

PODSTAWOWE ZASADY WARIACYJNE W STATYCE OŚRODKÓW SIATKOWYCH

PIOTR ŁAZIŃSKI (WARSZAWA)

Praca poświęcona jest zastosowaniom metod rachunku wariacyjnego do budowy przybliżonych rozwiązań zadań, formułowanych w języku mechaniki ośrodków siatkowych. Po wyprowadzeniu postaci podstawowych zasad wariacyjnych badano różne sposoby konstruowania rozwiązań przybliżonych wraz z szeroko pojętą analizą błędów. Przedyskutowano przydatność kilku miar błędów z punktu widzenia informacji przydatnych dla inżyniera. Wnioski wynikające z tej analizy zilustrowano na prostym przykładzie.

W przygotowywanej do druku pracy autor zajmuje się wykorzystaniem przedstawionej metody w zagadnieniu stateczności płaskich układów kratowych. Zaproponowane niżej miary błędów wydają się być tam szczególnie przydatne.

WSTĘP

Wraz z rozwojem złożonych, prętowych form konstrukcyjnych powstało wiele metod budowy matematycznych modeli takich struktur. Jedną z nich jest «mechanika ośrodków siatkowych»; teoria stworzona przez H. FRĄCKIEWICZA [2] o jednolitym, dość ogólnym charakterze, na podstawie której rozwiązano szereg istotnych zadań z zakresu statyki i stateczności układów kratowych. Wydaje się celowe, zarówno ze względów poznawczych, jak i stworzenia pewnych nowych możliwości uzyskiwania rozwiązań—w szczególności przybliżonych, sformułowanie w języku tej teorii fundamentalnych dla mechaniki zasad wariacyjnych. Ideą niniejszej pracy—pierwszej z cyklu poświęconego zastosowaniom rachunku wariacyjnego w zagadnieniach statyki i stateczności form konstrukcyjnych opisanych teorią ośrodków siatkowych—jest zbadanie możliwości budowy rozwiązań przybliżonych wraz z szeroko pojętą analizą popełnianego błędów, w tym tak błędów rozwiązania uzyskanego w ramach założonego modelu, jak i wynikającego z pewnych uproszczeń modelowych.

Po wprowadzeniu podstawowych pojęć—zaczepniętych głównie z prac [1 i 2]—dotyczących omawianego modelu, sformułowano podstawowe zasady wariacyjne elastostatyki w wygodnych dla dalszych rozważań postaciach. W części trzeciej, ostatniej, zajęto się dyskusją przydatności różnych miar popełnianego błędów.

W przygotowywanej obecnie do druku drugiej pracy z tego cyklu, przedstawione poniżej idee oraz aparat rachunkowy znajdują zastosowanie w badaniu zagadnień stateczności układów kratowych. Z powodu dużych trudności, na jakie nadal napotyka efektywne poszukiwanie ścisłych rozwiązań tych zadań, przedstawione metody okazać się mogą szczególnie przydatne.

Wektory bazy podstawowej w ζ oznaczmy

$$\mathbf{e}_\varphi \equiv \frac{\delta_\varphi \mathbf{r}(\zeta^\alpha)}{\Delta \zeta^\varphi},$$

a obiekt podstawowy w ζ

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta.$$

Oczywiście $|\delta_\varphi \mathbf{r}| = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \zeta^\varphi$ jest odlegością sąsiednich (wzdłuż ζ^φ) punktów ζ .

Bazę wzajemną definiujemy $\mathbf{e}^\beta: \mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = g_\alpha^\beta$, gdzie g_α^β oznacza symbol Kroneckera, a iloczyn $\mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta \equiv g^{\alpha\beta}$ nazywamy obiektem wzajemnym. Prawdziwe są przy tym przekształcenia następujące:

$$\mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\beta, \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = g_\alpha^\gamma, \dots \text{ itd. } (1)$$

Każdy wektor dyskretnego pola $\mathbf{a}(\zeta)^\alpha$ przedstawić można w bazie podstawowej i wzajemnej jako $\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha = a^\beta \mathbf{e}_\beta$ i w ten sposób otrzymuje się odpowiednio jego składowe kowa- i kontrawariantne. Dalej przyjmujemy

$$\delta_\varphi \mathbf{a}(\zeta^\alpha) \equiv \nabla_\varphi a^\rho \mathbf{e}_\rho, \quad \Delta \zeta^\varphi \equiv \nabla_\varphi a_\rho \mathbf{e}^\rho \Delta \zeta^\varphi,$$

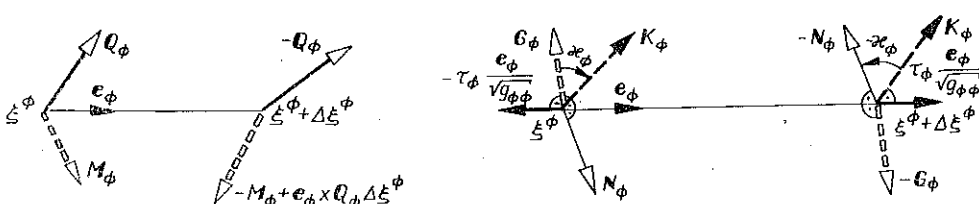
gdzie $\nabla_\varphi a^\rho$ i $\nabla_\varphi a_\rho$ oznaczają przyrosty kowariantne składowych kontra- i kowariantnych wektora. Symbole $\mathbf{V}(\zeta^\alpha)$ i $\mathbf{\Omega}(\zeta^\alpha)$ oznaczają pole przemieszczeń i małych obrotów węzłów ośrodka oraz $\mathbf{Q}_\varphi(\zeta^\alpha)$ i $\mathbf{M}_\varphi(\zeta^\alpha)$ oddziaływanie (w postaci sił i momentów sił) na węzeł $A(\zeta^\alpha)$, $\alpha = \varphi, \psi, A$, pochodzące od sąsiedniego $B(\zeta^\varphi + \Delta \zeta^\varphi, \zeta^\psi, \zeta^A)$. Układ $\mathbf{N}_\varphi, \mathcal{T}_\varphi, \mathbf{K}_\varphi, \mathbf{G}_\varphi, \kappa_\varphi$ oznacza tzw. układ podstawowych obiektów napiecia związanych z $\mathbf{Q}_\varphi, \mathbf{M}_\varphi$ zależnościami następującymi:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{Q}_\varphi &= \mathbf{N}_\varphi - \mathcal{T}_\varphi \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, & \mathbf{N}_\varphi &\perp \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{M}_\varphi &= \mathbf{K}_\varphi + \mathbf{G}_\varphi - \kappa_\varphi \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, & \mathbf{K}_\varphi, \mathbf{G}_\varphi &\perp \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Postulując równowagę łącznika (pręta) AB , mamy związek:

$$(1.2) \quad 2\mathbf{K}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{N}_\varphi \Delta \zeta^\varphi.$$

Wielkości te pokazano na rys. 2.



