

NIESKOŃCZONA SPRĘŻYSTA BELKA TIMOŠHENKI UDERZONA POPRZECZNIE SKOŃCZONYM PRĘTEM SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

STEFAN JAN K O W A L S K I (POZNAŃ)

W pracy rozważa się problem uderzenia nieskończonej sprężystej belki przez skończony sprężysto-plastyczny pręt. Analizę zjawisk falowych prowadzi się wykorzystując równanie Timošhenki w przypadku belki i równaniu jednowymiarowych fal podłużnych w przypadku pręta.

W pracy określa się: czas kontaktu pręta z belką, siłę kontaktową, prędkość zginania, moment gnący i siłę tnącą w belce jak również długości uplastycznionego odcinka pręta, zmianę średnicy pręta spowodowaną odkształceniami trwałymi, moc pręta oraz wpływ stałych (określających własności fizyczne i wymiary geometryczne układu pręt-belka) na zmianę w/w efektów zderzenia.

Problem rozwiązano w sposób ścisły, wykorzystując metodę wykładniczej transformacji Fouriera, transformację Laplace'a i metodę charakterystyk.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- x_1 współrzędna mierzona wzdłuż osi belki od punktu uderzenia (rys. 1),
- y_1 współrzędna mierzona wzdłuż osi pręta od punktu uderzenia (rys. 1),
- t_1 czas,
- $w_1(x_1, t_1)$ całkowite ugięcie osi belki,
- $u_1(y_1, t_1)$ przemieszczenie przekroju y_1 pręta,
- $W_1(x_1, t_1)$ prędkość zginania belki,
- $U_1(y_1, t_1)$ prędkość przemieszczeń przekroju y_1 pręta,
- V_{10} prędkość uderzenia,
- $V_{1s} = \frac{\sigma_{1s}}{\rho_p c_{1s}}$ prędkość uderzenia odpowiadająca granicy plastyczności,
- L_1 długość pręta,
- $r = (I_b/E_b)^{\frac{1}{2}}$ promień bezwładności przekroju belki na zginanie,
- $c_{1s} = (E_p/\rho_p)^{\frac{1}{2}}$ prędkość propagacji sprężystej fali podłużnej w pręcie,
- $c_{1p} = (E_w/\rho_p)^{\frac{1}{2}}$ prędkość propagacji plastycznej fali podłużnej w pręcie,
- $c_g = (E_b/\rho_p)^{\frac{1}{2}}$ prędkość propagacji fali podłużnej w belce,
- $c_t = (kG_b/\rho_b)^{\frac{1}{2}}$ prędkość propagacji fali poprzecznej w belce,
- I_b moment bezwładności przekroju belki na zginanie,
- F_b przekrój belki,
- F_p przekrój pręta,
- E_b moduł Younga dla belki,
- E_p moduł Younga dla pręta,

G_p	moduł odkształcenia postaciowego dla belki,
ρ_b	gęstość belki,
ρ_p	gęstość pręta,
k	współczynnik ścinania belki,
$\varepsilon(y_1, t_1)$	odkształcenie pręta,
ε_s	odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności,
$\sigma_1(y_1, t_1)$	naprężenie w pręcie,
σ_{1s}	naprężenie odpowiadające granicy plastyczności pręta,
$g_1(x_1, t_1)$	funkcja obciążenia belki,
$M_1(x_1, t_1)$	moment gnący w belce,
$T_1(x_1, t_1)$	siła tnąca w belce,
$\psi(x_1, t_1)$	kąt ugięcia belki wywołany momentem zginającym (kąt obrotu),
$\eta(t_1)$	funkcja Heaviside'a,
$\delta(x_1)$	funkcja Diraca,
j	jedność urojona
p	parametr transformacji Laplace'a,
α	parametr transformacji Fouriera.

W pracy korzysta się z następujących zmiennych i prametrów bezwymiarowych:

$$\begin{array}{llll}
 x = x_1/r, & y = y_1/r, & L = L_1/r, & t = t_1 c_g/r, \\
 w = w_1/r, & u = u_1/r, & W = W_1/c_g, & U = U_1/c_g, \\
 V_0 = V_{01}/c_g, & V_s = V_{1s}/c_g, & c = c_1/c_g, & c_s = c_{1s}/c_g, \\
 c_p = c_{1p}/c_g, & q = (c_{1s} - c_{1p})/(c_{1s} + c_{1p}), & \mu = \rho_p A_p/\rho_b A_b, & \\
 \gamma = c_g^2/c_t^2, & a = 2/(\gamma - 1), & b = 1/\sqrt{\gamma}, & \\
 B = \sqrt{(\gamma + 1)/2}, & N = (\gamma - 1)/(\gamma + 1), & M = M_1 r/E_b I_b, & \\
 T = T_1/kG_b A_b, & \sigma = \sigma_1/\rho_p c_g^2, & \sigma_s = \sigma_{1s}/\rho_p c_g^2. &
 \end{array}$$

Różniczkowanie względem bezwymiarowego czasu oznacza się kropką nad symbolem (np. \dot{w}), a względem bezwymiarowej zmiennej przestrzennej napisaniem tej zmiennej u dołu wielkości różniczkowanej (np. w_x). Transformatę Fouriera oznacza się wężykiem nad symbolem (np. \tilde{w}), a transformatę Laplace'a kreską prostą (np. \bar{w}).

1. WSTĘP

Niniejsza praca dotyczy problemu zderzenia w układach ciągłych. Obejmuje fragment teoretycznych rozważań nad efektami zderzenia dwóch ciał traktowanych jako obiekty ciągłe.

Z przeglądu literatury dotyczącej tego tematu wynika, że dotychczas jedynie problem kolinearnego zderzenia się dwóch prętów był dość szczegółowo rozważany. Znikoma jest natomiast ilość informacji na temat zderzenia w innych technicznie ważnych układach np. w układzie pręt-belka, pręt-płyta, belka-belka itp.

W ostatnich latach ukazało się kilka prac na temat zderzenia pręta i belki. Należy tu wymienić pracę RANGANATHA [19] z 1971 r., w której rozważano problem uderzenia nieskończonej sprężystej belki przez półnieskończony sprężysty pręt, pracę RANGANATHA i CLIFTONA [2] z 1971 r., w której podjęto powyższy temat uwzględniając dodatkowo plastyczność belki, pracę VOLKA [23] z 1973 r., w której określono siłę kontaktową na styku sprężystego pręta i sprężystej belki, uwzględniając przy tym efekt lokalny typu Hertza w miejscu uderzenia.

W 1973 roku autor niniejszej pracy [15] rozważał problem uderzenia nieskończonej sprężystej belki przez skończony sprężysty pręt. W pracy tej chodziło przede wszystkim o przedstawienie niektórych efektów zderzenia z uwzględnieniem odbicia fal o koniec pręta, a w szczególności o określenie czasu kontaktu pręta z belką.

Niniejsza praca jest kontynuacją przedstawionego tam problemu. Uwzględnia się tu dodatkowo deformacje plastyczne uderzającego pręta zakładając, że pręt odkształca się według modelu Prandtla ze wzmocnieniem. Podobnie jak w pracy [15] ruch belki opisuje się za pomocą równań Timoshenki, a ruch pręta za pomocą równania jednowymiarowych fal podłużnych. Zakłada się też idealny kontakt (płaszczyzny zderzenia idealnie gładkie, idealne zachowanie prostopadłego kierunku osi pręta do osi belki). Do rozwiązania tych równań wykorzystuje się wykładniczą transformację Fouriera i transformację Laplace'a w przypadku równań Timoshenki oraz metodę charakterystyk i transformacji Laplace'a dla równania jednowymiarowych fal podłużnych.

Celem zasadniczym tej pracy jest określenie czasu kontaktu pręta z belką, siły kontaktowej, długości uplastycznionej części pręta, zmiany średnicy pręta spowodowanej odkształceniami trwałymi, prędkości zginania, momentu gnącego i siły tnącej w belce, energii mechanicznej przekazywanej belce przez pręt w czasie kontaktu. Ponadto zbadano wpływ stałych charakteryzujących własności fizyczne i wymiary geometryczne układu pręt-belka na zmianę mechanicznych efektów zderzenia. Otrzymane wyniki zilustrowano wykreslinnie w punkcie 5 tej pracy.

2. OGÓLNE ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA TIMOSHENKI W TRANSFORMATACH LAPLACE'A

Teoria zginania Timoshenki jest powszechnie stosowana do zagadnień dynamicznego obciążenia belek (por. np. [9, 24]). Napiżemy tu niektóre związki wynikające z tej teorii, które w literaturze różnią się znakiem w zależności od sposobu znakowania momentów gnących i sił tnących.

