

DRGANIA I ZGINANIE PROSTOKĄTNYCH PŁYT PODPARTYCH PUNKTOWO (*)

KRZYSZTOF WOŹNICA (WARSZAWA)

Opracowano na podstawie metody skończonej transformacji Fouriera algorytm, umożliwiający otrzymanie formalnie ścisłych rozwiązań niektórych praktycznych zagadnień ze statyki i dynamiki izotropowych płyt prostokątnych, o brzegach swobodnych i podpartych w dowolnych punktach lub na słupach dowolnie rozmieszczonych. Uwzględniono dowolne obciążenia wymuszające drgania harmoniczne. W przypadku zginania płyty prostokątnej podpartej w czterech punktach, przy zachowaniu symetrii obciążenia i podparcia, wykazano regularność nieskończonego układu równań. Podane w pracy przykłady wskazują na praktyczną użyteczność wyprowadzonego algorytmu.

1. WSTĘP

Problemy mechaniki płyt prostokątnych podpartych tylko punktowo lub też na słupach, będące przedmiotem pracy, należą do klasycznych zagadnień brzegowych teorii dźwigarów powierzchniowych; poświęcono im wiele opracowań. Większość z nich zawiera jednak rozwiązania przybliżone, dotyczące szczególnych przypadków podparcia i obciążenia. Ze względu na konieczność ograniczenia objętości artykułu cytuję tylko kilka najważniejszych pozycji literatury dotyczących tej problematyki. Kilkadziesiąt innych prac z tego zakresu zostało podanych i omówionych w rozprawie doktorskiej [1]. Z przeglądu tych prac można wnioskować, że problem statyki i dynamiki płyt podpartych punktowo lub na słupach nie doczekał się jeszcze dostatecznie ogólnego, formalnie ścisłego rozwiązania. Np. w wersji statycznej rozważane były tylko płyty prostokątne podparte w narożach i obciążone w sposób szczególny. Nieliczne rozwiązania podane w pracach Z. MAZURKIEWICZA i K. WOŹNICY [2 i 3], R. TRIBILLY [4] oraz wyniki badań doświadczalnych W. STAROSOLSKIEGO [9–11] umożliwiają określenie sił i przemieszczeń w płytach wspornikowych, podpartych punktowo. Dotyczą one jednak wyłącznie różnych przypadków symetrycznego podparcia i obciążenia. Znane rozwiązania z dynamiki płyt o brzegach swobodnych obejmują tylko przypadki drgań własnych płyt prostokątnych podpartych w narożach lub płyty kwadratowej podpartej symetrycznie w czterech punktach, na przekątnych kwadratu.

(*) Zagadnienia ujęte w tej pracy stanowią część rozprawy doktorskiej [1]. Promotorowi prof. drowi hab. Zbigniewowi MAZURKIEWICZOWI, autor pragnie w tym miejscu wyrazić podziękowanie za wiele cennych rad i wskazówek otrzymanych w trakcie opracowywania zagadnienia.

W rozprawie tej opracowano na podstawie metody skończonej transformacji Fouriera algorytm, umożliwiający otrzymanie formalnie ścisłych rozwiązań niektórych zagadnień ze statyki i dynamiki izotropowych płyt prostokątnych, o brzegach swobodnych i podpartych w dowolnych punktach lub na słupach dowolnie rozmieszczonych. Uwzględniono dowolne obciążenia wymuszające drgania harmoniczne. W przypadku zginania płyty prostokątnej podpartej w czterech punktach, przy zachowaniu symetrii obciążenia i podparcia, wykonano regularność nieskończonego układu równań.

Podany algorytm umożliwia wyznaczanie częstości drgań własnych rozważanych płyt oraz amplitud ugięć i sił wewnętrznych. Niektóre otrzymane w przykładach liczbowych wyniki porównano z odpowiednimi wynikami uzyskanymi w szczególnych przypadkach przez innych autorów. Zamieszczone przykłady wskazują na praktyczną użyteczność przedstawionego sposobu rozwiązania omawianych problemów.

3. COSINUSOWA TRANSFORMACJA FOURIERA RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO PŁYTY

Rozważmy sprężystą, jednorodną, izotropową płytę prostokątną dowolnie podpartą i poddaną działaniu dowolnego obciążenia $\tilde{p}(x, y, t)$ wymuszającego drgania harmoniczne.

Równanie różniczkowe opisujące drgania wymuszone takiej płyty można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \partial_x \tilde{Q}_{xx} + \partial_y \tilde{Q}_{yy} - \partial_{xy} \tilde{R} - \rho \ddot{w} + \tilde{p}(x, y, t) = 0.$$

Uwzględniając znane związki między wielkościami dynamicznymi i ich amplitudami,

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{p}(x, y, t) &= e^{i\omega t} p(x, y), \\ \ddot{w}(x, y, t) &= e^{i\omega t} \omega^2 w(x, y), \\ \tilde{Q}_{ss}(x, y, t) &= e^{i\omega t} Q_{ss}(x, y) \quad (s=x, y), \\ \tilde{R}(x, y, t) &= e^{i\omega t} R(x, y), \end{aligned}$$

otrzymujemy równanie opisujące amplitudy drgań rozważanej płyty

$$(2.3) \quad \partial_x Q_{xx} + \partial_y Q_{yy} - \partial_{xy} R + \rho \omega^2 w + p = 0,$$

gdzie ρ oznacza masę przypadającą na jednostkę środkowej powierzchni płyty, ω częstość kołową wymuszonych drgań harmonicznnych. Amplitudy sił Q_{xx} , Q_{yy} i R oraz momentów zginających M_{xx} , M_{yy} i skręcających $M_{xy} = M_{yx}$ wyrażamy za pomocą znanych wzorów:

$$(2.4) \quad Q_{xx}(x, y) = \partial_x M_{xx} + 2\partial_y M_{xy}, \quad Q_{yy}(x, y) = \partial_y M_{yy} + 2\partial_x M_{xy},$$

$$(2.5) \quad R(x, y) = 2M_{xy},$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} M_{xx}(x, y) &= -D(\partial_{xx} w + \nu \partial_{yy} w), & M_{yy}(x, y) &= -D(\partial_{yy} w + \nu \partial_{xx} w), \\ M_{xy}(x, y) &= -D(1-\nu) \partial_{xy} w, \end{aligned}$$

gdzie sztywność płyty

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

przy czym E oznacza współczynnik sprężystości podłużnej, h grubość płyty oraz ν współczynnik Poissona.

W celu uzyskania możliwie ogólnego rozwiązania równania różniczkowego równowagi (2.3) ze względu na warunki brzegowe zastosujemy skończoną, cosinusową transformację Fouriera.

Założmy, że funkcje transformowane czynią zadość warunkom Dirichleta w przedziale $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Skończone sinusowe i cosinusowe transformacje Fouriera wyrażamy za pomocą następujących wzorów:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} T_{mn}^1 \{f(x, y)\} &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, \\ T_{mn}^2 \{f(x, y)\} &= \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \, dx \, dy, \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Stosując na podstawie wzoru (2.7) skończoną cosinusową transformację Fouriera do funkcji $w(x, y)$ i $p(x, y)$ otrzymujemy

$$(2.8) \quad T_{mn}^2 \{w(x, y)\} = w_{mn}, \quad T_{mn}^2 \{p(x, y)\} = p_{mn}.$$

Transformację odwrotną funkcji w, p wyrażamy za pomocą podwójnych szeregów Fouriera:

$$(2.9) \quad T_{mn}^{-2} \{w_{mn}\} = w(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \lambda_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$(2.10) \quad T_{mn}^{-2} \{p_{mn}\} = p(x, y)$$

gdzie

$$\lambda_{mn} = \lambda_m \lambda_n,$$

$$\lambda_m = 1 - 0,5 \delta_{m0}, \quad \lambda_n = 1 - 0,5 \delta_{n0},$$

przy czym δ_{m0} i δ_{n0} oznaczają symbole Kroneckera.