Rys. 2

(1) Obowiązuje konwencja sumacyjna względem pisanych małymi literami wskaźników na różnym poziomie.

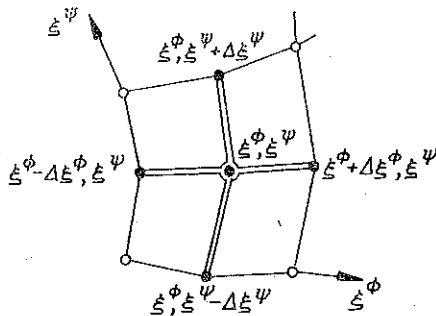
1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Zamieszczone poniżej rozważania dotyczą konstrukcji prętowych, przy czym dla ustalenia uwagi przyjmować będziemy, iż w każdym węźle zbiega się 6 prętów (a w przypadku tzw. konstrukcji powierzchniowych—4 pręty). Kratownica może być zarówno podparta jak i obciążona wyłącznie w punktach węzłowych, co pociąga za sobą możliwość opisu stanu tak powstałej struktury przez podanie tylko «węzłowych» wartości uogólnionych napięć i przemieszczeń. Ma ona więc charakter ośrodka dyskretnego, który zdefiniować możemy następująco.

Niech dany będzie skończony, dyskretny zbiór punktów S z przestrzeni euklidesowej R^3 oraz jedno- jednoznaczne odwzorowanie $f: S \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}^n$, gdzie \mathcal{R}^n jest produktem kartezjańskim skończonych ciągów liczbowych:

$$\mathcal{R}^n \equiv \{\xi^1\} \times \{\xi^2\} \times \dots \times \{\xi^n\}, \quad \xi^\alpha = \xi_0^\alpha + m \Delta \xi^\alpha, \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, n, \\ m = 0, 1, \dots, M^\alpha. \end{array}$$

$A(\xi^\alpha)$ oznacza punkt A o współrzędnej ξ^α przyporządkowanej (odwzorowaniem f) punktowi $A \in S$. Wprowadzimy dalej pojęcie tzw. «punktów sąsiednich» względem A . Będą to punkty o współrzędnych $(\xi_A^\alpha \pm \Delta \xi^\alpha, \xi^\psi, \xi^A, \dots)$, gdzie $\phi, \psi, A, \dots = 1, 2, \dots, n$ oraz $\phi \neq \psi, \phi \neq A, \psi \neq A, \dots$ i one tylko będą oddziaływać na punkt A . Parę (S, f) nazywać będziemy dyskretnym, sparametryzowanym zbiorem ζ . Każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \zeta$ może być wraz z przyjętym schematem oddziaływań modelem kratownicy (przy odpowiednio dobranym S, f i n), zgodnie jednak z początkową uwagą ograniczymy się do $n=2, 3$, co odpowiada powierzchniowemu i przestrzennemu układowi prętów.



Rys. 1

Płaski przypadek ($S \subset R^2, n=2$) zilustrowano na rys. 1. Geometryczne własności takich zbiorów, sposoby analizy dyskretnych pól (np. wektorowych) opisanych w punktach ζ zbadane zostały przez H. FRĄCKIEWICZA [1 i 2].

Przytoczymy teraz najważniejsze definicje i przyjęte dalej oznaczenia: $\mathbf{r} \equiv \overline{OA}$, O oznacza początek układu współrzędnych (np. kartezjańskiego) w $\mathcal{R}^3 | \mathcal{R}^2 | A \in S$;

$$\delta_\phi \omega(\xi^\alpha) \equiv \omega(\xi^\phi + \Delta \xi^\phi, \xi^\psi, \xi^A) - \omega(\xi^\phi, \xi^\psi, \xi^A).$$

2. STATYKA SPRĘŻYSTEGO OŚRODKA SIATKOWEGO. PODSTAWOWE ZASADY WARIACYJNE

Warunek równowagi dowolnego węzła ośrodka prowadzi do układu dwóch różnicowych równań wektorowych postaci [2, str. 93]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & - \sum_{\varphi} \delta_{\varphi} (1 + \delta_{\psi}) (1 + \delta_{\lambda}) \mathbf{Q}_{\varphi} + (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_3) \mathbf{P} = 0, \\ & - \sum_{\varphi} (1 + \delta_{\psi}) (1 + \delta_{\lambda}) [\delta_{\varphi} \mathbf{M}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\varphi} \times \mathbf{Q}_{\varphi} \Delta \xi^{\varphi}] + (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_3) \mathbf{L} = 0, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{P} , \mathbf{L} oznacza pole obciążeń zewnętrznych (sił i momentów). Wszystkie wielkości w równaniach (2.1) zostały określone w punkcie o współrzędnych $(\xi^{\varphi}, \xi^{\psi}, \xi^A)$, zapewniając równowagę punktu $(\xi^{\varphi} + \Delta \xi^{\varphi}, \xi^{\psi} + \Delta \xi^{\psi}, \xi^A + \Delta \xi^A)$. Chcąc więc podać warunek równowagi zbioru \mathcal{D} rzeczywistych węzłów konstrukcji, musimy określić pole napięć w umownym obszarze \mathcal{K} ciała:

$$\mathcal{K} \equiv \{A(\xi^{\varphi}, \xi^{\psi}, \xi^A) \in \zeta: \mathcal{B}(\xi^{\varphi} + \Delta \xi^{\varphi}, \xi^{\psi} + \Delta \xi^{\psi}, \xi^A + \Delta \xi^A) \in \mathcal{D}\}.$$