W naszym przypadku związki pomiędzy momentem gnącym i kątem obrotu oraz pomiędzy siłą tnącą, kątem obrotu i ugięciem we współrzędnych bezwymiarowych przyjmują postać [1]

$$(2.1) \quad M(x, t) = \psi_x(x, t), \quad T(x, t) = w_x(x, t) - \psi(x, t).$$

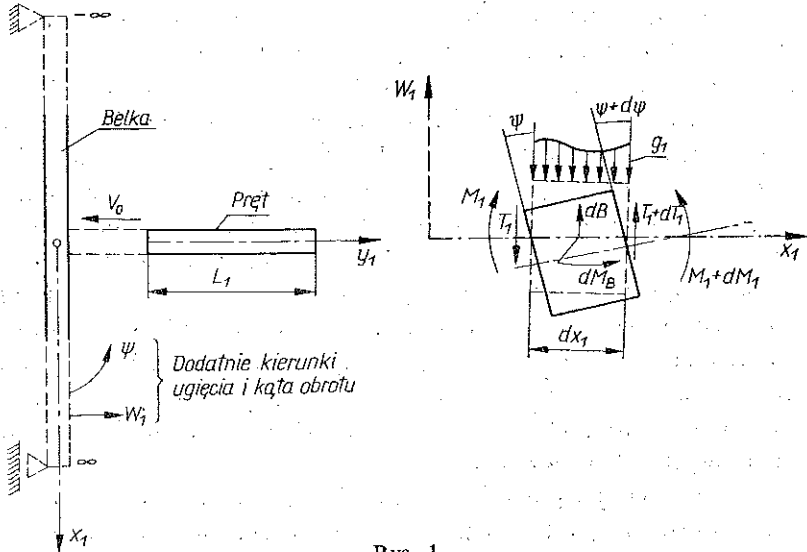
Warunki równowagi myślowo wydzielonego elementu belki (rys. 1) określają równania [1]

$$(2.2) \quad -T_x + \gamma \ddot{w} - g\gamma, \quad -M_x - T/\gamma + \ddot{\psi} = 0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad g = g(x, t) = P(t) \delta(x)$$

jest funkcją obciążenia belki we współrzędnych bezwymiarowych. Funkcję obciążenia stanowi tu wypadkowa ciśnienia pręta na belkę $P(t)$, zmienna w czasie i przyłożona w punkcie $x=0$.



Rys. 1

Ze związków (2.1) i warunków równowagi (2.2) otrzymuje się następujący układ równań Timoshenki:

$$(2.4) \quad -(w_{xx} - \psi_x) + \gamma \ddot{w} = +\gamma g, \quad \psi_{xx} + (w_x - \psi)/\gamma - \ddot{\psi} = 0.$$

Zakładamy, że przed uderzeniem belka jest w spoczynku, tzn. że

$$(2.5) \quad w = \dot{w} = \psi = \dot{\psi} = 0 \quad \text{dla } t=0.$$

Dokonyjemy transformacji Laplace'a i wykładniczej transformacji Fouriera na równaniach (2.4) z uwzględnieniem (2.3) i (2.5), skąd otrzymujemy

$$(2.6) \quad (\alpha^2 + \gamma p^2) \tilde{w} + i\alpha \tilde{\psi} = \gamma \tilde{P}(p), \quad \frac{i\alpha}{\gamma} \tilde{w} - \left(\alpha^2 + p^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \tilde{\psi} = 0,$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \tilde{w}(\alpha, p) \\ \tilde{\psi}(\alpha, p) \end{aligned} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left. \begin{aligned} \bar{w}(x, p) \\ \bar{\psi}(x, p) \end{aligned} \right\} \exp(-i\alpha x) dx, \\ \left. \begin{aligned} \bar{w}(x, p) \\ \bar{\psi}(x, p) \end{aligned} \right\} &= \int_0^{\infty} \rho \left. \begin{aligned} w(x, t) \\ \psi(x, t) \end{aligned} \right\} \exp(-pt) dt, \\ \tilde{P}(p) &= \int_0^{\infty} P(t) \exp(-pt) dt. \end{aligned}$$

Z rozwiązania układu równań (2.6) mamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \bar{w} &= -\bar{P}(p) \left[\frac{1 + \gamma p^2 - \gamma \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{1}{\alpha^2 + \lambda_1^2} - \frac{1 + \gamma p^2 - \gamma \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{1}{\alpha^2 + \lambda_2^2} \right], \\ \bar{\psi} &= +\bar{P}(p) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{1}{\alpha^2 + \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{1}{\alpha^2 + \lambda_2^2} \right] \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda_1 = B\sqrt{p} \sqrt{p + N\sqrt{p^2 - a^2}}, \quad \lambda_2 = B\sqrt{p} \sqrt{p - N\sqrt{p^2 - a^2}}.$$

Po wykładniczej retransformacji Fouriera otrzymamy z (2.8) ugięcie i kąt obrotu belki, wyrażone w postaci transformaty Laplace'a:

$$(2.9) \quad \bar{w}(x, p) = \bar{w}^*(x, p) \bar{P}(p), \quad \bar{\psi}(x, p) = \bar{\psi}^*(x, p) \bar{P}(p),$$

gdzie funkcje

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \bar{w}^*(x, p) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_1}{p^2} \exp(-\lambda_1 |x|) - \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_2}{p^2} \exp(-\lambda_2 |x|) \right], \\ \bar{\psi}^*(x, p) &= \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} [\exp(-\lambda_1 |x|) - \exp(-\lambda_2 |x|)], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$$

nazywać będziemy transmitancją lub transformatą Laplace'a funkcji Greena odpowiednio dla ugięcia i kąta obrotu, a funkcję $\bar{P}(p)$, która wyznaczona będzie w dalszej części pracy, funkcją wejściową lub wymuszeniem.

Z równań (2.9) i (2.1) określamy funkcję wyjściową dla prędkości zginania, momentu gnącego i siły tnącej:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \bar{W}(x, p) &= p\bar{w}(x, p) = \bar{W}^*(x, p) \bar{P}(p), \\ \bar{M}(x, p) &= \bar{\psi}_x = \bar{M}^*(x, p) \bar{P}(p), \\ \bar{T}(x, p) &= \bar{w}_x - \bar{\psi} = \bar{T}^*(x, p) \bar{P}(p), \end{aligned}$$

gdzie transmitancje tych wielkości wynoszą odpowiednio

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \bar{W}^*(x, p) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_1}{p} \exp(-\lambda_1 |x|) - \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_2}{p} \exp(-\lambda_2 |x|) \right] \\ \bar{M}^*(x, p) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \exp(-\lambda_1 |x|) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \exp(-\lambda_2 |x|) \right], \\ \bar{T}^*(x, p) &= \pm \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \exp(-\lambda_1 |x|) - \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \exp(-\lambda_2 |x|) \right], \end{aligned}$$

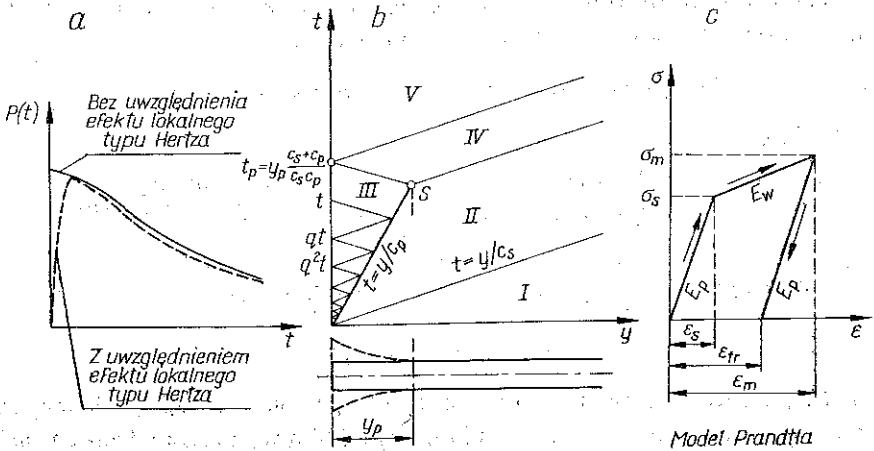
$$\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 > 0.$$

Znak plus we wzorze (2.12)₃ odnosi się do $x < 0$, a minus dla $x > 0$.

W dalszym ciągu zajmiemy się analizą fal w pręcie, na podstawie której ustalimy postać funkcji wymuszenia $\bar{P}(p)$.

3. ANALIZA ZJAWISK FALOWYCH W PRĘCIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

Przyjęcie biliniowej zależności między naprężeniem a odkształceniem pręta (rys. 2c) umożliwiła znalezienie ścisłego związku między siłą kontaktową a prędkością przekroju pręta stykającego się z belką. Z warunku zgodności prędkości pręta i belki w miejscu styku siłę kontaktową można wyrazić jako funkcję prędkości belki dla $x=0$. W ten sposób funkcja obciążenia (2.3) wyraża się za pomocą prędkości w . Po wprowadzeniu tej funkcji do równań (2.4) otrzymuje się układ równań różniczkowych, który należy rozwiązywać ze względu na w i ψ .



Rys. 2

Poniżej przedstawimy tok postępowania. Hiperboliczne równanie ruchu, opisujące proces falowy w pręcie, jest liniowe w każdym z podobszarów (rys. 2b). Można więc je zastąpić równoważnymi związkami wzdłuż charakterystyk:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma - cU &= \text{const} & \text{wzdłuż} & \quad y - ct = \text{const}, \\ \sigma + cU &= \text{const} & \text{wzdłuż} & \quad y + ct = \text{const}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad c = \begin{cases} c_s & \text{w obszarach odkształceń sprężystych i obszarze odciążenia,} \\ c_p & \text{w obszarach odkształceń sprężysto-plastycznych} \end{cases}$$

jest prędkością propagacji fali w pręcie.