Stosując skończoną cosinusową transformację do równania (2.4), a następnie wykonując całkowanie przez części, doprowadzamy równanie (2.4) do postaci

$$(2.11) \quad w_{mn} D (A_{mn} - c^4) = p_{mn} + B_{mn}^{(2)},$$

gdzie

$$(2.12) \quad B_{mn}^{(2)} = Q_{mn}^{(1)} + Q_{mn}^{(2)} + D [(\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) \varphi_{mn}^{(1)} + (\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) \varphi_{mn}^{(2)}] - R_{mn}^{(0)},$$

$$(2.13) \quad A_{mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2,$$

$$(2.14) \quad c^4 = \frac{\rho \omega^2}{D},$$

$$(2.15) \quad Q_{mn}^{(1)} = \int_0^b [(-1)^m Q_x(a, y) - Q_x(0, y)] \cos \beta_n y \, dy,$$

$$Q_{mn}^{(2)} = \int_0^a [(-1)^n Q_y(x, b) - Q_y(x, 0)] \cos \alpha_m x \, dx,$$

$$(2.16) \quad \Phi_{mn}^{(1)} = \int_0^b [(-1)^m \varphi_x(a, y) - \varphi_x(0, y)] \cos \beta_n y \, dy,$$

$$\Phi_{mn}^{(2)} = \int_0^a [(-1)^n \varphi_y(x, b) - \varphi_y(x, 0)] \cos \alpha_m x \, dx,$$

$$(2.17) \quad R_{mn}^{(0)} = (-1)^{m+n} R(a, b) + R(0, 0) - (-1)^m R(a, 0) - (-1)^n R(0, b),$$

$$(2.18) \quad \varphi_x = \partial_x w, \quad \varphi_y = \partial_y w.$$

Jak łatwo zauważyć, wyrażenie B_{mn}^2 zależy wyłącznie od reakcji w narożach płyt oraz od brzegowych sił Kirchhoffa i kątów obrotów, które można wyrazić za pomocą pojedynczych szeregów Fouriera:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} Q_x(a, y) &= \frac{2}{b} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-q_j^{(1)}}{q_j^{(3)}} \lambda_j \cos \beta_j y, & Q_y(x, b) &= \frac{2}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-q_i^{(2)}}{q_i^{(4)}} \lambda_i \cos \alpha_i x, \\ Q_x(0, y) & & Q_y(x, 0) & \end{aligned}$$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \varphi_x(a, y) &= \frac{2}{b} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-\varphi_j^{(1)}}{\varphi_j^{(3)}} \lambda_j \cos \beta_j y, & \varphi_y(x, b) &= \frac{2}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-\varphi_i^{(2)}}{\varphi_i^{(4)}} \lambda_i \cos \alpha_i x, \\ \varphi_x(0, y) & & \varphi_y(x, 0) & \end{aligned}$$

Podstawiając szeregi (2.19), (2.20) do wzorów (2.15), (2.16) oraz mając na uwadze równanie (2.11) doprowadzamy szereg (2.9) do następującej postaci:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} w(x, y) &= \frac{4}{abD} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} - R_{mn}^{(0)}}{\Omega_{mn}} \lambda_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \\ &- \frac{4}{abD} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n [f_n^{(0)}(x') q_n^{(3)} + f_n^{(0)}(x) q_n^{(1)}] \cos \beta_n y - \\ &- \frac{4}{abD} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [f_m^{(0)}(y') q_m^{(4)} + f_m^{(0)}(y) q_m^{(2)}] \cos \alpha_m x - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n [\tilde{I}_n(x') \varphi_n^{(3)} + \tilde{I}_n(x) \varphi_n^{(1)}] \cos \beta_n y + \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [\tilde{I}_m(y') \varphi_m^{(4)} + \tilde{I}_m(y) \varphi_m^{(2)}] \cos \alpha_m x. \end{aligned}$$

We wzorze wykorzystano następujące sumy szeregów:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_n^{(0)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda_m \cos \alpha_m x}{\Omega_{mn}} = \frac{a}{4c^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \psi_n x}{\psi_n \operatorname{sh} \psi_n a} - \frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\chi_n \operatorname{sh} \chi_n a} \right], \\ \tilde{f}_n^{(2)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha_m^2 \cos \alpha_m x}{\Omega_{mn}} = \frac{a}{4c^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\operatorname{sh} \chi_n a} - \psi_n \frac{\operatorname{ch} \psi_n x}{\operatorname{sh} \psi_n a} \right], \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &\leq a \\ c &\leq \beta_n, \end{aligned}$$

$$\chi_n, \psi_n = \sqrt{\beta_n^2 \pm c^2}$$

oraz wprowadzono oznaczenia

$$(2.23) \quad \begin{aligned} x' &= a - x, & y &= b - y, \\ \Omega_{mn} &= A_{mn} - c^4, \end{aligned}$$

$$(2.24) \quad \tilde{I}_n(x) = \frac{1}{bc^2} \left[\frac{\chi_n^2 - \nu \beta_n^2}{\chi_n} \frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\operatorname{sh} \chi_n a} - \frac{\psi_n^2 - \nu \beta_n^2}{\psi_n} \frac{\operatorname{ch} \psi_n x}{\operatorname{sh} \psi_n a} \right], \quad c \leq \beta_n.$$

Pozostałe sumy szeregów oraz funkcję $\tilde{I}_m(y)$ tworzymy przez zamianę w wyrażeniach (2.22) i (2.24) odpowiednio n z m , x z y , a z b . Wyrażenia (2.22) i (2.24) są poprawne w przypadku $\beta_n^2 \geq c^2$ i $\alpha_m^2 \geq c^2$. Dla $\beta_n^2 < c^2$ i $\alpha_m^2 < c^2$ korzystamy ze wzorów

$$\sqrt{(-x)} = i\sqrt{|x|}, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x, \quad \operatorname{ch} ix = \cos y.$$

Występujące we wzorze na funkcję ugięcia (2.21) nieznanne współczynniki q_i i φ_i wyznaczmy z warunków podparcia płyty.

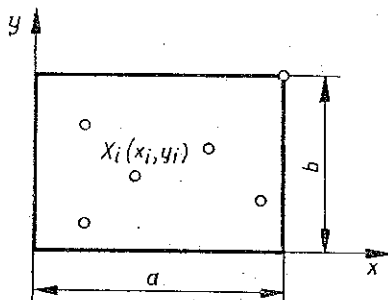
3. DRGANIA WYMUSZONE, HARMONICZNE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ PODPARTEJ PUNKTOWO

Załóżmy, że płyta ma swobodne brzegi i jest podparta punktowo wewnątrz swego obszaru (rys. 1). Liczba oraz rozmieszczenie podpór są dowolne. W tym przypadku na brzegach płyty zachodzą następujące warunki:

$$\begin{aligned} Q_{xx}(a, y) = Q_{xx}(0, y) = 0, \quad Q_{yy}(x, b) = Q_{yy}(x, 0) = 0, \\ M_{xx}(a, y) = M_{xx}(0, y) = M_{yy}(x, b) = M_{yy}(x, 0) = 0, \\ R(0, 0) = R(0, b) = R(a, 0) = R(a, b) = 0, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$Q_{mn}^{(1)} = Q_{mn}^{(2)} = R_{mn}^{(0)} = 0.$$



Rys. 1.

Funkcję $p(x, y)$ opisującą amplitudy sił zewnętrznych działających na płytę można wyrazić w postaci

$$(3.1) \quad p(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^k X_i \delta(x - x_i, y - y_i),$$

gdzie przez $q(x, y)$ i X_i oznaczono odpowiednio amplitudę obciążenia wymuszającego drgania harmonicznego i amplitudy reakcji podpór. Funkcję $q(x, y)$ wyrażamy za pomocą szeregu identycznego z funkcją $p(x, y)$, (2.10). Zakładamy również, że w miejscu podparcia działają tylko siły prostopadłe do płyty.