Weźmy obecnie przyrost $\delta_{\varphi} \omega(\xi^a)$ i znajdziemy sumę w obrębie obszaru \mathcal{K} . Po dokonaniu odpowiednich redukcji otrzymamy

$$(2.2) \quad \sum_{\mathcal{K}} \delta_{\varphi} \omega = \sum_{\partial \mathcal{K}} \omega \mu_{\varphi}.$$

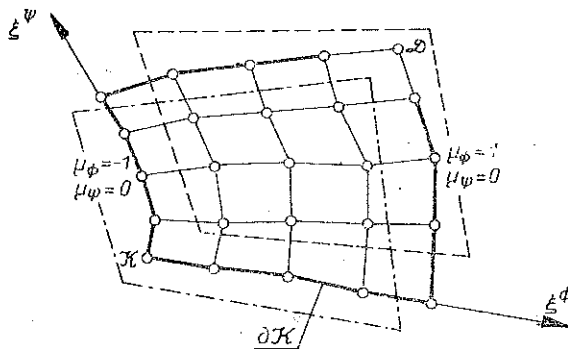
Łatwo pokazać, że obszar $\partial \mathcal{K}$ stanowią punkty następujące:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{K} \equiv \{A \in \zeta: [A \in \mathcal{K} \wedge \underset{\varphi}{\forall} B \notin \mathcal{K}] \vee [A \notin \mathcal{K} \wedge \underset{\varphi}{\forall} B \in \mathcal{K}]\}, \\ A = A(\xi^{\varphi}, \xi^{\psi}, \xi^A), \quad B = B(\xi^{\varphi} - \Delta \xi^{\varphi}, \xi^{\psi}, \xi^A), \end{aligned}$$

a μ_{φ} jest mnożnikiem:

$$\mu_{\varphi} \equiv \begin{cases} 1, & \text{gdy } (A \notin \mathcal{K} \wedge B \in \mathcal{K}), \\ -1, & \text{gdy } (A \in \mathcal{K} \wedge B \notin \mathcal{K}), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Punkty A , B są określone jak wyżej. Dla przypadku płaskiego ilustruje to rys. 3.



Rys. 3

Wprowadzono poprzednio pole $P(\xi^\alpha)$ i $L(\xi^\alpha)$ obciążenia, przyłożonego do «wewnętrznych» węzłów konstrukcji $((\xi^\alpha) \in \mathcal{D}')$:

$$\mathcal{D}' \equiv \{(\xi^\varphi, \xi^\psi, \xi^A) : 1(\xi^\varphi \pm \Delta \xi^\varphi, \xi^\psi, \xi^A) \in \mathcal{D}\}.$$

Pole $\mathring{Q}, \mathring{M}$ opisywać będzie obciążenie «brzegowe», związane z Q_φ i M_φ wzorami następującymi:

$$(2.3) \quad \mathring{Q}(\xi^\alpha) \equiv - \sum_{\varphi} Q_\varphi(\xi^\alpha) \mu_\varphi, \quad \mathring{M}(\xi^\alpha) \equiv - \sum_{\varphi} M_\varphi(\xi^\alpha) \mu_\varphi, \quad \xi^\alpha \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'.$$

Rozpatrując bowiem równowagę globalną układu, tzn. sumując po obszarze \mathcal{X} wzory (2.1) i stosując (2.2), otrzymamy

$$(2.4) \quad \sum_{\mathcal{X}} (1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) P - \sum_{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{X}}} (1+\delta_\psi)(1+\delta_\lambda) \sum_{\varphi} Q_\varphi \mu_\varphi = 0,$$

$$\sum_{\mathcal{X}} \{(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) L - (1+\delta_\psi)(1+\delta_\lambda) \sum_{\varphi} (\mathbf{e}_\varphi \times Q_\varphi \Delta \xi^\varphi)\} -$$

$$- \sum_{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{X}}} (1+\delta_\psi)(1+\delta_\lambda) \sum_{\varphi} M_\varphi \mu_\varphi = 0,$$

co w połączeniu z (2.3) określa równowagę ciała jako całości. Oczywiście część pola $\mathring{M}, \mathring{Q}$ może być dana, część stanowi oddziaływanie węzłów (reakcje).

Przyjmować dalej będziemy, że więzy zewnętrzne narzucone będą na punkty «brzegowe» ($\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$), a pole $V(\xi^\alpha), \Omega(\xi^\alpha)$ określone w \mathcal{D} i spełniające równania węzłów nazywać będziemy kinematycznie dopuszczalnym (V^k, Ω^k). Pola zaś napięć $Q_\varphi(\xi^\alpha), M_\varphi(\xi^\alpha)$ czyniące zadość równaniom równowagi oraz osiągające na «brzegu» ($\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$) znane składowe obciążenia $\mathring{Q}, \mathring{M}$, — określać będziemy mianem statycznie dopuszczalnych Q_φ^s, M_φ^s . Oczywiście, na ogół pola V^k, Ω^k oraz Q_φ^s, M_φ^s są niezależne, gdy zaś zachodzi między nimi związek wynikający z fizycznych własności ośrodka — stanowią one rozwiązanie problemu statyki dyskretnego ciała.