Analizując wyniki obliczeń numerycznych wykazemy, iż siła kontaktowa, podobnie jak w przypadku uderzenia belki prętem sprężystym [15], osiąga swoje maksimum w chwili uderzenia, a następnie monotonicznie maleje. W takim przypadku z punktu uderzenia jednocześnie propagować się będą dwie fale silnej nieciągłości: fala sprężysta z prędkością c_s i fala plastyczna z prędkością c_p ($c_s > c_p$) (rys. 2b). Ta ostatnia jest równocześnie falą odciążenia.

Należy podkreślić, że gdyby w rozważaniach uwzględnić efekt lokalnego ugięcia górnej powierzchni belki w miejscu styku w stosunku do jej płaszczyzny środko-

wej, to wykres siły na styku belki z prętem w początkowym okresie charakteryzowałby się szybkim ale ciągłym wzrostem (linia przerywana na rys. 2a). Taki wynik otrzymał J. VOLEK w pracy [23], gdzie uwzględnił ten efekt opierając się na teorii Hertza.

Posługując się równaniami (3.1) ($c=c_s$) i warunkami początkowymi

$$(3.3) \quad \sigma(y, t)|_{t=0} = 0, \quad U(y, t)|_{t=0} = -V_0,$$

określamy naprężenia i prędkości w I i II obszarze płaszczyzny y, t (rys. 2b):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \sigma^I(y, t) &= 0, & U^I(y, t) &= -V_0, \\ \sigma^{II}(y, t) &= -\sigma_s, & U^{II}(y, t) &= -V_0 + V_s. \end{aligned}$$

W celu określenia naprężeń i prędkości w III obszarze płaszczyzny y, t wykorzystamy warunek ciągłości dynamicznej na froncie fali plastycznej

$$(3.5) \quad \sigma_m^{III}(y) - \sigma_m^{II}(y) = -c_p [U_m^{III}(y) - U_m^{II}(y)],$$

warunek zgodności prędkości i sił na styku belki z prętem (por. (2.3))

$$(3.6) \quad \sigma(y, t)|_{y=0} = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx = \frac{P(t)}{\mu}, \quad U(y, t)|_{y=0} = W(x, t)|_{x=0}.$$

Obszar III jest obszarem odciążenia. Istnieją tu tak jak w obszarze sprężystym dwie rodziny charakterystyk, wzdłuż których zachodzą następujące związki:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma^{III}(y, t) - c_s U^{III}(y, t) &= \frac{1}{\mu} P\left(t - \frac{y}{c_s}\right) - c_s W\left(0, t - \frac{y}{c_s}\right), \\ \sigma^{III}(y, t) + c_s U^{III}(y, t) &= -V(1+q) - q \frac{1}{\mu} P\left[q\left(t + \frac{y}{c_s}\right)\right] + \\ &\quad + qc_s W\left[0, q\left(t + \frac{y}{c_s}\right)\right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.8) \quad V = -(\sigma_m^{II} + c_p U_m^{II}) = V_s(c_s - c_p) + V_0 c_p.$$

Z równań (3.7) dla $y=0$ otrzymujemy następującą zależność między prędkością belki w przekroju $x=0$ a wypadkowym ciśnieniem pręta na belkę:

$$(3.9) \quad c_s [W(0, t) - qW(0, qt)] = -V(1+q) - \frac{1}{\mu} [P(t) + qP(qt)].$$

Ze wzoru (3.9) określamy funkcję wymuszającą ruch belki w następującej postaci: dla pręta sprężystego ($c_p \rightarrow c_s$ i $q=0$)

$$(3.10) \quad P(t) = -\mu c_s [V_0 + W(0, t)];$$

dla pręta sprężysto-idealnie plastycznego ($c_p \rightarrow 0$ i $q \rightarrow 1$)

$$(3.11) \quad P(t) = -\mu \sigma_s;$$

dla pręta sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem

$$(3.12) \quad P(t) = -\mu \left[-V + c_s W(0, t) - 2c_s \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n W(0, q^n t) \right].$$

Wzory (3.12) otrzymuje się w sposób następujący:

Wzór (3.9) traktuje się jako wzór rekurencyjny. Podstawiamy za t kolejno wartości $qt, q^2 t, \dots, q^n t, \dots, q^{N+1} t$ (por. rys. 2b). Uzyskane równości mnożymy odpowiednio przez $(-q), (-q)^2, \dots, (-q)^n, \dots, (-q)^{N+1}$ i dodajemy stronami. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} -c_s W(0, t) + 2c_s \sum_{n=0}^N (-q)^n W(0, q^n t) + (-q)^{N+1} c_s W(0, q^{N+1} t) = \\ = -V(1+q) \sum_{n=0}^N (-q)^n - \frac{1}{\mu} P(t) + (-q)^{N+1} \frac{1}{\mu} P(q^{N+1} t). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy, gdy $N \rightarrow \infty$, wobec $q < 1$ i wynikających stąd następujących granic ($W(0, t)$ i $P(t)$ są funkcjami skończonymi)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-q)^{N+1} W(0, q^{N+1} t) \rightarrow 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (-q)^{N+1} P(q^{N+1} t) \rightarrow 0$$

otrzymuje się wzór (3.12).

Napężenie i prędkość w III obszarze są następujące:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma^{\text{III}}(y, t) &= -V - c_s \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n \left\{ W \left[0, q^n \left(t - \frac{y}{c_s} \right) \right] - q W \left[0, q^{n+1} \left(t + \frac{y}{c_s} \right) \right] \right\}, \\ U^{\text{III}}(y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n \left\{ W \left[0, q^n \left(t - \frac{y}{c_s} \right) \right] + q W \left[0, q^{n+1} \left(t + \frac{y}{c_s} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Z warunku ciągłości kinematycznej na froncie fali plastycznej

$$(3.14) \quad U_m^{\text{III}}(y) - U_m^{\text{II}}(y) = -c_p [\varepsilon_m^{\text{III}}(y) - \varepsilon_m^{\text{II}}(y)]$$

obliczamy odkształcenie maksymalne w danym przekroju:

$$(3.15) \quad \varepsilon_{\max}(y) = \varepsilon_m^{\text{III}}(y) = V_s \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_s} \right) - \frac{V_0}{c_p} - \frac{1+q}{c_p} \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n W \left(0, \frac{2q^{n+1}}{1+q} \frac{y}{c_p} \right).$$

Odkształcenie trwałe (por. rys. 2c) wynosi

$$(3.16) \quad \varepsilon_{\text{tr}} = \varepsilon_{\max} - \frac{\sigma_{\max}}{c_s^2} = -\frac{4q}{c_s(1-q)} \left[\frac{V_0 - V_s}{1+q} + \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n W \left(0, \frac{2q^{n+1}}{1+q} \frac{y}{c_p} \right) \right],$$

gdzie

$$\sigma_{\max} = \sigma^{\text{III}}(y, t)|_{t=y/c_p}$$

W obszarach IV i V naprężenia i prędkości są następujące:

$$(3.17) \quad \sigma^{IV}(y, t) = -\frac{V + c_s V_0}{2} - c_s \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n W \left[0, q^n \left(t - \frac{y}{c_s} \right) \right],$$

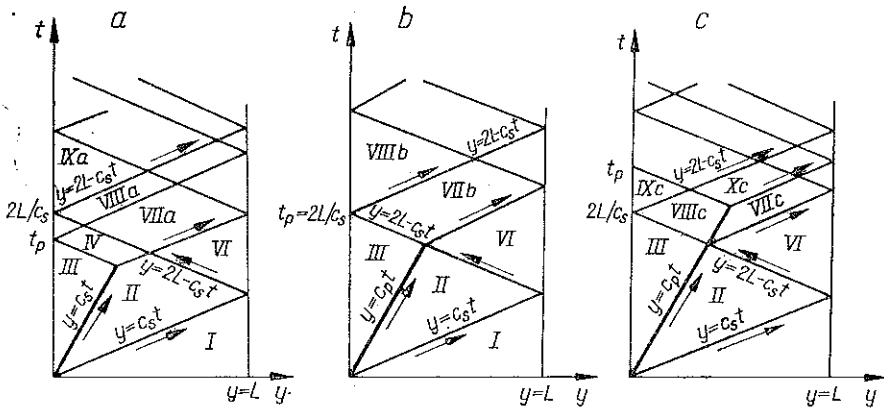
$$U^{IV}(y, t) = -\frac{V_0 c_s - V}{2c_s} + \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n W \left[0, q^n \left(t - \frac{y}{c_s} \right) \right];$$

$$(3.18) \quad \sigma^V(y, t) = -c_s \left[V_0 + W^V \left(0, t - \frac{y}{c_s} \right) \right],$$

$$U^V(y, t) = W^V \left(0, t - \frac{y}{c_s} \right),$$

gdzie $W^V(0, t)$ jest prędkością belki w punkcie $x=0$ dla $t \geq y_p (c_s + c_p)/c_s c_p$ (rys. 2).

Siła kontaktowa między prętem a belką, równa sile wymuszającej ruch belki, zmienia się (w sposób ciągly i nieciągly) w czasie $t > 0$, co jest spowodowane odbiciem fal o końcu pręta i zakończeniem procesu uplastycznienia pręta (por. punkt t_p na rys. 3a, b, c).