Nieznane amplitudy reakcji podpór wyznaczamy z warunku zerowania się ugięcia płyty w miejscu podparcia

$$(3.2) \quad w(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Amplitudy momentów M_{xx} i M_{yy} możemy przedstawić za pomocą podwójnych szeregów Fouriera

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_{xx}(x, y) &= \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{mn}^{(1)}}{M_{mn}^{(2)}} \lambda_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ M_{yy}(x, y) &= \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{mn}^{(2)}}{M_{mn}^{(1)}} \lambda_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_{mn}^{(1)} &= T_{mn}^2 \{M_{xx}\} = D [(\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} - \Phi_{mn}^{(1)} - \nu \Phi_{mn}^{(2)}], \\ M_{mn}^{(2)} &= T_{mn}^2 \{M_{yy}\} = D [\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) w_{mn} - \nu \Phi_{mn}^{(1)} - \Phi_{mn}^{(3)}], \end{aligned}$$

Wielkości $\Phi_{mn}^{(1)}$ i $\Phi_{mn}^{(2)}$ opisane są za pomocą całek (2.16).

Z warunku zerowania się na krawędziach płyty momentów zginających, wyrażonych w postaci szeregów (3.3), otrzymujemy układ czterech nieskończonych układów algebraicznych równań liniowych:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} M_{mn}^{(1)} \lambda_{mn} &= 0, & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m M_{mn}^{(1)} \lambda_{mn} &= 0, & n &= 0, 1, \dots, \\ \sum_{n=0}^{\infty} M_{mn}^{(2)} \lambda_{mn} &= 0, & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_{mn}^{(2)} \lambda_{mn} &= 0, & m &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

Uwzględniając warunki podparcia i funkcję obciążenia oraz wykorzystując sumy szeregów (2.22) możemy po przekształceniach napisać układ równań (3.2), (3.5) w postaci

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{4}{D} \sum_{j=1}^k X_j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{\Omega_{mn}} \cos \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i + \\ + ab \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n [\tilde{I}_n(x_i) \varphi_n^{(3)} + \tilde{I}_n(x_i) \varphi_n^{(1)}] \cos \beta_n y_i + \\ + ab \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [\tilde{I}_m(y_i) \varphi_m^{(4)} + \tilde{I}_m(y_i) \varphi_m^{(2)}] \cos \alpha_m x_i = \\ = \frac{4}{D} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} q_{mn}}{\Omega_{mn}} \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ab \sum_{i=1}^k X_i \tilde{I}_n(x'_i) \lambda_n \cos \beta_n y_i - \tilde{S}'_n \lambda_n \varphi_n^{(3)} - \tilde{S}_n \lambda_n \varphi_n^{(1)} + \\
 & + 4D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu c^4}{\Omega_{mn}} \lambda_{mn} [\varphi_m^{(4)} + (-1)^n \varphi_m^{(2)}] = \tilde{F}'_n \lambda_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i \tilde{I}_n(x_i) \lambda_n \cos \beta_n y_i - \tilde{S}_n \lambda_n \varphi_n^{(3)} - \tilde{S}'_n \lambda_n \varphi_n^{(1)} + \\
 (3.7) \quad & + 4D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu c^4}{\Omega_{mn}} \lambda_{mn} (-1)^m [\varphi_m^{(4)} + (-1)^n \varphi_m^{(2)}] = \tilde{F}_n \lambda_n, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i \tilde{I}_m(y'_i) \lambda_m \cos \alpha_m x_i + 4D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu c^4}{\Omega_{mn}} \times \\
 & \times \lambda_{mn} [\varphi_n^{(3)} + (-1)^m \varphi_n^{(1)}] - \tilde{S}'_m \lambda_m \varphi_m^{(4)} - \tilde{S}_m \lambda_m \varphi_m^{(2)} = \tilde{F}'_m \lambda_m, \quad m=0, 1, 2, \dots, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i \tilde{I}_m(y_i) \lambda_m \cos \alpha_m x_i + 4D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu c^4}{\Omega_{mn}} \times \\
 & \times \lambda_{mn} (-1)^n [\varphi_n^{(3)} + (-1)^m \varphi_n^{(1)}] - \tilde{S}_m \lambda_m \varphi_m^{(4)} - \tilde{S}'_m \lambda_m \varphi_m^{(2)} = \tilde{F}_m \lambda_m,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}'_n &= \frac{Da}{c^2} \left[\frac{(\chi_n^2 - \nu \beta_n^2)^2}{\chi_n} \operatorname{cth} \chi_n a - \frac{(\psi_n^2 - \nu \beta_n^2)^2}{\psi_n} \operatorname{cth} \psi_n a \right], \\
 \tilde{S}_n &= \frac{Da}{c^2} \left[\frac{\chi_n^2 - \nu \beta_n^2}{\chi_n \operatorname{sh} \chi_n a} - \frac{(\psi_n^2 - \nu \beta_n^2)^2}{\psi_n \operatorname{sh} \psi_n a} \right], \\
 \tilde{F}'_n &= ab \int_0^a \int_0^b q(x, y) \frac{\tilde{I}_n(x')}{\tilde{I}_n(x)} \cos \beta_n y \, dx \, dy.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Pozostałe wielkości \tilde{S}_m , \tilde{S}'_m , \tilde{F}_m , \tilde{F}'_m tworzymy, podobnie jak poprzednio, przez zamianę symboli x , y , a , n , odpowiednio na y , x , b , m . Funkcja $\tilde{I}_n(x)$ jest określona za pomocą wzoru (2.24).

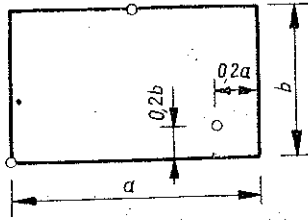
Przedstawiony za pomocą wzorów (3.6), (3.7) nieskończony układ równań jest symetryczny względem głównej przekątnej. Umożliwią one obliczenie w sposób przybliżony z dowolną dokładnością dla skończonej liczby m i n , współczynników $\varphi_n^{(3)}$, $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_m^{(4)}$, $\varphi_m^{(2)}$ oraz reakcji X_i w punktach podparcia (x_i, y_i) . Znajomość tych wielkości pozwala, na podstawie wzoru (2.21), wyznaczyć amplitudy ugięć w różnych punktach środkowej powierzchni płyty.

Przyrównując do zera główny wyznacznik układu równań (3.6), (3.7) znajdujemy równanie charakterystyczne, umożliwiające obliczenie różnych kołowych częstości drgań własnych płyty dla dowolnie rozmieszczonych podpór punktowych.

3.1. Przykłady obliczeń częstości drgań własnych płyt

Na podstawie opisanego wyżej algorytmu opracowano program na maszynie ODRA 1204 w języku ALGOL 1204. Umożliwił on wyznaczenie kolejnych częstości drgań własnych płyty prostokątnej dla dowolnie rozmieszczonych podpór

punktowych. We wszystkich zamieszczonych niżej przykładach przyjęto do obliczeń współczynnik Poissona $\nu=0,3$. Ze względu na bardzo dobrą zbieżność wyników, stopień przyrównywanego do zera wyznacznika był uzależniony od liczby kolejnych częstości, które miały być wyznaczone.



Rys. 2

Na rysunku 2 pokazano płytę prostokątną o stosunku boków $a/b=5/3$, dla której wyznaczono trzy kolejne częstości drgań własnych

$$\omega = \frac{\mu}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}}$$

i zestawiono je w tablicy 1.