Pomnożmy teraz formalnie pierwsze z równań równowagi (2.1) przez $(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)V$, drugie zaś przez $(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)\Omega$, dodajmy stronami i zsumujmy względem \mathcal{X} . Stosując (2.2) i podstawiając (1.1), (1.2) oraz (2.3); otrzymamy

$$(2.5) \quad \sum_{\mathcal{X}} (1+\delta_\psi)(1+\delta_\lambda) \sum_{\varphi} \left\{ \mathcal{T}_\varphi \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \delta_\varphi V + \kappa_\varphi \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \delta_\varphi \Omega - G_\varphi \delta_\varphi \Omega + \right.$$

$$\left. + K_\varphi \left[2\Omega + \delta_\varphi \Omega - \frac{\mathbf{e}_\varphi \times \delta_\varphi V}{g_{\varphi\varphi} \Delta \xi^\varphi} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{\mathcal{X}} (1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) (PV - L\Omega) - \sum_{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{X}}} (1+\delta_\psi)(1+\delta_\lambda) \sum_{\varphi} (M_\varphi \Omega +$$

$$+ Q_\varphi V) \mu_\varphi.$$

Prawa strona równania wyraża pracę obciążenia zewnętrznego na infinitezymalnym przemieszczeniu uogólnionym V, Ω ; lewa — reprezentuje wewnętrzną energię

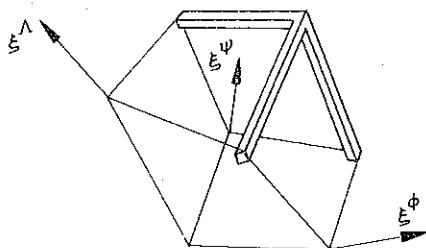
sprężystą. Wprowadzimy z kolei następujące miary stanu odkształcenia [2, s. 80 i 82]

$$\begin{aligned}
 \Delta \xi^\varphi \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \varepsilon_\varphi &\equiv \delta_\varphi \mathbf{V} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \frac{\nabla_\varphi v_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \Delta \xi^\varphi, \\
 \varphi_\varphi &\equiv \delta_\varphi \boldsymbol{\Omega} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \frac{\nabla_\varphi \boldsymbol{\Omega}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} \Delta \xi^\varphi, \\
 \Lambda_\varphi &\equiv -\delta_\varphi \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi = -\nabla_\varphi \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi^\mu \mathbf{e}_\mu \Delta \xi^\varphi, \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi \perp \mathbf{e}_\varphi, \\
 \Gamma_\varphi &\equiv \left[2\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\varphi + \delta_\varphi \tilde{\boldsymbol{\Omega}} - \frac{\mathbf{e}_\varphi \times \delta_\varphi \mathbf{V}}{g_{\varphi\varphi} \Delta \xi^\varphi} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Łatwo przekonać się, że wielkość

$$\mathbf{L} \equiv \frac{1}{2} \sum_\varphi (1 + \delta_\psi) (1 + \delta_\Lambda) [\mathcal{F}_\varphi \varepsilon_\varphi \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi + \kappa_\varphi \varphi_\varphi + \mathbf{G}_\varphi \Lambda_\varphi + \mathbf{K}_\varphi \Gamma_\varphi]
 \tag{2.7}$$

przedstawia energię sprężystą elementu ciała dyskretnego pokazanego na rys. 4.



Rys. 4

Zakładając dalej liniowy związek fizyczny typu [2, 90]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\varphi &= \frac{6A_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi} \Gamma_\varphi, & \mathbf{G}_\varphi &= \frac{2A_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi} \Lambda_\varphi, \\
 \mathcal{K}_\varphi &= \frac{B\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi} \varphi_\varphi, & \mathcal{F}_\varphi &= D\varphi \varepsilon_\varphi,
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

co odpowiada sprężystym, przyrmatycznym, jednorodnym prętom o następujących sztywnościach: giętej A_φ , skrętej B_φ oraz wzdłużnej D_φ — możemy całkowitą energię wewnętrzną wyrazić jako funkcję odkształceń:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \Lambda, \Gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{X}} \sum_{\varphi} (1 + \delta_\psi) (1 + \delta_\Lambda) \{ D_\varphi \varepsilon_\varphi^2 \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi + \\
 &\quad + 1/\sqrt{g_{\varphi\varphi}} \Delta \xi^\varphi [B_\varphi \varphi_\varphi^2 + 2A_\varphi (3|\Gamma_\varphi|^2 + |\Lambda_\varphi|^2)] \},
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

lub napięć wewnętrznych

$$(2.10) \quad \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \mathbf{K}, \mathbf{G}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{X}} \sum_{\varphi} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) \left\{ \frac{1}{D_{\varphi}} \mathcal{T}_{\varphi}^2 + \frac{1}{B_{\varphi}} \kappa_{\varphi}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2A_{\varphi}} \left(\frac{1}{3} |\mathbf{K}_{\varphi}|^2 + |\mathbf{G}_{\varphi}|^2 \right) \right\} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} A_{\xi}^{\varphi}.$$

Niech ciało \mathcal{D} będzie w równowadze pod działaniem obciążenia \mathbf{P} i \mathbf{L} oraz \mathbf{Q} i \mathbf{M} ; nadając wirtualne przemieszczenie uogólnione węzłem konstrukcji, możemy wzór (2.5) napisać w postaci

$$(2.11) \quad \sum_{\mathcal{X}} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) \sum_{\varphi} (\sqrt{g_{\varphi\varphi}} A_{\xi}^{\varphi} \mathcal{T}_{\varphi} \delta \varepsilon_{\varphi} + \kappa_{\varphi} \delta \varphi_{\varphi} + \mathbf{K}_{\varphi} \delta \mathbf{\Gamma}_{\varphi} + \mathbf{G}_{\varphi} \delta \mathbf{\Lambda}_{\varphi}) = \\ = \sum_{\mathcal{X}} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) (\mathbf{P} \delta \mathbf{V} + \mathbf{L} \delta \mathbf{\Omega}) + \\ + \sum_{\partial \mathcal{X}} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) \sum_{\varphi} (\mathbf{Q}_{\varphi} \delta \mathbf{V} + \mathbf{M}_{\varphi} \delta \mathbf{\Omega}) \mu_{\varphi}.$$