Rys. 3

W tej pracy ograniczymy się do rozważenia takich przypadków uderzenia belki skończonym prętem sprężysto-plastycznym, dla których kontakt pręta z belką kończy się przy pierwszej nieciągłej zmianie siły kontaktowej, tj. w chwili $t_k = 2L/c_s$. Pokażemy na przykładzie, że taki czas kontaktu możliwy jest w każdym z przypadków pokazanych na rys. 3a, b, c. Przypadek I (rys. 3a) zajdzie, gdy naprężenie na froncie fali plastycznej zmaleje do granicy plastyczności, zanim front ten osiągnie przekrój

$y_s = \frac{2c_p L}{c_s + c_p}$. Przypadki II i III (rys. 3 b, c) zajdą, gdy naprężenia w obszarze odpowiednio VII b i Xc nie będą przewyższyły granicy plastyczności.

Głównym kryterium określającym czas kontaktu jest, podobnie jak w przypadku pręta sprężystego [15], śledzenie znaku naprężeń na obciążonym końcu pręta. W czasie $0 < t < 2L/c_s$ naprężenia na obciążonym końcu pręta są ściskające. W chwili

$t=2L/c_s$ istnieje pierwsza możliwość zmiany znaku naprężeń, gdyż w chwili tej powraca do miejsca styku odciążająca fala sprężysta odbita od swobodnego końca pręta $y=L$ (linia $y=2L-c_s t$, rys. 3).

Z warunku, aby naprężenia w przekroju $y=0$ pręta w chwili $t=2L/c_s+0$ były dodatnie, określamy (dla danych własności fizycznych i geometrycznych układu pręt-belka) odpowiednią krytyczną wartość prędkości uderzenia, odniesioną do prędkości, odpowiadającej granicy plastyczności V_0/V_s . Jeżeli rzeczywista wartość V_0/V_s nie przekroczy określonej wyżej wartości krytycznej, to w przekroju $y=0$ pręta w chwili $t=2L/c_s$ zawsze następuje zmiana znaku naprężeń. Zmiana znaku naprężeń w chwili $t=2L/c_s$ świadczy o przerwaniu kontaktu pręta z belką, naprężenia rozciągające w przekroju $y=0$ pręta mogłyby powstać jedynie, gdyby pręt i belka były «sklejone».

Przykład ilustrujący powyższe zagadnienie przedstawiony jest w p. 4, a szczegóły dotyczące wyznaczania pól naprężeń i prędkości w poszczególnych obszarach płaszczyzny y, t można znaleźć w pracy [16].

4. RUCH BELKI UDERZONEJ PRĘTEM SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

W celu określenia funkcji związanych z ruchem belki, tj. funkcji prędkości, momentu gnącego i siły tnącej, wykorzystamy wzory podane w p. 2. Funkcję wymuszenia $P(t)$ w czasie $0 < t < y_p \frac{c_s + c_p}{c_s c_p}$ (rys. 2) określa wzór (3.12). We wzorze tym występuje prędkość belki dla $x=0$ w chwili t oraz suma prędkości w dyskretnych punktach $t_n = q^n t$ ($n=1, 2, 3, \dots$; rys. 2). Na podstawie rozwiązania otrzymanego dla przypadku uderzenia belki półnieskończonym prętem sprężystym [19 i 15] stwierdzamy, że prędkość belki w punkcie $x=0$ i $t > 0$ jest funkcją monotonicznie rosnącą i ograniczoną, gdyż $W(x, t)|_{x=0} \leq V_0$. Funkcję taką można zawsze przedstawić w postaci następującego szeregu potęgowego:

$$(4.1) \quad W(0, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

gdzie a_i są współczynnikami rozwinięć. Fakt ten wykorzystamy również tutaj, przebieg bowiem funkcji prędkości w przypadku uderzenia belki prętem sprężysto-plastycznym powinien być podobny. Przedstawiamy więc funkcję prędkości w dowolnej chwili $t_n = q^n t$ ($n=1, 2, \dots$) za pomocą szeregu

$$(4.1') \quad W(0, q^n t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (q^n t)^i.$$

Po podstawieniu (4.1) i (4.1') do wzoru (3.12) otrzymujemy następującą postać funkcji wymuszenia w przedziale czasu $0 < t \leq y_p \frac{c_s + c_p}{c_s c_p}$:

$$(4.2) \quad P(t) = -\mu \left[V + c_s \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - q^{i+1}}{1 + q^{i+1}} a_i t^i \right].$$

Nieznane współczynniki rozwinięć a_i określimy z przyrównania transformaty prędkości, wyrażonej wzorem (4.1), z transformatą (2.11)₁ dla $x=0$. Szeregi (4.1) i (4.2) spełniają warunki przekształcania szeregu potęgowego w odpowiadający im zbieżny szereg w dziedzinie obrazu Laplace'a (twierdzenia 35.1, poz. [6]), możemy więc napisać (indeks i wymieniamy na n)

$$(4.3) \quad \tilde{W}|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{p^{n+1}} = \mu \left(\frac{V}{p} + c_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1+q^{n+1}} \frac{a_n n!}{p^{n+1}} \right) \times \\ \times \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_1}{p} - \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_2}{p} \right].$$

Funkcje w nawiasie prostokątnym z prawej strony wzoru (4.3) rozwijamy w szereg Laurenta:

$$\left[\frac{\lambda_2^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_1}{p} - \frac{\lambda_1^2 - \gamma p^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\lambda_2}{p} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(0)}{n!} \left(\frac{a}{p} \right)^{2n},$$

gdzie $F_n(0)$ są współczynnikami rozwinięć [16]. Z równości (4.3) otrzymujemy zerowe wartości współczynników a_n o wskaźnikach nieparzystych i następujące wartości współczynników o wskaźnikach parzystych:

$$(4.4) \quad a_0 = -V a_0^*, \quad a_2 = -\frac{V a^2}{2!} a_2^*, \quad a_4 = -\frac{V a^4}{4!} a_4^*, \dots, \quad a_{2n} = \frac{V a^{2n}}{(2n)!} a_{2n}^*, \dots,$$

gdzie

$$a_0^* = \frac{\frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}}{1 + \frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma} \frac{1-q}{1+q}}, \quad a_2^* = \frac{\frac{\mu}{4} \left[\frac{F_1}{1!} - c_s \frac{F_1}{1!} \frac{1-q}{1+q} a_0^* \right]}{1 + \frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma} \frac{1-q^3}{1+q^3}}, \\ (4.4') \quad a_4^* = \frac{\frac{\mu}{4} \left[\frac{F_2}{2!} - c_s \left(\frac{F_2}{2!} \frac{1-q}{1+q} a_0^* + \frac{F_1}{1!} \frac{1-q^3}{1+q^3} a_2^* \right) \right]}{1 + \frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma} \frac{1-q^5}{1+q^5}}, \\ a_{2n}^* = \frac{\frac{\mu}{4} \left[\frac{F_n}{n!} - c_s \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1-q^{2k+1}}{1+q^{2k+1}} a_{2k}^* \right]}{1 + \frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma} \frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}}.$$

Prędkość belki w punkcie $x=0$ i siłę kontaktową określają więc wzory

$$(4.5) \quad W(x, t)|_{x=0} = U(y, t)|_{y=0} = -V \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^* \frac{(at)^{2n}}{(2n)!}$$

oraz

$$(4.6) \quad P(t) = \mu \sigma(y, t)|_{y=0} = -\mu V \left[1 - c_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} a_{2n}^* \frac{(at)^{2n}}{(2n)!} \right].$$

Na podstawie powyższych wzorów stwierdzamy, że w chwili uderzenia mamy następujący przyrost prędkości belki $[W]$ i siły kontaktowej $[P]$ w punkcie $x=0$ (dla pręta sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem ($c_p > 0$)):

$$(4.7) \quad [W] = -V_0 \left[\frac{V_s}{V_0} \left(1 - \frac{c_p}{c_s} \right) + \frac{c_p}{c_s} \right] \frac{c_s \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}}{1 + c_p \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}},$$

$$[P] = -V_0 c_s \left[\frac{V_s}{V_0} \left(1 - \frac{c_p}{c_s} \right) + \frac{c_p}{c_s} \right] \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{2} c_p \sqrt{\gamma}},$$

przy czym wzory te są poprawne, gdy

$$(4.8) \quad \frac{V_0}{V_s} \geq 1 + c_s \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}.$$

Warunek (4.8) otrzymuje się ze wzoru (3.15) żądając, aby odkształcenie spełniało następujący warunek:

$$\varepsilon_{\max}(y)|_{y=0} \leq -\varepsilon_s = -\frac{V_s}{c_s}.$$

Z warunku (4.8) wynika, że uplastycznienie pręta uderzającego w sprężystą belkę nastąpi, gdy prędkość uderzenia V_0 jest znacznie większa od prędkości odpowiadającej granicy plastyczności $V_s = \frac{\sigma_s}{c_s}$ ($V_0 \approx 2V_s$, por. rys. 12).

Gdyby pręt uderzał w sztywną ścianę, jego uplastycznienie nastąpi, gdy V_0 minimalnie przekroczy V_s . Warto tu nadmienić, że wartość $[P]$ jest jednocześnie maksymalną wartością siły kontaktowej.