Tablica 1

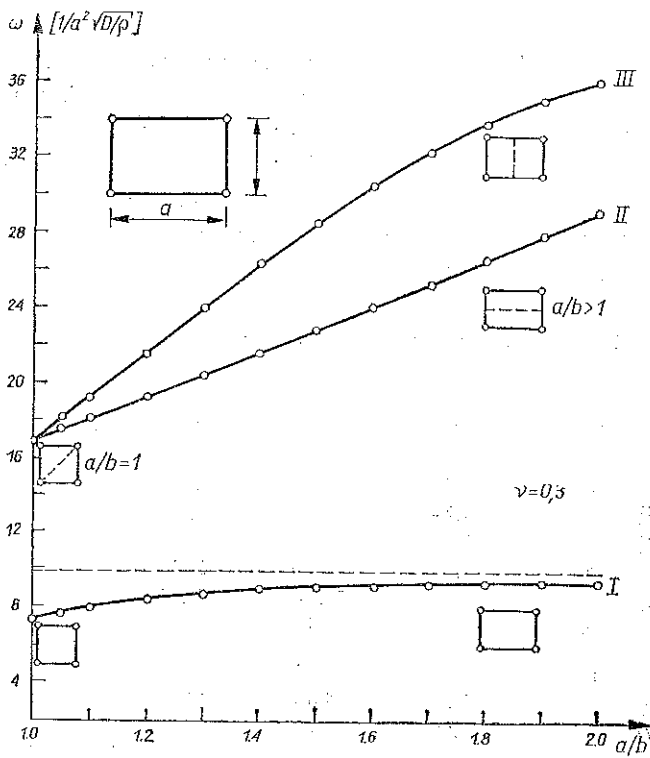
	I	II	III
μ	11,63	16,36	23,15

Kolejne częstości drgań własnych płyty prostokątnej przedstawiono na rys. 3 w zależności od stosunków boków a/b . Łatwo zauważyć, że dla $a/b \rightarrow \infty$ wartość $\mu \rightarrow \pi^2$, tj. dąży do wartości odpowiadającej wielkości podstawowej częstości drgań własnych swobodnie podpartej belki. Dla $\nu=0$ i $a/b = \infty$ jest $\mu = \pi^2$.

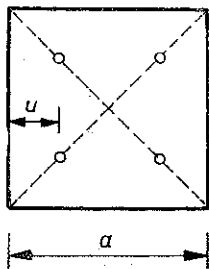
W tablicy 2 zestawiono podstawowe częstości drgań własnych płyty prostokątnej dla trzech wielkości stosunków boków a/b , wyznaczone za pomocą metody skończonej transformacji Fouriera oraz wyniki zamieszczone w pracy H. L. COXA i J. BOXERA [6], uzyskane za pomocą metody różnic skończonych.

Tablica 2. Podstawowe częstości drgań własnych płyty prostokątnej podpartej w narożach

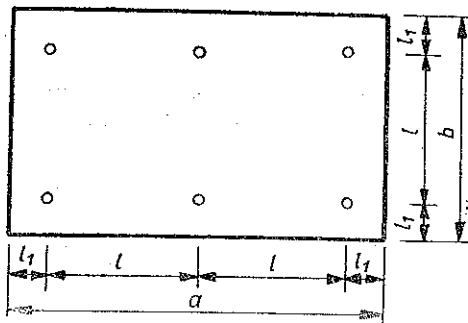
a/b	Metoda skończonej transformacji Fouriera	Metoda różnic skończonych [8]
	μ	μ
1	7,32	7,12
1,5	9,11	8,93
2	9,41	9,29



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

W przypadku drgań własnych płyty kwadratowej podpartej w czterech punktach umieszczonych symetrycznie na przekątnych (rys. 4), wartości kolejnych częstości własnych zestawiono w tabelicy 3. Porównano je z wynikami otrzymanymi na podstawie metody skończonej transformacji Fouriera, metody różnic skończonych [5, 7] i metody elementów skończonych [8]. Zamieszczono również rezultaty badań eksperymentalnych podane przez niektórych autorów. Jak łatwo zauważyć, ogólnie nie występują duże różnice w wynikach.

Tablica 3. Częstości drgań własnych płyty kwadratowej podpartej w czterech punktach (rys. 4) wg różnych autorów

u/a	I	II	III	IV
0	7,32	16,92*	19,60	—
[8]	7,14	15,59*	19,60	38,73
[7]	7,09	—	—	—
exp.	7,11	15,43	17,36	—
[5]	7,44	16,74	20,17	40,62
exp.	7,8	16,8	20,6	40,7
0,1	12,81	19,60	23,98*	—
[8]	12,80	19,60	23,24*	55,23
[7]	12,56	—	—	—
0,2	19,60	23,05	32,69*	—
[8]	19,61	23,04	32,80*	46,11*
[7]	—	22,26	—	—
0,3	19,22	19,60	23,24*	26,46
[8]	19,14	19,60	23,62*	25,99
[7]	18,31	—	—	—
0,4	13,32	15,72*	18,28	19,60
[8]	13,29	13,84	16,62	19,60
[7]	12,85	—	—	—
0,5	11,49	13,47	19,60	34,81
[8]	11,25	13,61	19,60	32,35
[7]	10,78	—	—	—
exp.	11,02	12,92	17,10	31,89

* częstość podwójna

Na zakończenie tego rozdziału pokażemy jeszcze wyniki obliczeń dla wspornikowej płyty prostokątnej, dwupolowej, o stosunku boków $a/b=5/3$, $l_1/l=1/4$ (rys. 5, tabl. 4).

Tablica 4

	I	II	III
μ	54,67	57,65	67,66

4. ZGINANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ PODPARTEJ PUNKTOWO

Rozważając przypadek płyty poddanej statycznemu działaniu sił wykorzystamy uprzednio podany algorytm rozwiązania problemu dynamicznego, przyjmując w odpowiednich wzorach $\omega \rightarrow 0$.

Na podstawie wzoru (2.11) łatwo zauważyć, że

$$(4.1) \quad p_{00} = -c^4 w_{00}.$$

Uwzględniając związek (4.1) we wzorze (2.21) oraz wykorzystując twierdzenie de l'Hospitala, otrzymujemy funkcję ugięcia płyty punktowo podpartej i obciążonej w sposób statyczny:

$$(4.2) \quad w(x, y) = \frac{w_{00}}{ab} + \frac{4}{abD} \sum_{\substack{m=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} q_{mn}}{A_{mn}} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \\ - \frac{4}{abD} \sum_{i=1}^k X_i \sum_{\substack{m=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{A_{mn}} \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n [I_n(x') \varphi_n^{(3)} + I_n(x) \varphi_n^{(1)}] \cos \beta_n y - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [I_m(y') \varphi_m^{(4)} + I_m(y) \varphi_m^{(2)}] \cos \alpha_m x,$$

gdzie

$$(4.3) \quad I_0(x) = \frac{1}{3ab} (3x^2 - a^2), \\ I_n(x) = \frac{1}{n\pi \operatorname{sh}^2 \beta_n a} \{ \operatorname{sh} \beta_n a [(1+\nu) \operatorname{ch} \beta_n x + (1-\nu) \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x] - \\ - (1-\nu) \beta_n a \operatorname{ch} \beta_n a \operatorname{ch} \beta_n x \}, \quad n=1, 2, \dots,$$

Pozostałe wielkości tworzymy podobnie jak poprzednio zastępując we wzorach (4.3) symbole x, a, n , odpowiednio przez y, b, m . Zatem warunek (3.2), zerowania się ugięcia płyty nad punktową podporą, przedstawimy teraz w następującej postaci:

$$(4.4) \quad \frac{4}{D} \sum_{j=1}^k X_j \sum_{\substack{m=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn}}{A_{mn}} \cos \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i + \\ + ab \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [I_m(x') \varphi_m^{(3)} + I_m(x_i) \varphi_m^{(1)}] \cos \beta_n y_i + \\ + ab \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [I_m(y') \varphi_m^{(4)} + I_m(y_i) \varphi_m^{(2)}] \cos \alpha_m x_i - \\ - w_{00} = \frac{4}{D} \sum_{\substack{m=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} q_{mn}}{A_{mn}} \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