Oczywiście przemieszczenia przygotowane — zgodne z więzami narzuconymi na węzły części brzegu $\partial \mathcal{X}$ (oznaczamy ją $\partial \mathcal{X}_v$) — spełniają zależność

$$\delta \mathcal{X}_v: \frac{\partial F}{\partial \mathbf{V}} \delta \mathbf{V} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Omega}} \delta \mathbf{\Omega} = 0,$$

gdzie $F(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}) = 0$ oznacza równanie więzów. Jeśli mają one charakter więzów doskonałych, tzn gdy

$$(2.12) \quad \bigwedge_{A \in \partial \mathcal{X}_v} \left\{ \sum_{\varphi} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) (\mathbf{Q}_{\varphi} \delta \mathbf{V} + \mathbf{M}_{\varphi} \delta \mathbf{\Omega}) \mu_{\varphi} = 0 \right\},$$

to równanie (2.11) przechodzi w zasadę prac przygotowanych:

$$(2.13) \quad \delta \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) = \sum_{\mathcal{X}} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) (\mathbf{P} \delta \mathbf{V} + \mathbf{L} \delta \mathbf{\Omega}) - \\ - \sum_{\partial \mathcal{X} | \partial \mathcal{X}_v} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) \sum_{\varphi} (\mathbf{Q}_{\varphi} \delta \mathbf{V} + \mathbf{M}_{\varphi} \delta \mathbf{\Omega}) \mu_{\varphi},$$

gdzie

$$\delta \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) \equiv \sum_{\varphi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_{\varphi}} \delta \varepsilon_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\varphi}} \delta \varphi_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{\Gamma}_{\varphi}} \delta \mathbf{\Gamma}_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{\varphi}} \delta \mathbf{\Lambda}_{\varphi} \right).$$

Podobnie, nadając wirtualny przyrost napięciom wewnętrznym (zgodny z równaniami statyki), otrzymamy postać następującą dopełniającą zasady prac przygotowanych:

$$(2.14) \quad \delta \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots) = - \sum_{\partial \mathcal{X}_v} (1 + \delta_{\psi})(1 + \delta_{\lambda}) \sum_{\varphi} (\mathbf{V} \delta \mathbf{Q}_{\varphi} + \mathbf{\Omega} \delta \mathbf{M}_{\varphi}),$$

przy czym więzy $F(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}) = 0$ mają charakter więzów doskonałych oraz

$$\delta \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots) \equiv \sum_{\varphi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\varphi}} \delta \mathcal{T}_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \kappa_{\varphi}} \delta \kappa_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{G}_{\varphi}} \delta \mathbf{G}_{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{K}_{\varphi}} \delta \mathbf{K}_{\varphi} \right).$$

Inna znana postać równania (2.13) i (2.14), to—przy założonym zachowawczym charakterze obciążenia zewnętrznego—twierdzenie o minimum energii potencjalnej i dopełniającej:

$$(2.15) \quad \pi(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k) \geq \pi(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}), \quad \pi(\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s) \geq \pi(\mathbf{Q}_\varphi, \mathbf{M}_\varphi),$$

gdzie

$$\pi(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}) \equiv \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) + \sum_{\partial \mathcal{X}^1 \partial \mathcal{X}^v} (1 + \delta_\psi)(1 + \delta_\Lambda) \sum_{\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{V} + \mathbf{M}_\varphi \mathbf{\Omega}) \mu_\varphi - \\ - \sum_{\mathcal{X}} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) (\mathbf{P}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{\Omega}),$$

$$\pi(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{T}, \dots) + \sum_{\partial \mathcal{X}^v} (1 + \delta_\psi)(1 + \delta_\Lambda) \sum_{\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{V} + \mathbf{M}_\varphi \mathbf{\Omega}) \mu_\varphi.$$

Mamy również

$$\mathbf{V}^k = \mathbf{V} + \delta \mathbf{V}, \quad \mathbf{\Omega}^k = \mathbf{\Omega} + \delta \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{Q}_\varphi^s = \mathbf{Q}_\varphi + \delta \mathbf{Q}_\varphi, \dots,$$

przy czym \mathbf{V} , $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{Q}_φ i \mathbf{M}_φ stanowią rozwiązanie problemu.

Napiszmy jeszcze w nieco odmiennej postaci nierówności (2.15). Otóż biorąc pod uwagę wyrażenie

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{X}} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) (\mathbf{P}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{\Omega}) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\partial \mathcal{X}^1 \partial \mathcal{X}^v} (1 + \delta_\psi)(1 + \delta_\Lambda) \sum_{\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi \mathbf{V} + \mathbf{M}_\varphi \mathbf{\Omega}) \mu_\varphi$$

i korzystając z (2.5) oraz warunku (2.12) możemy je zastąpić przez $\mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots)$ lub $\mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots)$.

Obliczając w przypadku pól rzeczywistych wartości π otrzymamy korzystając z powyższych stwierdzeń

$$\pi(\mathbf{Q}_\varphi, \mathbf{M}_\varphi) = \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots) = \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) = -\pi(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega})$$

Łącząc je zaś razem z nierównościami (2.15) dostaniemy

$$-\pi(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k) \leq \mathcal{P} \leq \pi(\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s)$$

lub

$$-\pi(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k) \leq \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) = \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots) \leq \mathcal{L}(\mathcal{T}_\varphi^s, \kappa_\varphi^s, \mathbf{K}_\varphi^s, \mathbf{G}_\varphi^s),$$

a także jeszcze inaczej, żądając aby kinematycznie dopuszczalne uogólnione przemieszczenia były liniową, jednorodną funkcją skalaru λ , czyli

$$\mathbf{V}^k = \lambda \bar{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{\Omega}^k = \lambda \bar{\mathbf{\Omega}} \Rightarrow (\varepsilon^k, \varphi^k, \mathbf{\Gamma}^k, \mathbf{\Lambda}^k) = (\lambda \bar{\varepsilon}, \lambda \bar{\varphi}, \lambda \bar{\mathbf{\Gamma}}, \lambda \bar{\mathbf{\Lambda}})$$

możemy $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega})$ przedstawić jako $\lambda^2 \mathcal{L}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}, \dots) - \lambda 2\mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}})$. Stawiając warunek minimum π ze względu na λ mamy

$$2\lambda \mathcal{L}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}, \dots) - 2\mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}})}{\mathcal{L}(\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}, \dots)},$$

a po podstawieniu do π

$$\lambda [\mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}}) - 2\mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}})] = -\lambda \mathcal{P}(\bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{\Omega}}) = -\mathcal{P}(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k)$$

i poprzednie nierówności przyjmą postać

$$(2.16) \quad \mathcal{P}(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k) \leq \mathcal{L}(\varepsilon, \varphi, \dots) \leq \mathcal{L}(\mathcal{F}_\varphi^s, \kappa_\varphi^s, \dots).$$