Dla pręta sprężysto-idealnie plastycznego ($c_p \rightarrow 0$)

$$(4.9) \quad [W] = -\frac{\mu}{2} \sigma_s \sqrt{\gamma}, \quad [P] = -\sigma_s \mu,$$

przy czym powinien być spełniony również warunek (4.8). Dla pręta sprężystego ($c_p \rightarrow c_s$)

$$(4.10) \quad [W] = -V_0 \frac{c_s \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}}{1 + c_s \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}}, \quad [P] = -V_0 \frac{\mu c_s}{1 + c_s \frac{\mu}{2} \sqrt{\gamma}}.$$

Dla pręta sztywnego ($c_s \rightarrow \infty$)

$$(4.11) \quad [W] = -V_0, \quad [P] = -V_0 \frac{2}{\sqrt{\gamma}}.$$

Identyczny wynik z wynikiem (4.11) otrzymał J. KELLY [13] rozważając zagadnienie uderzania belki sztywną masą.

Mając określoną funkcję wymuszenia (4.6) możemy wyznaczyć prędkość belki, moment gnący i siłę tnącą ze wzorów (2.8) i (2.10). Można to uczynić przez rozwinięcie transformaty funkcji Greena \bar{W}^* , \bar{M}^* , \bar{T}^* w szereg Laurenta, a następnie pomnożenie tego szeregu przez szereg przedstawiający funkcję $\bar{P}(p)$. Taką metodę zaproponowali W. FLÜGGE i E. E. ZAJAC [7]. Można też wyznaczyć funkcję Greena retransformując \bar{W}^* , \bar{M}^* i \bar{T}^* , a następnie, korzystając z całki Duhamela postaci

$$(4.12) \quad f(x, t) = \int_0^t f^*(x, t-\tau) P(\tau) d\tau,$$

określić poszukiwane wielkości. Tu f^* oznacza funkcję Greena danej wielkości. Funkcje Greena dla prędkości belki, momentu zginającego i siły tnącej są następujące:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} W^*(x, t) &= \frac{1}{\mu c_s} \left\{ [-I_1(x, t) + I_2(x, t)] \eta(t - |x|) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma} \delta(t - \sqrt{\gamma}|x|) + I_1(x, t) \right] \eta(t - \sqrt{\gamma}|x|) \right\}, \\ M^*(x, t) &= \frac{1}{\mu c_s} \{ [I_3(x, t) - I_4(x, t)] \eta(t - |x|) - I_3(x, t) \eta(t - \sqrt{\gamma}x) \}, \\ T^*(x, t) &= \frac{1}{\mu c_s} \left\{ [I_5(x, t) + I_6(x, t)] \eta(t - |x|) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{2} [c_s \gamma \delta(t - \sqrt{\gamma}|x|) + I_5(x, t)] \eta(t - \gamma|x|) \right\}. \end{aligned}$$

Wprowadzone tu oznaczenia skracające objaśnione są w Dodatku.

Do odwracania transformat (2.12) wykorzystano teorię funkcji zmiennej zespolonej. Całki przekształcenia odwrotnego rozumiane w sensie wartości głównej Cauchy'ego otrzymano, dokonując całkowania po konturze Bromwicha-Wagnera. Szczegóły dotyczące tej kwestii można znaleźć w pracy [16]. Postać funkcji $M^*(x, t)$ podana została już wcześniej przez M. GOLANDA, P. P. WICKERSHAMA i M. DENGLERA [5]. Autorzy ci rozważali uderzenie belki Timoshenki przez stalową kulkę. Przyjęli, że uderzenie belki przez swobodnie spadającą stalową kulkę ma charakter impulsu typu delty Diraca. Stąd przedstawiony przez nich wzór określający moment gnący pokrywa się z podaną tu funkcją Greena M^* .

W celu znalezienia rozwiązania w czasie $t \geq t_p = y_p \frac{c_s + c_p}{c_s c_p}$ (por. rys. 2) wykorzystujemy zasadę superpozycji. Funkcję wymuszenia i prędkości dla $t \geq t_p$ przedstawiamy następująco:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} P(t) &= \mu \sigma^{\text{III}}(0, t) [\eta(t) - \eta(t - t_p)] + \mu \sigma^{\text{V}}(0, t) \eta(t - t_p), \\ W(0, t) &= W^{\text{III}}(0, t) [\eta(t) - \eta(t - t_p)] - W^{\text{V}}(0, t) \eta(t - t_p), \end{aligned}$$

gdzie σ^{III} , W^{III} określone są wzorami (4.5) i (4.6), natomiast (por. (3.18))

$$(4.15) \quad \sigma^{\text{V}} = -c_s [V_0 + W^{\text{V}}(0, t)].$$

Nietrudno jest znaleźć transformaty Laplace'a nieznannej funkcji $W^{\text{V}}(0, t) \eta(t - t_p)$, jeśli posłużyć się wzorem (2.11)₁ dla $x=0$, do którego podstawiamy transformaty Laplace'a funkcji oznaczonych numerem (4.14). Tym samym określiliśmy transformatę Laplace'a funkcji (4.15), a zatem i (4.14)₁. Podstawiając tę ostatnią do wzorów (2.11) określamy transformaty Laplace'a funkcji prędkości, momentu zginającego i siły tnącej dla $t > t_p$. Postać ich oraz retransformację Czytelnik znajdzie w pracy [16]. Ruch swobodny belki po odpadnięciu pręta określa się również wykorzystując superpozycję. Tak więc prędkość, moment gnący i siłę tnącą dla tego ruchu znajdziemy podstawiając do wzorów (2.11) transformaty Laplace'a następujących funkcji:

$$(4.16) \quad P(t) = \mu \sigma^{\text{III}}(0, t) [\eta(t) - \eta(t - t_p)] + \mu \sigma^{\text{V}}(0, t) \left[\eta(t - t_p) - \eta\left(t - \frac{2L}{c_s}\right) \right]$$

dla przypadku pokazanego na rys. 3a, oraz

$$(4.17) \quad P(t) = \mu \sigma^{\text{III}}(0, t) \left[\eta(t) - \eta\left(t - \frac{2L}{c_s}\right) \right]$$

dla przypadku pokazanego na rys. 3b i 3c. Założyliśmy tu, że rozważamy tylko taki wariant uderzenia, dla którego czas kontaktu jest równy podstawowemu okresowi sprężystych drgań swobodnych i wynosi $t_k = 2L/c_s$.

Poniżej, na konkretnym przykładzie, pokażemy, że czas kontaktu $t_k = 2L/c_s$ możliwy jest w każdym z trzech przypadków pokazanych na rys. 3.

Rozpatrzmy pręt o długości $L=4$ i 8 oraz kombinację parametrów μ, γ, c_s, g , tj. wszystkich parametrów mogących mieć wpływ na wielkość czasu kontaktu. Wyniki zestawione są w tablicy 1.

Jak wynika z tablicy 1, w przypadku I (rys. 3a) czas kontaktu przy przyjętych parametrach wynosi zawsze $t_k = 2L/c_s$ (t_p jest tutaj czasem oddziaływania plastycznego; rys. 2 i 3).

W przypadku II (rys. 3b) może się zdarzyć, że pręt nie odpadnie od belki w czasie $t_k = 2L/c_s$ dla trzeciego i ósmego zestawu parametrów, tj. gdy

$$3,52 < \frac{V_0}{V_s} \leq 3,76 \quad \text{dla } L=4,$$

$$4,01 < \frac{V_0}{V_s} \leq 4,11 \quad \text{dla } L=8.$$

W przypadku III (rys. 3c) istnieje możliwość odpadnięcia pręta w chwili $t_k = 2L/c_s$ jedynie dla piątego i dziesiątego zestawu parametrów, tj. gdy

$$3,68 < \frac{V_0}{V_s} \leq 7,47 \quad \text{dla } L=4,$$

$$3,79 < \frac{V_0}{V_s} \leq 10,36 \quad \text{dla } L=8.$$

Tablica 1

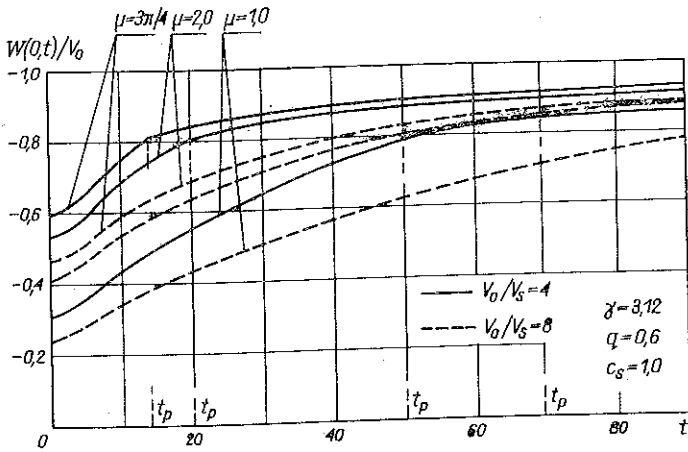
Lp.	L	PARAMETRY				W przypadku I $t_k = 2L/c_s$, jeżeli V_0/V_s nie przekroczy poniższych wartości			Przypadek II zajdzie, gdy V_0/V_s będzie zawierało się między poniższymi wartościami	W przypadku II $t_k = 2L/c_s$, jeżeli V_0/V_s nie przekroczy poniższych wartości	Przypadek III zajdzie, gdy V_0/V_s będzie większe od poniższych wartości	W przypadku III $t_k = 2L/c_s$, jeżeli V_0/V_s nie przekroczy poniższych wartości
		γ	μ	c_s	q	$t_p = 0$	$t_p = L/c_s$	$t_p = 2L/c_s$				
1		3,12	3/4	1,0	0,6	8,62	8,03	7,77	3,47-5,10	5,46	5,10	3,23
2		2,56	3/4	1,0	0,6	8,62	7,96	7,59	3,28-4,51	4,58	4,51	3,43
3	4	3,12	1,0	1,0	0,6	4,67	4,47	4,36	2,08-2,76	3,52	3,76	1,56
4		3,12	3/4	0,8	0,6	7,94	7,31	6,91	3,13-4,80	5,04	4,80	3,05
5		3,12	3/4	1,0	0,2	8,62	8,43	8,36	3,14-3,68	6,87	3,68	7,47
6		3,12	3/4	1,0	0,6	11,90	10,72	9,40	4,17-5,76	6,55	5,76	4,53
7		2,56	3/4	1,0	0,6	11,90	10,50	9,10	3,86-4,58	4,65	4,58	4,53
8	8	3,12	1,0	1,0	0,6	5,88	5,37	4,96	2,41-4,11	4,01	4,11	2,06
9		3,12	3/4	0,8	0,6	10,64	9,53	8,31	4,13-5,44	5,67	6,44	4,00
10		3,12	3/4	1,0	0,2	11,90	11,52	10,76	3,28-3,79	8,37	3,79	10,36