Podobnie przekształcamy układ równań (3.7) warunkujący zerowanie się momentów zginających na swobodnych krawędziach płyty:

$$\begin{aligned}
 & 0,5 ab \sum_{i=1}^k X_i I_0(x'_i) - 0,5 S'_0 \varphi_0^{(3)} - 0,5 S_0 \varphi_0^{(1)} - D\nu [\varphi_0^{(4)} + \varphi_0^{(2)}] = F'_0, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i I_n(x'_i) \cos \beta_n y_i - S'_n \varphi_n^{(3)} - S_n \varphi_n^{(1)} + 4D(1-\nu)^2 \beta_n^2 \times \\
 & \quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\Delta_{mn}} [\varphi_m^{(4)} + (-1)^n \varphi_m^{(2)}] = F'_n \quad n=1, 2, \dots, \\
 & 0,5 ab \sum_{i=1}^k X_i I_0(x_i) - 0,5 S_0 \varphi_0^{(3)} - 0,5 S'_0 \varphi_0^{(1)} - D\nu [\varphi_0^{(4)} + \varphi_0^{(2)}] = F_0, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i I_n(x_i) (\cos \beta_n y_i - S_n \varphi_n^{(3)} - S'_n \varphi_n^{(1)} + 4D(1-\nu)^2 \beta_n^2 \times \\
 & \quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha_m^2}{\Delta_{mn}} [\varphi_m^{(4)} + (-1)^n \varphi_m^{(2)}] = F_n, \quad n=1, 2, \dots, \\
 (4.5) \quad & 0,5 ab \sum_{i=1}^k X_i I_0(y'_i) - D\nu [\varphi_0^{(3)} + \varphi_0^{(1)}] - 0,5 S'_0 \varphi_0^{(4)} - 0,5 S_0 \varphi_0^{(2)} = F, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i I_m(y'_i) \cos \alpha_m x_i + 4D(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \times \\
 & \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\Delta_{mn}} [\varphi_n^{(3)} + (-1)^m \varphi_n^{(1)}] - S'_m \varphi_m^{(4)} - S_m \varphi_m^{(2)} = F, \quad m=1, 2, \dots, \\
 & 0,5 ab \sum_{i=1}^k X_i I_0(y_i) - D\nu [\varphi_0^{(3)} + \varphi_0^{(1)}] - 0,5 S_0 \varphi_m^{(4)} - 0,5 S'_0 \varphi_0^{(2)} = F_0, \\
 & ab \sum_{i=1}^k X_i I_m(y_i) (\cos \alpha_m x_i + 4D(1-\nu)^2 \alpha_m^2 \times \\
 & \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n^2}{\Delta_{mn}} [\varphi_n^{(3)} + (-1)^m \varphi_n^{(1)}] - S_m \varphi_m^{(4)} - S'_m \varphi_m^{(2)} = F_m, \quad m=1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$S'_0 = S_0 = 2D,$$

$$\begin{aligned}
 S'_n &= \frac{D(1-\nu)\beta_n a}{\operatorname{sh}^2 \beta_n a} [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a \operatorname{ch} \beta_n a - (1-\nu) \beta_n a], \\
 (4.6) \quad S_n &= \frac{D(1-\nu)\beta_n a}{\operatorname{sh}^2 \beta_n a} [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a - (1-\nu) \beta_n a \operatorname{ch} \beta_n a], \quad n=1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F'_n &= ab \int_0^a \int_0^b q(x, y) I_n(x') \cos \beta_n y \, dx \, dy. \\
 F_n &= ab \int_0^a \int_0^b q(x, y) I_n(x) \cos \beta_n y \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

Wzory określające S'_m, S_m, F'_m, F_m otrzymamy zastępując symbole n, x, a odpowiednio przez m, y, b .

W układzie równań (4.4) i (4.5) występuje jedna niewiadoma w_{00} , $2(m+1)$ współczynników $\varphi_m^{(4)}$ i $\varphi_m^{(2)}$, $2(n+1)$ nieznanych współczynników $\varphi_n^{(3)}$ i $\varphi_n^{(1)}$ oraz k nieznanych reakcji w podporach. Zatem liczba niewiadomych wynosi $1+k+2(m+n+2)$. Łatwo zauważyć, że układ (4.4), (4.5) zawiera jedynie $k+2(m+n+2)$ równań, a więc brak jest jednego równania. Otrzymamy je z warunku równowagi, rzutując siły działające na pionową oś w :

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^k X_i = \int_0^a \int_0^b q(x, y) dx dy.$$

Równanie (4.7) można też otrzymać przyjmując w (4.1) $\omega=0$. Jednocześnie warto zwrócić uwagę, że w wydzielonych z układu (4.5) równaniach dla współczynników $m=0$ i $n=0$ zawarte są dwa warunki zerowania się sumy momentów sił względem osi x i y .

Podobnie jak w rozważanym uprzednio zagadnieniu dynamicznym, układ równań (4.4), (4.5) i (4.7) jest symetryczny. Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań umożliwia wyznaczenie wszystkich interesujących nas wielkości statycznych i geometrycznych, występujących w płytach punktowo podpartych i dowolnie obciążonych.

Wzory na momenty zginające $M_{xx}(x, y)$ i $M_{yy}(x, y)$ można otrzymać przez odpowiednie różniczkowanie funkcji ugięcia (4.2) wg wzorów (2.6) lub przez podstawienie współczynnika w_{mn} z równania (2.11) do transformat momentów (3.4) i wysumowanie szeregów. Zamiana szeregów podwójnych na pojedyncze ma istotne znaczenie, ponieważ znacznie usprawnia uzyskanie rozwiązań w konkretnych przypadkach.

Rozpatrzmy szczególny przypadek obciążenia równomiernego rozłożonego na całej powierzchni płyty. Wtedy znacznie upraszcza się prawa strona układu (4.4), (4.5) i (4.7), ponieważ zachodzą następujące zależności:

$$(4.8) \quad F'_n = F_n = F'_m = F_m = q_{mn} = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

$$q \int_0^a \int_0^b dx dy = qab,$$

gdzie $q = \text{const}$ jest obciążeniem równomiernym płyty.

Z kolei podamy wyniki obliczeń otrzymanych dla płyty prostokątnej (rys. 2), podpartej w trzech punktach i obciążonej równomiernie na całej powierzchni; stosunek boków $a/b = 5/3$. Na rys. 6 pokazano ugięcie płyty wyznaczone przy uwzględnieniu 108 równań układu (4.4), (4.5) i (4.7).

W przypadku symetrii obciążenia i podparcia otrzymujemy znaczne uproszczenie układu równań (4.4), (4.5). Zachodzą bowiem następujące związki:

$$(4.9) \quad X_i \delta(x - x_i, y - y_i) = X_i \delta(x - x_i, b - y - y_i) = X_i \delta(a - x - x_i, y - y_i) = \\ = X_i \delta(a - x - x_i, b - y - y_i),$$

$$(4.10) \quad \varphi_x(0, x) = -\varphi_x(a, y), \quad \varphi_y(x, 0) = -\varphi_y(x, b).$$

Z warunku (4.10), na podstawie wzorów (2.20), znajdujemy

$$(4.11) \quad \varphi_n^{(1)} = \varphi_n^{(3)}, \quad \varphi_m^{(2)} = \varphi_m^{(4)}.$$

Dalszym uproszczeniem ulega układ (4.4), (4.5) wtedy, kiedy założymy, że płyta jest podparta w czterech symetrycznie rozmieszczonych punktach. Reakcje w podporach są znane i wynoszą

$$(4.12) \quad X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^b q(x, y) dx dy.$$

W tym przypadku nieznanne współczynniki $\varphi_n^{(1)} = \varphi_n^{(3)}$, $\varphi_m^{(2)} = \varphi_m^{(4)}$ możemy wyznaczyć z układu (4.5), który sprowadzamy do postaci

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \varphi_n^{(1)} - 16D(1-\nu)^2 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{C_n \Delta_{nn}} \varphi_m^{(2)} &= \frac{1}{C_n} [Z_n - q_{00} J_n(x_i) \cos \beta_n y_i], \\ -16D(1-\nu)^2 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{C_m \Delta_{mm}} \varphi_n^{(1)} + \varphi_m^{(2)} &= \frac{1}{C_m} [Z_m - q_{00} J_m(y_i) \cos \alpha_m x_i], \end{aligned}$$