Wielkość $\mathcal{P}(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega})$, będąca pracą obciążenia zewnętrznego, może być miarą globalnej sztywności (czy ściślej, jej odwrotności) ciała sprężystego, a z nierówności (2.16) wynikają wtedy dwa wnioski następujące:

1. Dodanie więzów wewnątrz obszaru ciała bądź na jego brzegu nie zmniejsza mierzonej sztywności ciała p , pole bowiem przemieszczeń i obrotów konstrukcji z dodatkowymi więzami jest kinematycznie dopuszczalne dla jej wersji bez tych więzów; mamy przeto

$$\mathcal{P}_z \text{ z dodatkowymi więzami} = \mathcal{P} \text{ bez dodatkowych więzów} (\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k) \leq \mathcal{P} \text{ bez dodatkowych więzów}.$$

2. Odjęcie więzów nie może spowodować usztywnienia konstrukcji.

Sformułowane twierdzenia energetyczne w postaci (2.15) lub (2.16) służyć mogą do budowy zarówno przybliżonych, jak i ścisłych rozwiązań problemów statyki omawianego dyskretnego ciała sprężystego.

Sposób budowy takich rozwiązań został pokrótce omówiony w następnym punkcie pracy, przy czym szczególną uwagę zwrócono na dyskusję wielkości popełnianego błędu, tj. na problem, któremu jak się wydaje, poświęcono dotąd zbyt mało uwagi.

3. KONSTRUOWANIE ROZWIĄZAŃ PRZYBLIŻONYCH

Wykorzystanie twierdzeń energetycznych do uzyskania rozwiązań przybliżonych problemu statyki ciał sprężystych (ciągłych i dyskretnych) jest znane. Można określić pole przemieszczeń, minimalizując (np. metodą Ritza) wielkość energii potencjalnej, jak i pole napięć—z warunku minimum energii komplementarnej. Tym, co zasadniczo ułatwia postępowanie w przypadku konstrukcji dyskretnych, jest skończona liczba liniowo niezależnych wyrazów rozwiązań; tym samym więc nie występuje problem ich zbieżności do wyniku ścisłego.

W przypadku ciągu pól kinematycznie dopuszczalnych $(\mathbf{V}^k, \mathbf{\Omega}^k)$, liczba tych wyrazów nie przekracza $6M$, gdzie M oznacza liczbę węzłów w obszarze \mathcal{D} i wolnej od więzów podporowych części $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$. Oczywiście, jeśli $\mathbf{V}_i^k(\xi^\alpha)$, $\mathbf{\Omega}_i^k(\xi^\alpha)$ ($i=1, 2, \dots, 3M$) są polami kinematycznie dopuszczalnymi, to także każde

$$\mathbf{V}^k = \sum_{i=1}^{\leq 3M} \mathbf{V}_i^k \quad \text{ i } \quad \mathbf{\Omega}^k = \sum_{i=1}^{\leq 3M} \mathbf{\Omega}_i^k$$

jest kinematycznie dopuszczalne. Szczególnie wygodne w zastosowaniach będą pola, w których \mathbf{V}_i^k , $\mathbf{\Omega}_i^k$ znikają w całym obszarze z wyjątkiem jednego węzła. Wówczas obliczanie wyrażenia (2.9) będzie się ograniczać wyłącznie do otoczenia tego węzła,

a macierz układu równań powstałych z warunku (2.12) będzie miała korzystną z punktu widzenia obliczeń numerycznych postać pasmową. Dołączenie każdego kolejnego wyrazu do tak powstałego ciągu rozwiązań prowadzi do relacji:

$$(3.1) \quad -\pi(\mathbf{V}^k, \boldsymbol{\Omega}^k)_I \leq -\pi(\mathbf{V}^k, \boldsymbol{\Omega}^k)_{II} \leq \dots \leq -\pi(\mathbf{V}^k, \boldsymbol{\Omega}^k)_{6M} = -\pi(\mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{L}(\varepsilon, \dots).$$

Ciąg dyskretnych pól napięć wewnętrznych konstruujemy następująco:

$$\mathbf{Q}_\varphi^{N_1}(\xi^\alpha) = \mathbf{Q}_\varphi^s(\xi^\alpha) + \sum_{i=1}^{N_1} \tilde{\mathbf{Q}}_\varphi^i(\xi^\alpha),$$

$$\mathbf{M}_\varphi^{N_2}(\xi^\alpha) = \mathbf{M}_\varphi^s(\xi^\alpha) + \sum_{i=1}^{N_2} \tilde{\mathbf{M}}_\varphi^i(\xi^\alpha),$$

gdzie $\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s$ oznacza dowolne, statycznie dopuszczalne pole napięć, a $\tilde{\mathbf{Q}}_\varphi^i, \tilde{\mathbf{M}}_\varphi^i$ ciąg pól samozrównoważonych (obciążenie zewnętrzne jest równe zero), liniowo niezależnych o ilości wyrazów nie większej od $12M$. Bliższą analizę budowy ciągów pól kinematycznych i statycznych przeprowadzono w pracy [3].

Jeśli podstawowe, statycznie dopuszczalne pole $\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s$ skonstruowane jest tak, że $12M$ liniowo niezależnych składowych pola ma wartość zero, to $\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s$ są rozwiązaniami układu równań równowagi po przyłożeniu do układu obciążenia zewnętrznego. Jeśli następnie za obciążenie przyjmować kolejno jedną z $12M$ liniowo niezależnych składowych pola napięć wewnętrznych (ze znakiem przeciwnym), to reakcję układu określą wraz z tą składową kolejne wyrazy ciągu $\tilde{\mathbf{Q}}_\varphi^i, \tilde{\mathbf{M}}_\varphi^i$.

