na przykład dla belki wspornikowej ze stacjonarnym przegubem plastycznym, funkcjonal (7.10) przyjmuje postać

$$(7.11) \quad \delta J = \delta \int_0^{t_f} dt \int_S \left(\frac{1}{2} m \dot{w}^2 + p w \right) dS = \int_0^{t_f} dt \int M_0 d\theta,$$

gdzie θ jest kątem obrotu w przegubie. Zakłada się liniowy rozkład pola prędkości:

$$(7.12) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

oraz przyjmuje się funkcje amplitudy zawierające dwa swobodne parametry

$$(7.13) \quad w_0 = \frac{1}{2} C_1 (t - t_f)^2 + C_2.$$

Funkcja ta tożsamościowo spełnia warunek dla końca ruchu $\dot{w}_0(t_f) = 0$. Z warunków początkowych $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = V_0$ otrzymujemy natomiast

$$(7.14) \quad t_f = -\frac{V_0}{C_1}, \quad C_2 = -\frac{C_f}{2} t_f^2.$$

Stałą C_1 oblicza się z warunku stacjonarności funkcjonu $\partial J / \partial C_1 = 0$.

Naszkicowana powyżej metoda rozwiązania może być stosowana dla innych konstrukcji również w zagadnieniach dużych ugięć. Zasadniczym jej brakiem jest korzystanie bez dowodu z uogólnionej zasady Hamiltona. Ponadto własność stacjonarności, w przeciwieństwie do własności minimum, nie daje możliwości rozstrzygnięcia, które z dwóch rozwiązań przybliżonych jest dokładniejsze. W omawianym przypadku dokładność zależeć będzie zarówno od wyboru przestrzennego pola prędkości (7.12) jak też od przyjęcia odpowiedniej liczby wyrazów w szeregu na amplitudę.

Mimo przedstawionych uwag krytycznych zaproponowana w [31] metoda wariacyjna jest interesująca i zasługuje na uwagę, ponieważ stanowi próbę oparcia przybliżonych metod Kaliszky'ego [21] i Jonesa [16] na ściślejszych podstawach teoretycznych.

8. UWAGI KOŃCOWE

W przedstawionej pracy dokonany został krótki przegląd znanych w literaturze metod przybliżonego rozwiązania dynamicznych problemów plastyczności w zakresie skończonych odkształceń. Metody te charakteryzują się różnym stopniem złożoności oraz precyzji w przyjmowaniu założeń i wyciąganiu wniosków. W części omawianych metod wykorzystywane było w pewien sposób pojęcie stanu statycznie dopuszczalnego (w zagadnieniach oszacowań występuje ściśle rozwiązanie problemu statycznego, które jest zarazem rozwiązaniem statycznie dopuszczalnym). Znalezienie maksymalnych trwałych ugięć w procesie dynamicznym sprowadzone

zostało więc do rozwiązania odpowiedniego problemu statycznego. Wkład pracy przy takim sformułowaniu będzie oczywiście znacznie mniejszy jednakże stosowalność omawianego podejścia ograniczona jest do przypadków, dla których statyczne rozwiązanie problemu dużych ugięć jest znane. Z kolei uproszczone metody wykorzystujące pojęcie stanów kinematycznie dopuszczalnych wolne są od tej niedogodności, jednakże wymagają bardziej pracowitych obliczeń.

Nie sposób jest wskazać na jedną najbardziej przydatną i uniwersalną metodę. Każda z nich wnosi pewne oryginalne elementy do analizy teoretycznej i stosuje się do nieco odmiennych przypadków (np. do płyt kołowo-symetrycznych lub prostokątnych, do materiałów sztywno-plastycznych lub sztywno-lepkoplastycznych). Analizując przykłady liczbowe podane przez różnych autorów dla zilustrowania proponowanych przez nich metod, stwierdzić należy dobrą lub też bardzo dobrą zgodność z nielicznymi «ściśłymi» rozwiązaniami bądź też wynikami doświadczeń. Należy być jednak ostrożnym przy uogólnianiu powyższych wniosków na inne konstrukcje lub nawet na inne warunki obciążenia lub podparcia dla tej samej konstrukcji.

Najważniejszą wadą wszystkich proponowanych metod jest brak możliwości oceny dokładności uzyskanych wyników. Próby ścisłego wyprowadzenia górnej oceny na ugięcia, omówione krytycznie w p. 6, nie zostały uwieńczone do tej pory pełnym powodzeniem. Ponadto żadna z przedstawionych metod nie pozwala na dowolne zwiększanie dokładności przybliżonego rozwiązania, np. przez przyjęcie większej ilości wyrazów lub wolnych parametrów.

Nie podważając zaufania do użyteczności omówionych teorii i kierując się względami wygody przy dokonywaniu wyboru którejkolwiek z nich, należy jednocześnie zdawać sobie sprawę z natury uproszczeń i odpowiednio traktować przybliżone wyniki.

Należy sądzić, że dokonujący się szybki postęp w badaniach nad dynamiką konstrukcji plastycznych przyniesie w niedługim czasie rozstrzygnięcie wielu spornych kwestii i doprowadzi do opracowania zadowalającej metody analitycznej analizy dużych ugięć konstrukcji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE, *The load carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., 23, 1, 49–55, 1956.
2. M. K. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech., 18, 5, 599–614, 1966.
3. M. K. DUSZEK, *Równania dużych ugięć powłok plastycznych*, Prace IPPT 13/1971.
4. M. K. DUSZEK, A. SAWCZUK, *O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych*, Rozpr. Inżyn., 18, 4, 715–731, 1970.
5. M. K. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Proc. IUTAM Symposium Theory of Thin Shells, Copenhagen 1967, 474–388, Springer, 1969.
6. N. JONES, *Consistent equations for the large deflections of structures*, Bull. Mech. Engng. Educ., 10, 9, 20, 1971.
7. N. JONES, *A theoretical study of the dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite deflections*.