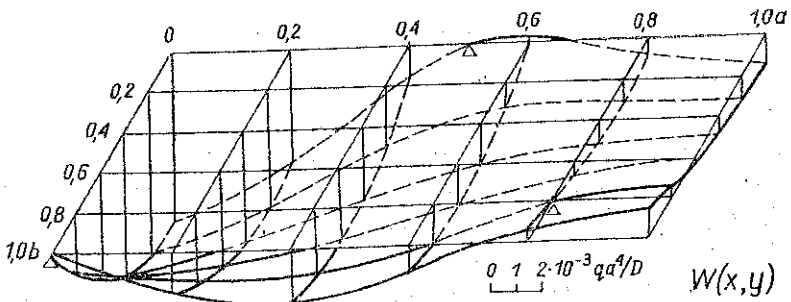
gdzie

$$(4.14) \quad Z_n = F'_n + F_n = ab \int_0^a \int_0^b q(x, y) J_n(x) \cos \beta_n y dx dy,$$

$$(4.15) \quad J_n(x) = I_n(x') + I_n(x) = \frac{1}{n\pi (\operatorname{ch} \beta_n a - 1)} [(1+\nu) (\operatorname{sh} \beta_n x' + \operatorname{sh} \beta_n x) - (1-\nu) (\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x' + \beta_n x' \operatorname{ch} \beta_n x)],$$

$$(4.16) \quad C_n = 2(S'_n + S_n) = \frac{2D(1-\nu)\beta_n a}{\operatorname{ch} \beta_n a - 1} [(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a - (1-\nu)\beta_n a].$$

Pozostałe wielkości Z_m i C_m oraz funkcję $J_m(y)$ tworzymy zastępując we wzorach (4.14)–(4.16) symbole n, x, a odpowiednio przez m .



Rys. 6

Nieznany współczynnik w_{00} wyznaczamy po uprzednim rozwiązaniu nieskończonego układu równań (4.13), przyjmując w miejscu podparcia

$$(4.17) \quad w(x_i, y_i) = 0.$$

Do nieskończonego układu równań algebraicznych (4.13) stosujemy kryterium pełnej regularności, którego spełnienie jest wystarczającym warunkiem jednoznaczności rozwiązania.

Aby układ był w pełni regularny musi być spełniona następująca nierówność:

$$(4.18) \quad 16D(1-\nu)^2 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left| \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{C_n \Delta_{mn}} \right| < 1 - \theta_n, \quad n=2,4,\dots, \quad \theta_n > 0$$

oraz taka sama nierówność dla układu równań o wskaźnikach $m=2,4,\dots$.

Znana jest suma szeregu

$$(4.19) \quad T_n = \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\Delta_{mn}} = \frac{a}{8\beta_n (\operatorname{ch} \beta_n a - 1)} (\operatorname{sh} \beta_n a - \beta_n a).$$

Uwzględniając sumę (4.19) oraz współczynnik C_n przedstawiony za pomocą wzoru (4.16) wykażemy, że nierówność (4.18) jest spełniona:

$$\begin{aligned} 16D(1-\nu)^2 \left| \frac{T_n \beta_n^2}{C_n} \right| &= \frac{(1-\nu) (\operatorname{sh} \beta_n a - \beta_n a)}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a - (1-\nu) \beta_n a} < \\ &< \frac{\operatorname{sh} \beta_n a - \beta_n a}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a - (1-\nu) \beta_n a} < \frac{\operatorname{sh} \beta_n a}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a - (1-\nu) \beta_n a} < \\ &< \frac{\operatorname{sh} \beta_n a}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta_n a} < 1 \quad \text{cbdo.} \end{aligned}$$

Tym samym udowodniono, że układ (4.13) jest układem w pełni regularnym.

5. ZGINANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ PODPARTEJ NA SŁUPACH

Założenie punktowego podparcia, często stosowane w rozważaniach teoretycznych, nie ma uzasadnienia w praktyce i prowadzi w strefach przypodporowych do znacznych rozbieżności między wynikami obliczeń, a rzeczywistymi wielkościami sił. W teorii cienkich dźwigarów powierzchniowych, w miejscu punktowego podparcia otrzymujemy nieciągłość momentów i sił poprzecznych. W celu znalezienia wyników bardziej odpowiadających rzeczywistej pracy konstrukcji zajmiemy się zagadnieniem zginania płyty prostokątnej podpartej dowolną liczbą słupów o skończonych wymiarach przekrojów poprzecznych.

Założymy, że reakcja X_i w i -tym słupie rozłożona jest równomiernie na całym przekroju poprzecznym słupa, pomijając wpływ ewentualnych momentów zginających pomiędzy płytą a słupem. Opierając się na powyższym założeniu możemy przyjąć, że intensywność oddziaływania słupa na płytę wynosi

$$(5.1) \quad v_i = \frac{X_i}{c_i d_i},$$

gdzie c_i oznacza długość boku prostokątnego przekroju poprzecznego równoległego do osi x oraz d_i długość boku równoległego do osi y .

Wprowadzając do wzorów występujących w punkcie 4 związek

$$(5.2) \quad X_i = v_i dx_i dy_i,$$

a następnie całkując po powierzchni przekroju poprzecznego słupa w granicach od $x_i - c_i/2$ do $x_i + c_i/2$ oraz od $y_i - d_i/2$ do $y_i + d_i/2$, otrzymujemy układ równań opisujący rozważane zagadnienie. Do równań tych można za pomocą wzoru (5.2) wprowadzić zamiast intensywności v_i całkowitą reakcję słupa X_i .

Wykonując opisane wyżej operacje rachunkowe otrzymujemy funkcję ugięcia płyty podpartej na słupach w następującej postaci:

$$(5.3) \quad w(x, y) = \frac{w_{00}}{ab} + \frac{4}{abD} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} q_{mn}}{\Delta_{mn}} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \\ - \frac{4}{abD} \sum_{i=1}^k X_i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} s_{mi} s_{ni}}{\Delta_{mn}} \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n [I_n(x') \varphi_n^{(3)} + I_n(x) \varphi_n^{(1)}] \cos \beta_n y - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [I_m(y') \varphi_m^{(4)} + I_m(y) \varphi_m^{(2)}] \cos \alpha_m x,$$

gdzie

$$(5.4) \quad s_{im} = \frac{\sin \frac{\alpha_m c_i}{2}}{\frac{\alpha_m c_i}{2}}, \quad s_{ni} = \frac{\sin \frac{\beta_n d_i}{2}}{\frac{\beta_n d_i}{2}}.$$

Funkcje $I_n(x)$, $I_m(y)$ wyrażają się za pomocą wzorów (4.3).

Jak łatwo zauważyć, dla $c_i, d_i \rightarrow 0$ wzór (5.3) na funkcję ugięcia płyty podpartej na słupach sprowadza się do wzoru (4.2), ponieważ

$$(5.5) \quad \lim_{c_i \rightarrow 0} s_{mi} = 1, \quad \lim_{d_i \rightarrow 0} s_{ni} = 1.$$

Warunek zerowania się ugięcia płyty na powierzchni każdego ze słupów spełniony w sposób przybliżony, żądając jedynie, aby całka funkcji ugięcia (5.3) była równa zeru w obszarze przekroju poprzecznego słupa. Założenie to można przyjąć, podobnie jak równomierny rozkład oddziaływania pomiędzy słupem i płytą, w przypadku słupów o małych przekrojach poprzecznych.