W przypadku jeśli $N_1 + N_2 = 12M$, to wstawiając $\mathbf{Q}_\varphi^{N_1}, \mathbf{M}_\varphi^{N_1}$ do (2.14) otrzymamy znany układ równań Maxwella-Mohra dla konstrukcji statycznie niewyznaczalnych. Jeśli zaś $N_1 + N_2 < 12M$, to otrzymamy przybliżoną odmianę tej metody. Pozostaje wówczas problem oceny popełnianego błędu. Zajmiemy się tym w dalszym ustępie tego paragrafu. Zwróćmy jeszcze tylko uwagę, że wraz z ciągiem statycznie dopuszczalnych pól otrzymujemy nierosnący ciąg wartości $\pi(\mathbf{Q}_\varphi, \dots)$:

$$(3.2) \quad \pi(\mathbf{Q}_\varphi^s, \mathbf{M}_\varphi^s) \geq \pi(\mathbf{Q}_\varphi^1, \mathbf{M}_\varphi^1) \geq \dots \geq \pi(\mathbf{Q}_\varphi, \mathbf{M}_\varphi) = \mathcal{L}(\mathcal{T}, \dots).$$

Powyższy sposób prowadzić może do uzyskania rozwiązań ścisłych, jeśli jednak — zgodnie z tytułem rozdziału — poprzestaniemy na rozwiązaniu przybliżonym, to pojawia się ważne zagadnienie oceny błędu przybliżenia.

Pewną informację o nim uzyskać możemy biorąc różnicę

$$\Delta \equiv \pi(\mathbf{Q}_\varphi^N, \mathbf{M}_\varphi^N) - (-\pi[\mathbf{V}^{N'}, \boldsymbol{\Omega}^{N'}]).$$

Ma ona wszystkie wymagane cechy: jest dodatnio określona, zdąża do zera wraz z przejściem z rozwiązania przybliżonego do ścisłego, nadto zgodnie z nierównościami (3.1) i (3.2) dla każdego N i N' zachodzi

$$\Delta \geq \mathcal{L} - [-\pi(\mathbf{V}^{N'}, \boldsymbol{\Omega}^{N'})],$$

$$\Delta \geq \pi(\mathbf{Q}_\varphi^N, \mathbf{M}_\varphi^N) - \mathcal{L}(\mathcal{T}, \kappa, \dots),$$

co daje dobrą ocenę wartości całkowitej energii wewnętrznej, będącej jednym z ważnych parametrów stanu konstrukcji. Nieco gorzej jest z oceną lokalnego błędu

rozwiązania, zarówno stanu przemieszczeń (odkształceń), jak i napięć panujących w ciele. W ostatnio publikowanych pracach [4] proponuje się za miarę tego błędu przyjąć «stopień niespełnienia» wszystkich lokalnych związków ośrodka.

W naszym przypadku byłoby to—przy ciągu kinematycznie dopuszczalnych rozwiązań—oszacowanie «stopnia niespełnienia» równań równowagi ośrodka (2.1). Może być nim (zgodnie z [4]) bądź wielkość dodatkowego obciążenia \mathbf{P}^* (ξ^α) i \mathbf{L}^* (ξ^α), jakie należy przyłożyć do węzłów konstrukcji, aby zapewnić równowagę napięć wewnętrznych wynikających z pola przemieszczeń z danym obciążeniem \mathbf{P} , \mathbf{L} przyłożonym do konstrukcji, bądź wielkość dodatkowych napięć wewnętrznych. W pierwszym przypadku (stosunkowo prostej oceny) pojawia się trudność w inżynierskiej ocenie wielkości błędu, ponieważ na ogół $P=L=0$ w większości węzłów z wyjątkiem «brzegowych»; w drugim zaś przypadku—konieczność rozwiązania układu równań różnicowych. Jeszcze większe trudności napotykamy przy ocenie błędu «podejścia» statycznego—gdzie jego miarą miał być «stopień niespełnienia» związków zgodności odkształceń.

W przypadku proponowanej poprzednio metody równoległego budowania kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń i statycznie dopuszczalnego pola napięć prostą oceną byłaby różnica napięć (lub odkształceń) wynikających z obydwu rozwiązań. Jednak przy bliższej analizie i to ujęcie należy uznać za niezadowalające głównie z powodu przyjmowania wielu wyrazów zerowych—szczególnie w ciągu pól statycznych (co wynika z prostoty obliczeń numerycznych).

Wydaje się, że pewnym rozwiązaniem może być przyjęcie energetycznej miary błędu, tzn. $|\mathbf{L}(\mathcal{F}^s, \kappa^s \dots) - \mathbf{L}(e^k, \dots)|$. Z jednej strony bowiem uzyskujemy «rozmycie» czysto lokalnych, trudnych do oceny skoków błędów w określeniu poszczególnych składowych stanu napięć czy odkształceń, z drugiej zaś wartość lokalnej energii odkształcenia elementu układu można w takim ujęciu przyjąć za dostatecznie dobrą miarę wyężenia materiału.

Zaproponujemy nieco odmienny sposób analizy dokładności przybliżonego rozwiązania. Zastosować możemy go zarówno do określenia błędu otrzymanego pola przemieszczeń (napięć) w ramach przyjętego modelu struktury, jak i oceny uproszczenia własności (charakteru) samego modelu (por. «wstęp»). Sposób ten polegać będzie na takim doborze parametrów opisujących własności fizyczne ciała (w naszym przypadku $A_\varphi(\xi^\alpha)$, $B_\varphi(\xi^\alpha)$, $D_\varphi(\xi^\alpha)$), aby dla przyjętej klasy kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń spełnione były równania równowagi.