Piąty i dziesiąty zestaw parametrów odpowiadają prętowi o dużym module wzmocnienia ($q=0,2$ lub $E_w=0,75 E_p$) czyli jest to pręt właściwościami zbliżony do sprężystego. Deformacje plastyczne takiego pręta są małe (rys. 15).

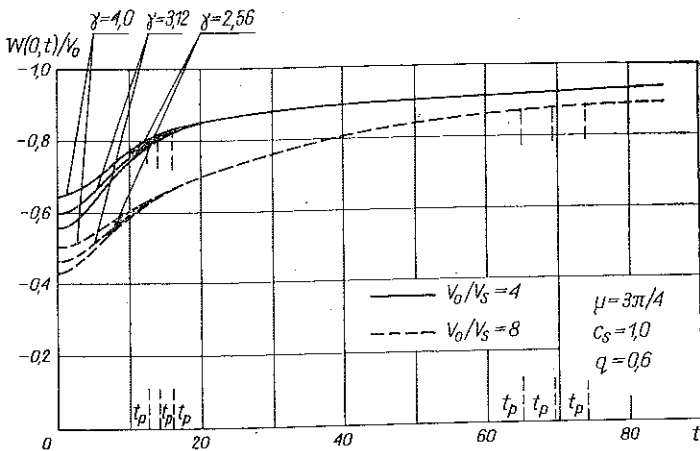
5. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI

Przedstawimy tu wykresy prędkości zginania, momentu gnącego i siły kontaktowej (wykres siły kontaktowej jakościowo odpowiada sile tnącej w przekroju $x=0^+$), jak również zależność długości uplastycznionego odcinka pręta od stosunku V_0/V_s , zmianę średnicy spowodowaną odkształceniami trwałymi oraz wykres mocy pręta.

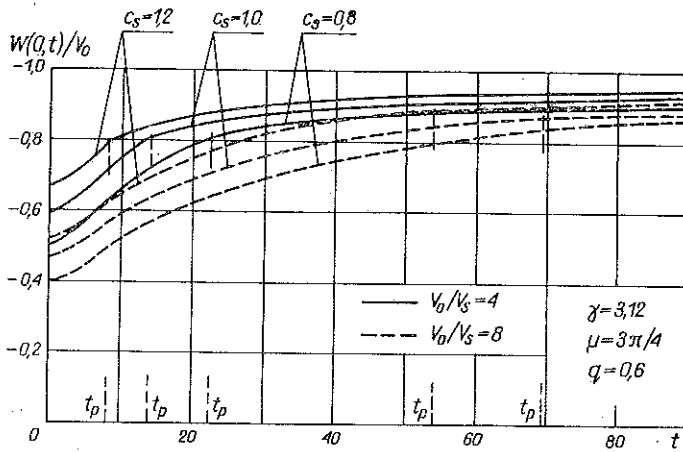
Na wykresach prędkości (rys. 4-7) uwidoczniiony jest wpływ takich stałych, jak stosunek liniowych gęstości pręta do belki μ , stosunek kwadratu prędkości



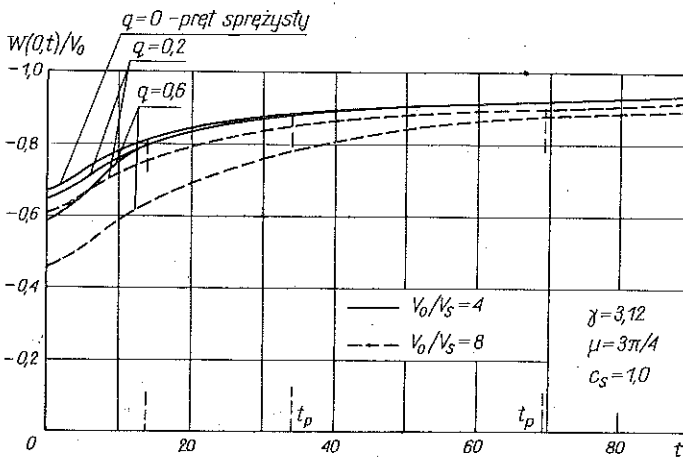
Rys. 4



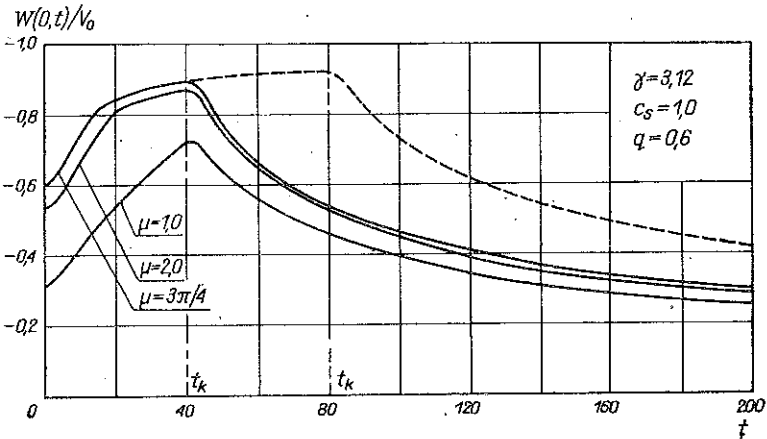
Rys. 5



Rys. 6

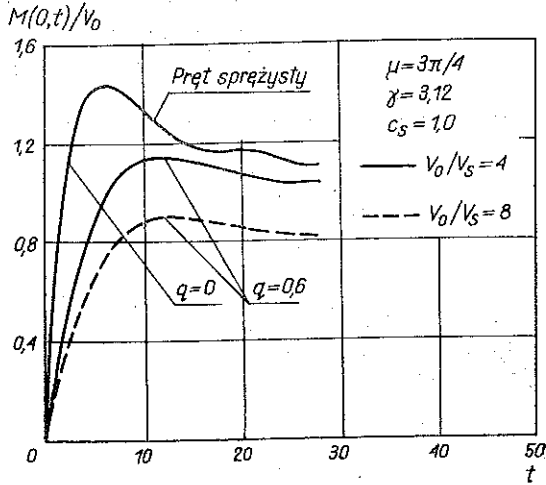


Rys. 7

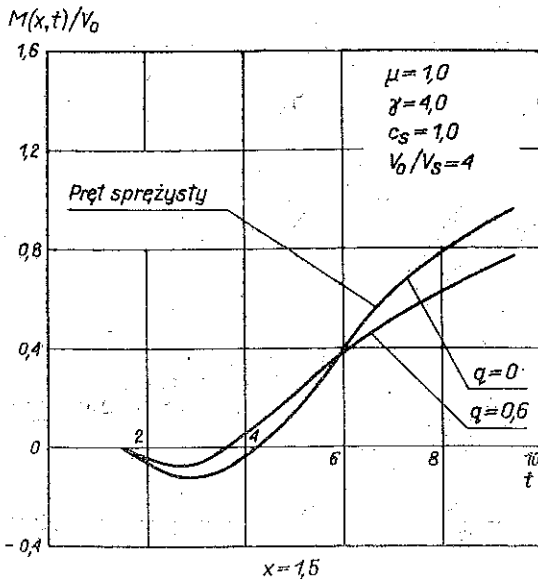


Rys. 8

fali podłużnej do kwadratu prędkości fali poprzecznej w belce γ , stosunek prędkości fali sprężystej w belce do prędkości fali podłużnej w belce c_s , parametru związanego z modulem wzmocnienia q ($q=0$ odpowiada prętomu sprężystemu, $q=1$ prętomu sprężysto-idealnie plastycznemu, $0 < q < 1$ odpowiada prętomu sprężysto-plastycznemu ze wzmocnieniem), czasu kontaktu $t_k \approx 2L/c_s$ oraz stosunek prędkości uderzenia do prędkości odpowiadającej granicy plastyczności V_0/V_s — na zmianę funkcji prędkości. Linia przerywaną oznaczono pręt o granicy plastyczności dwukrotnie niższej od pręta oznaczonego linią ciągłą. Na rys. 8 widoczna jest prędkość ruchu