Uwzględniając wzory (5.2), (5.1) w równaniu (4.4) oraz całkując po obszarze słupa, znajdujemy

$$(5.6) \quad \frac{4}{D} \sum_{j=1}^k X_j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} s_{mi} s_{ni} s_{mj} s_{nj}}{\Delta_{mn}} \cos \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i +$$

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad [c.d.] \quad & + ab \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [I_n^*(x'_i) \varphi_n^{(3)} + I_n^*(x_i) \varphi_n^{(1)}] s_{ni} \cos \beta_n y_i + \\
 & + ab \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m [I_m^*(y'_i) \varphi_m^{(4)} + I_m^*(y_i) \varphi_m^{(2)}] s_{mi} \cos \alpha_m x_i - \\
 -w_{00} = & \frac{4}{D} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m^2+n^2 \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_{mn} q_{mn} s_{mn} s_{ni}}{\Delta_{mn}} \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i, \quad i=1, 2, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Podobnie ulegnie zmianie układ równań (4.5). Nie podamy go tu jednak ze względu na ograniczoną objętość artykułu, tym bardziej że konieczne poprawki dotyczą jedynie sum zawierających nieznanne siły X_i . W równaniach (4.5) należy zastąpić $I_n(x'_i)$, $I_n(x_i)$, $I_m(y'_i)$, $I_m(y_i)$, odpowiednio na $I_n^*(x'_i) s_{ni}$, $I_n^*(x_i) s_{ni}$, $I_m^*(y'_i) s_{mi}$, $I_m^*(y_i) s_{mi}$, gdzie

$$I_0^*(x) = I_0(x) + \frac{c_i^2}{12ab},$$

$$I_n^*(x) = I_n(x) - \frac{\text{sh} \frac{\beta_n c_i^2}{2}}{\frac{\beta_n c_i}{2}} + \frac{(1-\nu) \text{ch} \beta_n x}{n\pi \text{sh} \beta_n a} \left(\text{ch} \frac{\beta_n c_i}{2} - \frac{\text{sh} \frac{\beta_n c_i}{2}}{\frac{\beta_n c_i}{2}} \right), \quad n=1, 2, \dots$$

Funkcję $I_m^*(y)$ tworzymy zastępując we wzorze (5.7) symbole n, x, a, c_i odpowiednio przez symbole m, y, b, d_i . Równanie (4.7) pozostaje bez zmian.

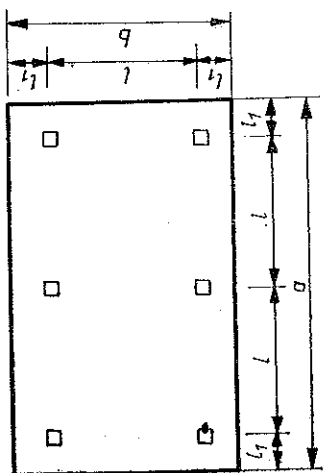
W przypadku szczególnym równomiernego obciążenia płyty zachodzą związki (4.8), które upraszczają rozwiązanie układu równań (5.6) i (4.5), z uprzednio wprowadzonymi zmianami, oraz (4.7).

5.1. Wyniki obliczeń

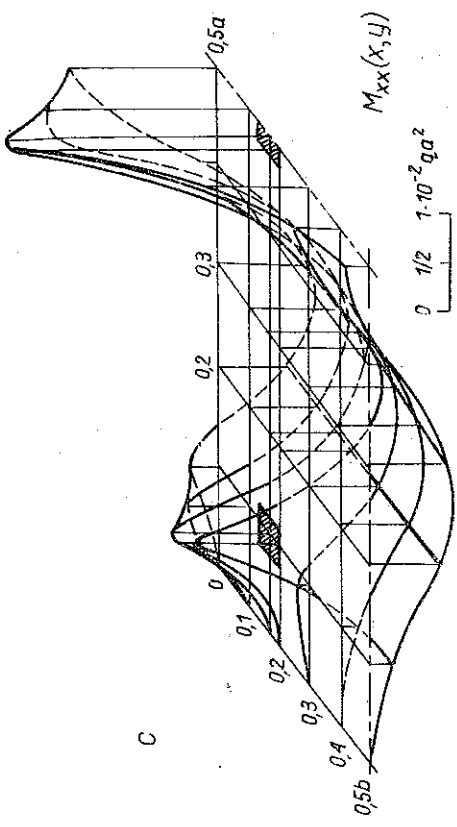
Podobnie jak to było w przypadku wyznaczenia częstości drgań własnych płyty, na podstawie podanego wyżej algorytmu został napisany program na maszynie cyfrową ODRA 1204 w języku ALGOL 1204. W programie przyjęto, że płyta jest równomiernie obciążona $q = \text{const}$ oraz podparta na symetrycznie rozstawionych słupach; liczba jak również wymiary przekroju poprzecznego każdego ze słupów są dowolne. We wszystkich zamieszczonych niżej przykładach przyjęto do obliczeń współczynnik Poissona $\nu = 1/6$.

Na rysunku 7 przedstawiono wyniki obliczeń ugięć i momentów zginających w wspornikowej płycie prostokątnej o stosunku boków $a/b = 5/3$, obciążonej równomiernie i podpartej na sześciu słupach $c_i = d_i = 1/20a$. Wysięg wsporników $l_i/l = 1/4$.

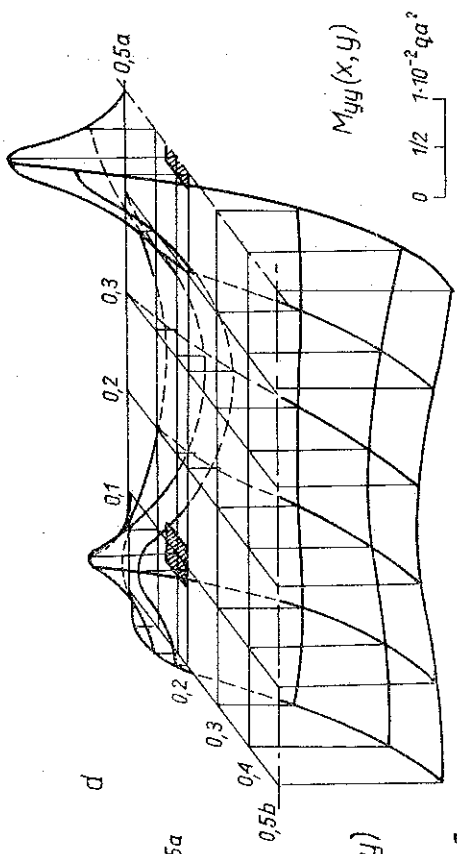
Przygotowany program na komputer można wykorzystać do wyznaczania w sposób przybliżony ugięć i momentów zginających w płytach podpartych na ciągłych podporach nietypowych kształtów. Modelujemy wówczas podporę dowolnego