W granicznym przypadku, gdy $\mathbf{V}^k = \mathbf{V}_{6M}^k$, a $\Omega^k = \Omega_{6M}^k$, takie sformułowanie zadania sprowadzi się do rozwiązania «przemieszczeniowych» równań równowagi, w pośrednich zaś—jeśli ma ono rozwiązanie, tzn. jeśli istnieją takie $A_\varphi(\xi^\alpha)$, $B_\varphi(\xi^\alpha)$, $D_\varphi(\xi^\alpha)$, że dla danej klasy pól \mathbf{V}_n^k , Ω_n^k spełnione są równania równowagi ośrodka, a nadto jeśli sztywności A_φ , B_φ , D_φ spełniają warunki (prócz $A_\varphi \geq 0$, $B_\varphi \geq 0$, $D_\varphi \geq 0$):

$$(3.3) \quad A_\varphi(\xi^\alpha) \leq A_\varphi^0, \quad B_\varphi(\xi^\alpha) \leq B_\varphi^0, \quad D_\varphi(\xi^\alpha) \leq D_\varphi^0,$$

gdzie A_φ^0 , B_φ^0 , D_φ^0 oznaczają dane parametry badanego ciała lub

$$(3.4) \quad A_\varphi(\xi^\alpha) \geq A_\varphi^0, \quad B_\varphi(\xi^\alpha) \geq B_\varphi^0, \quad D_\varphi(\xi^\alpha) \geq D_\varphi^0,$$

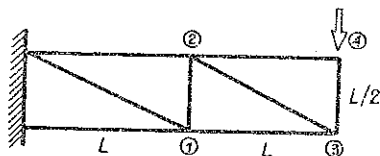
to otrzymamy ściśle rozwiązania ciała odpowiednio «osłabionego» lub «wzmocnionego» (w sensie nierówności (3.3) i (3.4)). Za miarę błędu tak otrzymanego rozwiązania — z podanych poprzednio przyczyn — niedogodnie jest przyjąć trójkę różnic sztywności $|A_\varphi - A_\varphi^0|$, $|B_\varphi - B_\varphi^0|$, $|D_\varphi - D_\varphi^0|$, korzystnie zaś miarę energetyczną:

$$|L(A_\varphi, \dots, \varepsilon_N^k, \dots) - L(A_\varphi^0, \dots, \varepsilon_N^k, \dots)| = L(|A_\varphi - A_\varphi^0|, \dots, \varepsilon_N^k, \dots)$$

lub bez dodatkowych warunków $|L[(A_\varphi - A_\varphi^0), \dots, \varepsilon_N^k, \dots]|$.

Pewną modyfikację tej metody przeprowadzić można dla równoczesnego podejścia kinematycznego i statycznego. Mając bowiem statycznie dopuszczalne pole napięć oraz kinematyczne pole przemieszczeń, zażądać możemy spełnienia związków konstytutywnych (2.8).

Stopień niespełnienia tych zależności jest miarą błędu. Fizycznego sensu (fizycznej interpretacji) nabiera zadanie tak postawione, gdy otrzymane pole sztywności ma składowe nieujemne. Jeśli zaś nadto spełnione są nierówności (3.3) lub (3.4), to dochodzimy do poprzednich wniosków.



Rys. 5

Celem uzyskania pewnych ilościowych informacji odnośnie zaproponowanych miar błędu — przeliczono prosty przykład, w którym poddano «ocenie» dokładność «przegubowego» modelu płaskiego układu kratowego (jak na rys. 5). Stosując

Tablica 1

	L_1	L_2	L_3	L_4	\mathcal{L}
$a=0$	2,770	0,350	1,711	0,000	4,831
$a=a_1$	2,756	0,350	1,701	0,000	4,806
Δ	0,014	0,000	0,010	0,000	0,025
$a=a_2$	2,734	0,348	1,697	0,004	4,785
Δ	0,036	0,002	0,014	0,004	0,046

zarówno statyczne jak i kinematyczne podejście, otrzymano (spodziewaną oczywiście) dużą dokładność modelu, co pośrednio potwierdza przydatność zaproponowanej metody. Konkretnie wartości zestawiono w tablicy 1, gdzie wprowadzono oznaczenia:

a bezwymiarowy współczynnik sztywności giętej ($a_1 = 0,6 \cdot 10^{-5}$, $a_2 = 1,6 \cdot 10^{-4}$, go odpowiada, przykładowo dla pręta «okrągłego», stosunkowi średnicy do długości $= 1/100$ i $1/20$,

L_i bezwymiarową wartość energii zewnętrznej przypisanej w pewien sposób i -temu węzłowi kratownicy,

\mathcal{L} globalną ($=\sum L_i$) energią wewnętrzną, będącą równocześnie miarą podatności ciała,

Δ błąd, określony jako różnica (L bądź \mathcal{L}) dla $a=0$ w stosunku do a_1 i a_2 .

Wydaje się, że prostota metody i dokładność wyników zachęcić może do rozszerzenia zakresu badanych za jej pomocą problemów. W drugiej części tej pracy pokażemy próbę analizy zagadnień stateczności układów kratowych, wykorzystującą właśnie metodę wariacji parametrów fizycznych ośrodka.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Geometry of a discrete set of points*, Arch. Mech., 18, 3, 1966.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
3. P. ŁAZIŃSKI, *Zastosowanie metod wariacyjnych w mechanice ośrodków siatkowych*, Rozpr. doktorska, Kielce 1975.
4. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do elastokinetiki form konstrukcyjnych* (w pracy: Dźwigary powierzchniowe, Ossolineum 1975).

Резюме

ОСНОВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В СТАТИКЕ СЕТОЧНЫХ СРЕД

Работа посвящена применениям методов вариационного исчисления для построения приближенных решений задач, сформулированных на языке механики сеточных сред. После вывода вида основных вариационных принципов исследованы разные способы построения приближенных решений совместно с широко понимаемым анализом ошибок. Обсуждена пригодность нескольких мер ошибки с точки зрения информаций, пригодных для инженеров. Следствия, вытекающие из этого анализа, иллюстрированы на простом примере.

В подготовляемой к печати дальнейшей работе автор занимается использованием представленной методики в задаче устойчивости плоских решетчатых систем. Предложенные здесь меры ошибки кажутся быть там особенно пригодными.

SUMMARY

FUNDAMENTAL VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE STATICS OF LATTICE MEDIA

The paper deals with the application of the methods of variational calculus to the construction of approximate solutions of problems formulated in the language of lattice media mechanics. Fundamental variational principles are formulated and various methods of constructing the approximate solutions are discussed, the error analysis being applied in the broad sense of the word. Applicability of various error measures useful in engineering problems is discussed; conclusions resulting from the analysis are illustrated by a simple example.

In another paper by the author (prepared for printing), the method outlined here will be used in the analysis of stability of plane trusses. The error measures proposed here seem to be of particular value for such problems.

INSTYTUT MECHANIZACJI BUDOWNICTWA, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 listopada 1978 r.