Rys. 9

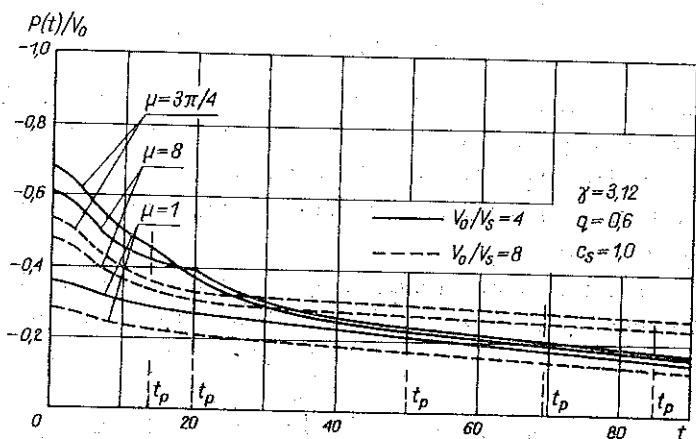


Rys. 10

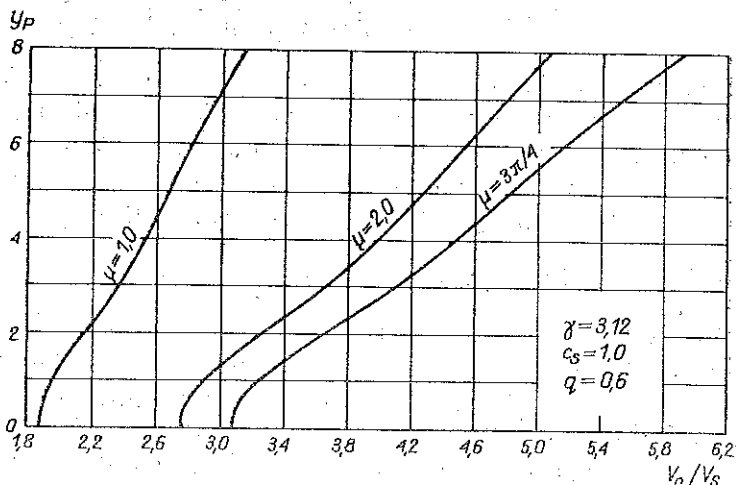
swobodnego belki po odpadnięciu pręta w chwili $t_k=40$. Linia przerywaną zaznaczono na tym rysunku prędkość belki w przypadku, gdyby czas kontaktu pręta z belką (parametr $\mu=3\pi/4$) był dwukrotnie większy. Ogólnie można stwierdzić, że istotny wpływ na zmianę analizowanych funkcji mają parametry μ , V_0/V_s , q , t_k , mniejszy parametry γ i c_s , jeśli wziąć pod uwagę oczywiście realny zakres zmian tych parametrów.

Rysunki 9 i 10 przedstawiają wykres momentu zginającego w przekroju $x=0$ i $x=1,5$ oraz porównanie tych funkcji w przypadku, gdyby w belkę uderzały pręt sprężysty i sprężysto-plastyczny.

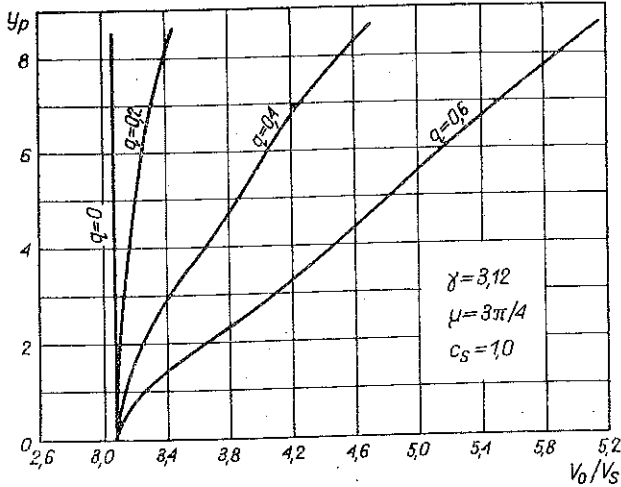
Rysunek 11 przedstawia wykres siły kontaktowej $P(t)$ odniesionej do prędkości uderzenia V_0 jako funkcji czasu t . Widzimy, że siła na styku belki i pręta osiąga maksymalną wartość w chwili uderzenia [wartość maksymalną określają wzory (4.7)–(4.11)], a następnie maleje. Nagły wzrost w chwili uderzenia jest konsekwencją założenia idealnego styku. Jeżeli uwzględnić efekt lokalny typu Hertza



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

w miejscu uderzenia oraz nierówności powierzchni styku, to przebieg siły charakteryzowałby się szybkim ciągłym wzrostem (zasygnalizowano to na rys. 2a). Taki też przebieg siły stykowej sugerują doświadczenia.

Nieuwzględnienie efektu lokalnego w niniejszej pracy podyktowane było trudnościami matematycznymi.

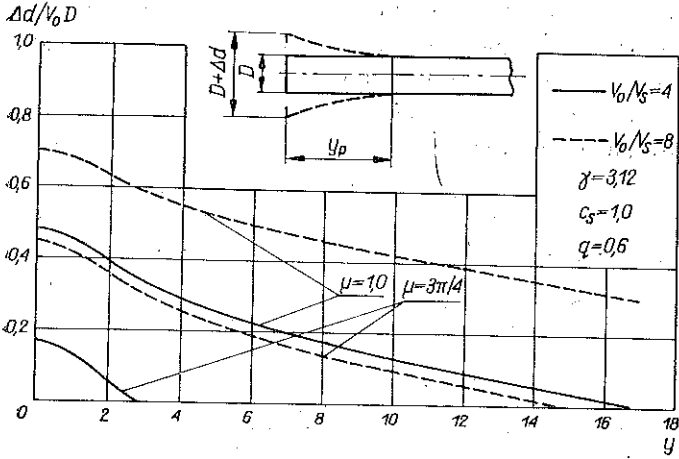
Rysunki 12 i 13 przedstawiają długość uplastycznionej części pręta półnieskończonego jako funkcji V_0/V_s . Zależność tę otrzymuje się ze wzoru (3.15) przez przyrównanie $\varepsilon_{\max}(y)|_{y=y_p} = -\varepsilon_s = -V_s/c_s$, co daje

$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{1 + 2qc_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}^*}{1 + q^{2n+1}} \left[\frac{2qy_p}{(1-q)c_s a} \right]^{2n} \frac{1}{(2n)!}}{1 - (1-q)c_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}^*}{1 - q^{2n+1}} \left[\frac{2qy_p}{(1-q)c_s a} \right]^{2n} \frac{1}{(2n)!}}$$

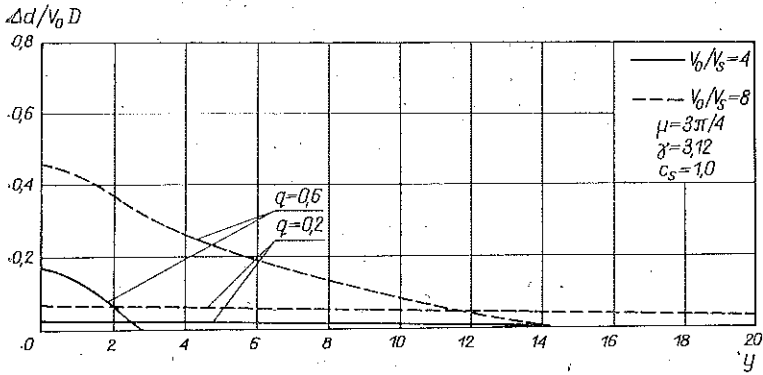
Z rysunku 12 widać, że jeżeli gęstość liniowa pręta jest równa gęstości liniowej belki, to uplastycznienie pręta następuje przy prędkości uderzenia $V_{kr} = 1,883 V_s$. Jeżeli gęstość pręta wzrasta dwukrotnie w stosunku do gęstości belki, to uplastycznienie pręta wymaga większej prędkości uderzenia, $V_{kr} = 2,766 V_s$. Gdyby pręt uderzał w sztywną belkę, to $V_{kr} = V_s$. Moduł wzmocnienia, tkwiący w parametrze

$q \left(q = \frac{1 - E_w/E_p}{1 + E_w/E_p} \right)$ ma istotny wpływ na długość uplastycznionego odcinka pręta.

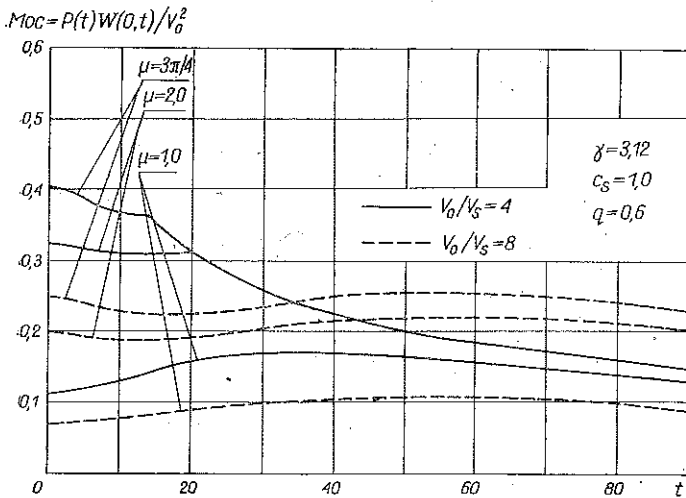
Z rys. 13 widać, że przy dużych modułach wzmocnienia (małe q) długość uplastycznionej części pręta jest duża. Jednakże wartość deformacji trwałych w tym przypadku jest mała. Widoczne to jest na rys. 15, przedstawiającym zmianę średnicy pręta jako funkcji odległości y dla różnych parametrów wzmocnienia q . Rysunek 14 przedstawia tę samą zależność dla różnych gęstości μ . Rysunek 16 przedstawia wykres mocy pręta sprężysto-plastycznego jako funkcji czasu dla różnych sto-



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

sunków gęstości pręta i belki μ . Widoczne tu jest, że pręt o niskiej granicy plastyczności ma mniejszą moc w początkowym okresie kontaktu. Z czasem jednak moc ta spada nieznacznie, a nawet wzrasta. Pole pod krzywymi przedstawia pracę przekazaną belce przez pręt w danej chwili.