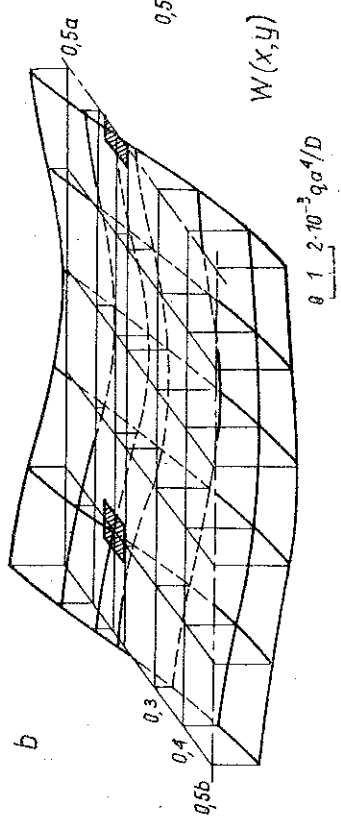
a



c



d



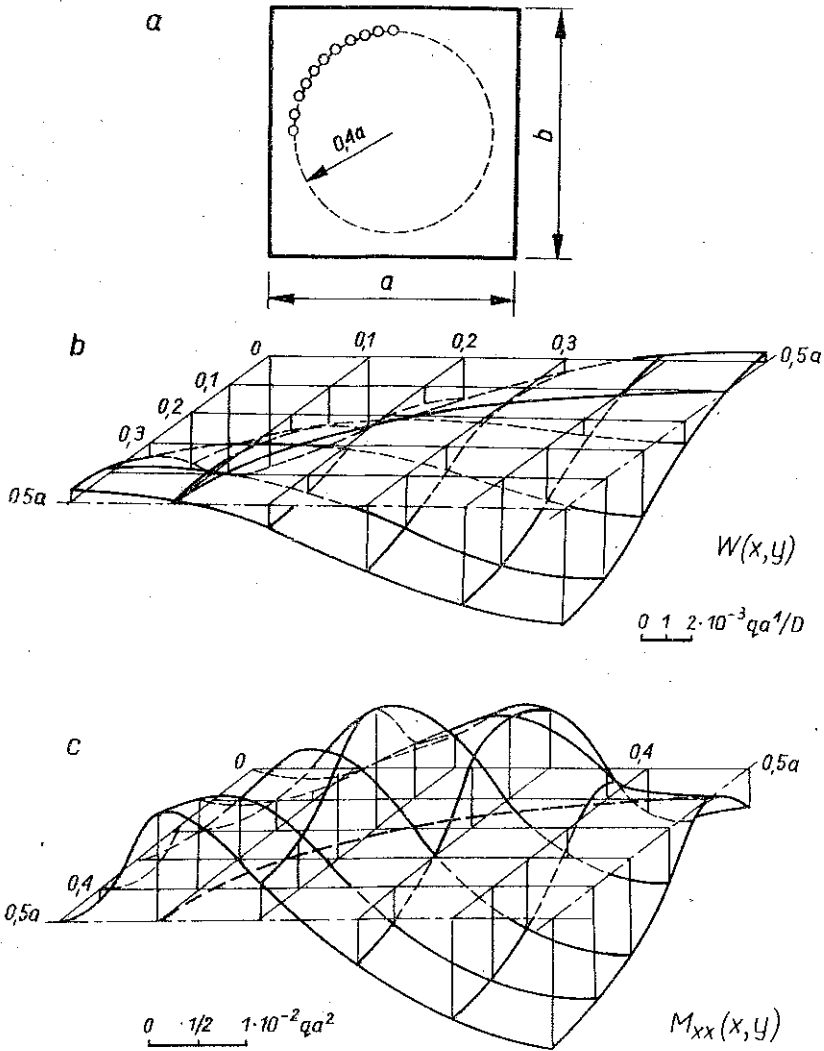
b

Rys. 7

kształtu, tam gdzie jest ciągła, odpowiednio gęsto ustawionymi słupami. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy przybliżone wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych występujących w płycie.

Na rysunku 8 pokazano ugięcia i momenty zginające w płycie kwadratowej obciążonej równomiernie, podpartej na nieskończenie sztywnym wieńcu w kształcie okręgu. Do obliczeń przyjęto, że płyta jest podparta na 40 słupach o przekroju poprzecznym $c_i = d_i = 1/20a$.

W rozprawie doktorskiej [1] wykazano, przyrównując wyniki otrzymane metodą elementów skończonych, że w ten sposób uzyskane wartości ugięć i sił wewnętrznych z dobrym przybliżeniem odpowiadają rzeczywistym wartościom występującym w płycie.



Rys. 8

6. WNIOSKI

Podane w pracy przykłady wskazują na praktyczną użyteczność algorytmu otrzymanego na podstawie skończonej transformacji Fouriera. Wydaje się, że ze znanych metod umożliwiających poprawne rozwiązanie zagadnień będących przedmiotem tej rozprawy, przedstawiony sposób jest szczególnie przydatny, ponieważ prowadzi do określenia z większą dokładnością momentów w okolicach podpór, tj. w miejscach występowania dużych gradientów sił wewnętrznych. Stosowanie metod dyskretyzujących układ podstawowy daje przy podporach wartości sił obciążone dużymi błędami.

W pracy szczególną uwagę poświęcono zginaniu statycznemu płyt podpartych na wielu słupach. Jak wynika z przeglądu literatury, zagadnienie to, poza badaniami doświadczalnymi W. STAROSOLSKIEGO [9-11] nie było rozważane przez innych autorów. Podobnie nie znaleziono przykładów dotyczących wyznaczania sił i przemieszczeń w płytach podpartych swobodnie na podporach ciągłych wewnątrz obszaru płyty.

Oczywiście, nie wykorzystano wszystkich możliwości, jakie daje opracowany algorytm i gotowe już programy na komputer, np. w rozważanych przykładach przyjęto tylko równomierne obciążenie płyty. Poza tym nie podano łatwych do uzyskania rozwiązań uwzględniających wpływ temperatury i przemieszczanie się podpór. Nie zamieszczono również przykładów ze statyki i dynamiki płyt o nieciągłych warunkach brzegowych. Można też bez istotnych trudności wszystkie zamieszczone w pracy rozważania uogólnić dla przypadku ortotropii.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. WOŹNICA, *Drgania i zginanie prostokątnych płyt podpartych punktowo*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1978.
2. Z. MAZURKIEWICZ, K. WOŹNICA, *Certain problems of statics and dynamics of point-supported elastic rectangular plates*, Rozpr. Inżyn., 22, 3, 1974.
3. Z. MAZURKIEWICZ, K. WOŹNICA, *Zginanie symetryczne sprężystych płyt prostokątnych podpartych na słupach*, Czasop. Techn., Budownictwo, 182, 1, 1975.
4. R. TRIBILLO, *Pewne rozwiązanie statyki płyt prostokątnych podpartych punktowo*, Zesz. Nauk., WSI w Białymstoku, Nauki Techn., 8, 1974.
5. T. NISHIMURA, *Studies on vibration problems of flat plates by means of difference calculus*, Proceedings Third Japanese National Congr. of Applied Mech., 1953.
6. H. L. COX, J. BOXER, *Vibration of rectangular plates point supported at the corners*, Aeronaut. Quart., 11, 2, 1960.
7. J. D. JOHNS, R. NĀTARAJA, *Vibration of a square plate symmetrical supported at four point*, J. of Sound and Vibr., 25, 1, 1972.
8. M. PETYT, W. H. MIRZA, *Vibration of column-supported floor slabs*, J. of Sound and Vibr., 21, 3, 1972.
9. W. STAROSOLSKI, *Z zagadnień płaskich stropów bezgłowicowych*, Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, 288, Budownictwo, 23, Gliwice 1968.
10. W. STAROSOLSKI, *Momenty zginające w płytach żelbetowych punktowo podpartych ze wspornikami*, Inżyn. i Budown., 7, 1972.
11. W. STAROSOLSKI, *Ugięcia płyt punktowo podpartych o kwadratowej siatce podpór*, Inżyn. i Budown. 12, 1975.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ И ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ ПОДПЕРТЫХ
ТОЧЕЧНЫМ ОБРАЗОМ

Разработан, на основе метода конечного преобразования Фурье, алгоритм дающий возможность получения формально точных решений некоторых практических задач статики и динамики изотропных прямоугольных плит со свободными границами и подпертых в произвольных точках или на столбах распределенных произвольным образом. Учтены произвольные нагрузки вынуждающие гармонические колебания. В случае изгиба прямоугольной плиты, подпертой в четырех точках, при сохранении симметрии нагрузки и опирания, показана регулярность бесконечной системы уравнений. Приведенные в работе примеры указывают на практическую полезность выведенного алгоритма.

SUMMARY

VIBRATIONS AND BENDING OF POINT-SUPPORTED RECTANGULAR PLATES

On the basis of the finite Fourier transform an algorithm is developed aimed at deriving the formally exact solutions of certain practical problems of statics and dynamics of isotropic rectangular plates with free edge, supported at arbitrarily distributed points or columns. Harmonic vibrations forced by arbitrary loading are taken into account. In the case of a rectangular plate supported at four points, under the conditions of symmetry of loading and the supports, the resulting infinite system of equations is proved to be regular. The examples given prove the practical applicability of the proposed algorithm.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1978 r.