8. P. S. SYMONDS, T. I. MENDEL, *Impulsive loading of plastic beams with axial constraints*, J. Mech. Phys. Solids, **6**, 186–202, 1958.
9. N. JONES, *The influence of strain-hardening and strain rate sensitivity on the permanent deformation of impulsively loaded rigid-plastic beams*, Int. J. Mech. Sci., **9**, 12, 777–796, 1967.
10. N. JONES, *Finite deflections of rigid-viscoplastic strain-hardening annular plate loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **35**, 349, 1968.
11. N. JONES, *Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically*, Int. J. Solids Structures, **4**, 593, 1968.
12. N. JONES, *The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively*, J. Appl. Mech., **37**, 416, 1970.
13. J. B. MARTIN, *Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., **90**, 27–42, 1964.
14. W. J. MORALES, G. E. NEVILL, *Lower bound on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua*, AIAA Journal, **8**, 2043–2046, 1970.
15. M. K. DUSZEK, *On minimum principles in finite plasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sérié Sci. Techn., **21**, 89, 1973.
16. N. JONES, *The dynamic plastic behaviour of fully clamped rectangular plates*, Int. J. Solids Structures, **6**, 1499, 1970.
17. R. M. WALTERS, N. JONES, *An approximate theoretical study of the dynamic plastic behaviour of shells*, M.I.T. Dept. Ocean Eng., Report 71-12, August 1971.
18. T. WIERZBICKI, *A method of approximation in the large deflection analysis of impulsively loaded rigid-plastic structures*, Acta Technica, 3-4, **68**, 403–413, 1970.
19. A. L. FLORENCE, *Circular plate under a uniformly distributed impulse*, Int. J. Solids Structures, **2**, 37–47, 1966.
20. J. M. KELLY, T. WIERZBICKI, *Finite deflection of a circular viscoplastic plate subjected to projectile impact*, Int. J. Solids Structures, **4**, 1081–1092, 1968.
21. S. KALISZKY, *Large deformations of rigid-viscoplastic structures under impulsive and pressure loading*, J. Strud. Mech., **1**, 3, 295–317, 1973.
22. T. WIERZBICKI, A. I. FLORESCNE, *A theoretical and experimental investigation of impulsively loaded clamped circular viscoplastic plates*, Int. J. Solids Structures, **6**, 553–568, 1970.
23. T. WIERZBICKI, *Large deflections of strain rate sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech., **21**, 1, 67–79, 1969.
24. T. WIERZBICKI, *Nicopublikowany list autora do J. B. Martina*.
25. J. B. MARTIN, *Displacement bounds for dynamically loaded elastic structures*, J. Mech. Eng. Sc., **10**, 3, 213–218, 1968.
26. J. B. MARTIN, *Extended displacement bound theorems for work hardening continua subjected to impulsive loading*, Int. J. Solids Structures, **2**, 9–26, 1966.
27. A. R. S. PONTER, J. B. MARTIN, *Some extremal properties and energy theorems for inelastic materials and their relations to the deformation theory of plasticity*, University Leicester, Eng. Dept., Report 70-19, July 1970.
28. J. B. MARTIN, A. R. S. PONTER, *Bounds on large deformations of impulsively loaded elastic-plastic structures*, University Leicester, Eng. Dept., Report 70-22, August 1970.
29. T. WIERZBICKI, *Bounds on large dynamic deformations of structures*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, **96**, 267–276, 1970.
30. L. H. N. LEE, CHI-MOU NI, *A minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation*, Arch. Mech., **25**, 3, 457–468, 1973.
31. M. TAYA, T. MURA, *Dynamic plastic behaviour of structures under impact loading investigated by the extended Hamilton principle*, Int. J. Solids Structures, **10**, 197–209, 1974.

Резюме

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ КОНСТРУКЦИЙ НАГРУЖЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИ
КРИТИЧЕСКОЕ ОБОЗРЕНИЕ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

Работа составляет попытку классификации и критической оценки доступных в литературе разработок на тему больших прогибов пластических и вязкопластических конструкций, подвергнутых динамическим нагрузкам. Обсуждены четыре наиболее распространенных метода приближенного решения начально-граничных задач. Проведено обсуждение аппроксимационных предположений с точки зрения точности и эффективности методов. Рассуждения иллюстрированы примерами для простых балочных, плиточных и оболочечных конструкций.

SUMMARY

LARGE DEFLECTIONS OF DYNAMICALLY LOADED STRUCTURES
A CRITICAL REVIEW OF EXISTING METHODS

An attempt is made to classify and critically evaluate the existing literature on large deflections of plastic and viscoplastic structures subjected to dynamic loading. Four most widely used approximate methods for solving initial-boundary value problems are described. In each method a detailed discussion of simplifying assumptions is made with an emphasis on efficiency and accuracy of a given technique. As an illustration exemplary problems are solved for simple structures including beams, circular plates and cylindrical shells.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 września 1975 r.