Z przeprowadzonych rozważań wynikają następujące wnioski:

1. Uplastycznienie sprężysto-plastycznego pręta uderzającego w sprężystą belkę nastąpi przy prędkości uderzenia V_0 o wiele większej od prędkości uderzenia V_s , przy której pręt uplastyczniliby się, gdyby uderzał w belkę (ciało) sztywną:

$$V_{kr} = \left(1 + \frac{\mu}{2} c_s \sqrt{\gamma}\right) V_s.$$

2. Istotny wpływ na efekty zderzenia ma stosunek gęstości zderzanych obiektów, a nie tylko ich masy całkowite, jak to wynika z dyskretnej teorii uderzenia. Nie jest więc obojętne czy w belkę, płytę itp. uderza pręt stalowy, miedziany, aluminiowy czy inny, mimo że masy wszystkich tych prętów mogą być jednakowe.

3. Największe siły kontaktowe między zderzającymi się ciałami powstają, gdy sztywność, gęstość oraz granica plastyczności ciała uderzającego są największe.

4. Pręty o większych granicach plastyczności (w szczególności pręty sprężyste) mają większą moc w początkowym okresie kontaktu, jednak moc ta z czasem zmniejsza się szybciej niż moc prętów sprężysto-plastycznych o niskich granicach plastyczności.

DODATEK

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{S_1 \mu_3 + S_2 \mu_4}{\rho \varphi_1} d\rho, \quad I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{S_3 \kappa_4}{\rho \varphi_0} d\rho,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\mu}{2} c_s B a \frac{\varphi_2 \mu_1 + \varphi_3 \mu_2}{\rho \varphi_1} d\rho, \quad I_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\mu}{2} c_s B a \frac{\varphi_4 \kappa_2}{\rho \varphi_0} d\rho,$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\mu}{2} c_s \gamma \left(\frac{\rho}{\varphi_1} \mu_3 + \mu_4 \right) d\rho, \quad I_6 = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\mu}{2} c_s \gamma \left(1 - \frac{\rho}{\varphi_0} \right) \kappa_3 d\rho,$$

$$\mu_1 = \cos B\varphi_3 x \operatorname{ch}(\rho t - B\varphi_2 x), \quad \mu_2 = \sin B\varphi_3 x \operatorname{sh}(\rho t - B\varphi_2 x),$$

$$\mu_3 = \cos B\varphi_3 x \operatorname{sh}(\rho t - B\varphi_2 x), \quad \mu_4 = \sin B\varphi_3 x \operatorname{ch}(\rho t - B\varphi_2 x),$$

$$\kappa_1 = \sin \rho t \operatorname{sh} B\varphi_4 x, \quad \kappa_2 = \cos \rho t \operatorname{ch} B\varphi_4 x,$$

$$\kappa_3 = \cos \rho t \operatorname{sh} B\varphi_4 x, \quad \kappa_4 = \sin \rho t \operatorname{ch} B\varphi_4 x,$$

$$S_1 = \frac{\mu}{2} c_s B(\rho \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_3), \quad S_2 = \frac{\mu}{2} c_s B(\varphi_2 \varphi_2 + \rho \varphi_3), \quad S_3 = \frac{\mu}{2} c_s B\varphi_4(\varphi_0 - \rho),$$

$$\varphi_0 = \sqrt{a^2 + \rho^2}, \quad \varphi_1 = \sqrt{a^2 - \rho^2}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\rho(\xi + \rho)/2},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\rho(\xi - \rho)/2}, \quad \varphi_4 = \sqrt{N\rho\varphi_0 - \rho^2}, \quad \xi = \sqrt{N\varphi_1^2 + \rho^2}.$$

Stałe bezwymiarowe a, b, B, N objaśniono w wykazie ważniejszych oznaczeń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. A. BOLEY, C. C. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko beam equations*, J. Appl. Mech., 22, Trans. ASME, 77.
2. R. J. CLIFTON, S. RANGANATH, *Normal impact of an infinite elastic-plastic beam by a semi-infinite elastic rod*, Brown University, Technical Report AFML-TR-71-105, 1971.
3. N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, N-HPC, Amsterdam, 1967.
4. M. A. DENGLER, M. GOLAND, *Transverse impact of long beams including rotatory inertia and shear effects*, Proc. of the 1-st Nat. Congr. Appl. Mech., 1951, publ. by ASME, New York 1952.
5. M. A. DENGLER, M. GOLAND, P. D. WICKERSHAM, *Propagation of elastic impact in beams in bending*, J. Appl. Mech., 22, Trans. ASME, 77, 1-7, 1955
6. G. DOETSCH, *Praktyka przekształceń Laplace'a*, PWN, Warszawa 1964.
7. W. FLÜGGE, E. E. ZAJAC, *Bending impact waves in beams*, Ing. Arch., 1959.
8. W. GOLDSMITH, *Impact*, E. Arnold, London 1961.
9. Э. И. Григориук, И. Т. Селезов, *Неклассические теории колданий стержней, пластин и оболочек*, Москва 1973.
10. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
11. W. JOHNSON, *Impact strength of materials*, E. Arnold, London 1972.
12. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
13. J. M. KELLY, *The impact of a mass on a beam*, Int. J. Solids Structures, 3, 191-196, 1967.
14. H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Oxford 1953.
15. S. J. KOWALSKI, *Nieskończona sprężysta belka Timoshenki uderzona poprzecznie skończonym prętem sprężystym*, Rozpr. Inżyn., 21, 4, 621-640, 1973.
16. S. J. KOWALSKI, *Zagadnienie dynamicznego kontaktu w układzie pręt-belka z uwzględnieniem plastyczności pręta*, Prace IPPT PAN, 7, 1975.
17. R. W. LEONARD, V. BUDIANSKY, *On traveling waves in beams*, Report 1173, NACA, 1953.
18. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1974.
19. S. RANGANATH, *Normal impact of an infinite elastic beam by a semi-infinite elastic rod*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 455-460, 1971.
20. X. A. Рахматулин, Ю. А. Демьянов, *Прочность при интексивных кратковременных нагрузках*. ГИФ-МЛ, Москва 1961.
21. H. STEINHAUS i inni, *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1971.
22. W. T. THOMSON, *Laplace transformation*. Prentice-Hall, INC 1960.
23. J. VOLEK, *Ráz pružné tyce na prostý nosník*, Proc. of the VIII-th Conf. Dynamics of Machines, Praha 1973.
24. J. K. WILMAŃSKI, *Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki*. Mech. Teoret. i Stos. 2, 2, PWN, Warszawa 1964.

Резюме

BESKONECZNAJ UPRUGAJA BALKA TIMOSZENKI POPERECZNO UDARENNAJ KONECZNYM UPRUGO-PLASTYCZESKIM STERZHENEM

В работе обсуждается проблема удара бесконечной упругой балки конечным упруго-пластическим стержнем. Анализ волновых явлений ведется опираясь на волновое уравнение Тимошенки в случае балки и на уравнение одномерных продольных волн в случае стержня.

В работе определяются: время контакта стержня с балкой, контактная сила, скорость изгиба, изгибающий момент и сдвигающая сила в балке, как тоже длина пластического отрезка стержня, изменение диаметра стержня, вызванное остаточными деформациями, мощность стержня, а также влияние постоянных (определяющих физические свойства и

геометрические размеры системы стержень-балка) на изменение вышеперечисленных эффектов соударения.

Проблема решена точным образом, используя метод экспоненциального преобразования Фурье, преобразование Лапласа и метод характеристик.

SUMMARY

AN INFINITE ELASTIC TIMOSHENKO-BEAM IMPACT TRANSVERSELY BY A FINITE ELASTIC PLASTIC ROD

The paper deals with a problem of impact of a finite elastic-plastic rod on the infinite elastic beam. The wave equation for a Timoshenko beam and the equation describing one-dimensional wave propagation in a rod are used for analysis of occurring wave phenomena. In the paper there are determined: the contact time of the rod and beam, the contact force, a rate of bending, the bending moment and shear force in the particular sections of a beam, the length of a plastic zone of the rod, a change of diameter of the rod caused by the permanent deformations, the strength of the rod, and the influence of constants (determining physical properties and geometrical deformations of the rod-beam system) on the change of the mentioned above impact effects.

The problem was solved in a closed form by using the methods: exponential Fourier transform, Laplace transform and method at characteristics.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
PRACOWNIA TEORII KONSOLIDACJI I TERMODYFUZJI, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 listopada 1975 r.