

ROZWIĄZANIE FALOWYCH ZAGADNIENIŃ BRZEGOWYCH W PRĘTACH PLASTYCZNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA I TEMPERATURY (*)

JÓZEF B E J D A (WARSZAWA)

Rozpatrzono szczegółowo zagadnienie rozprzestrzeniania się fal naprężenia w skończonych prętach plastycznych z uwzględnieniem wpływu prędkości odkształcenia i temperatury. Wybrano zagadnienia interesujące pod względem poznawczym, przedstawiając jednocześnie różnorodne efektywne metody ich rozwiązania. Rozważono obciążenia typu mechanicznego, termicznego i radiacyjnego. Wiele uwagi poświęcono najbardziej użytecznym w dynamicznej termo-lepkoplastyczności metodom różnic skończonych i charakterystyk dla zagadnień jedno i dwuwymiarowych. W zależności od charakteru problemu brzegowego pokazano sprawdzone w praktyce schematy różnicowe jedno lub dwuwymiarowe, bardziej efektywne, ekonomiczne i stabilne. Wyniki obliczeń przedstawiono na licznych wykresach. Pokazano również cztery metody pozwalające uzyskać rozwiązanie w postaci analitycznej. Szczegółowo przedyskutowano rozwiązanie samopodobne, ustalonego profilu, ze stałymi niecharakterystycznymi prędkościami oraz wykorzystujące funkcję Greena.

1. WSTĘP

Zagadnienia dotyczące propagacji fal sprężysto-plastycznych stanowią ważną dziedzinę we współczesnych badaniach w mechanice ciała stałego. Rozwiązania tych zagadnień są niezbędne przy ocenie wyników badań doświadczalnych związanych z dynamicznymi własnościami materiału. Badania laboratoryjne, które mają za cel określenie mechanicznych własności przy wysokich prędkościach odkształcenia często opierają się na doświadczeniach, w których efekty propagacji fal są dominujące. Przy analizie danych otrzymanych z takich doświadczeń powstaje wiele nowych zagadnień i nie wyjaśnionych zjawisk, na przykład efekty wieloosiowe, wpływ maszyny testującej i inne, które mogą być częściowo rozwiązane teoretycznie. Z drugiej strony zainteresowanie zagadnieniami propagacji fal sprężysto-plastycznych wynika również bezpośrednio z zastosowań praktycznych. Na przykład w dziedzinie balistyki i aeronautyki przy projektowaniu rakiet, statków kosmicznych, pocisków i tarcz często spotyka się zagadnienia prowadzące do teoretycznych rozważań nad propagacją i wzajemnym oddziaływaniem fal uderzeniowych. W reaktorowych elementach paliwowych natomiast częstym zjawiskiem są fale uderzeniowe termiczne. W warunkach nagłego ogrzania wskutek reakcji jądrowych wywołanych zamierzo-

(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12

nym lub przypadkowym działaniem impulsu — temperatura w elemencie paliwowym może wzrastać szybciej niż następuje reakcja ciała wskutek rozszerzalności cieplnej. W rezultacie część energii cieplnej zostaje zamieniona na energię kinetyczną i powstają naprężenia o wystarczająco wysokiej amplitudzie, aby zniszczyć konstrukcję.

Rozszerzenie zakresu obciążeń konstrukcji, jak i powstanie generacji nowych materiałów konstrukcyjnych, wymaga badania wpływu prędkości obciążenia i odkształcenia, temperatury i sprężeń termomechanicznych na mechaniczną reakcję ciał stałych. W wielu przypadkach przy projektowaniu konstrukcji nie wolno ignorować tych wpływów. Należy natomiast wprowadzać udoskonalone modele teoretyczne i nowe techniki obliczeniowe celem wyjaśnienia i opisania tych faktów w możliwie adekwatny sposób. Gdy własności materiału zmieniają się w czasie procesu nagłego ogrzania materiału lub oddziaływań wysokich prędkości odkształceń, większość materiałów wykazuje zachowanie się sprężysto-plastyczne, lepkosprężyste lub sprężysto-lepkoplastyczne. Wygodnie jest wtedy formułować zagadnienie w prędkościach, wykorzystując oddzielnie równania ruchu, równania ciągłości i równania konstytutywne wraz z odpowiednimi warunkami początkowo-brzegowymi.

W wielu zagadnieniach, w szczególności dla ciał z małymi wymiarami poprzecznymi, analiza jednowymiarowa może być wystarczająca. W układzie współrzędnych Lagrange'a przyjmuje się wtedy następujące równanie ruchu:

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v$$

oraz równanie ciągłości

$$(1.2) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

gdzie v jest prędkością cząstki w kierunku x , σ i ε składowe naprężenia i odkształcenia w tym kierunku, t oznacza czas a ρ_0 gęstość materiału.

Właściwy wybór równań konstytutywnych jest najważniejszy, a zarazem najtrudniejszy w rozwiązywaniu zagadnień brzegowych ośrodków niesprężystych. W literaturze spotyka się dwie metody określenia równań konstytutywnych. Pierwsza polega na rozważaniach matematycznych własności różnych relacji między naprężeniem i odkształceniem, a następnie żądaniu, aby związki konstytutywne były w zgodzie z obserwowanym fenomenologicznym zachowaniem się materiału. Na przykład oczekuje się, aby równania pola były eliptyczne lub hiperboliczne i przewidywały oczywisty wzrost granicy plastyczności wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia. Procedurą alternatywną jest badanie mechanicznych i termodynamicznych procesów, które wywołują lokalnie niesprężystą reakcję materiału, a następnie konstruowanie równań konstytutywnych raczej z fizycznych, niż matematycznych przesłanek. W fizycznym badaniu równań konstytutywnych centralną rolę odgrywa dynamika dyslokacji. Dąży się, aby równania konstytutywne nie były w większej sprzeczności z wynikami żadnej z tych metod, lecz w przybliżeniu zgodne z obydwiema. Korzystnie będzie zacząć rozważania od podania kilku wyników metod fenomenologicznych, dotyczących wyboru i specyfikacji równań konstytutywnych, stosowa-

nych do opisu zagadnień propagacji zaburzeń mechanicznych w ośrodku jednowymiarowym pod wpływem nagłych obciążeń o dużej intensywności.

Najbardziej ogólną postacią jednowymiarowego równania konstytutywnego pierwszego rzędu przy zaniedbaniu efektów termicznych, jest równanie następujące:

$$(1.3) \quad F(\sigma, \varepsilon, \sigma_t, \varepsilon_t) = 0.$$

Równanie to obejmuje dużą liczbę przypadków szczególnych równań konstytutywnych posiadających uzasadnienie fizykalne. Jednak ze względu na zbyt dużą ogólność tej funkcji, jej użyteczność w rozwiązywaniu układu równań (1.1)–(1.3) jest znikoma i dlatego niezbędna jest jej dalsza specyfikacja. Do badania zjawisk fałowych np. korzystnie jest przyjąć quasi-liniową postać równania (1.3):

$$(1.4) \quad \Phi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \psi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \theta(\sigma, \varepsilon).$$

Analiza układu równań (1.1), (1.2), (1.4) metodą charakterystyk nakłada na współczynniki funkcyjne w równaniu (1.4) spełnienie takich warunków, aby fale w tak opisanym ośrodku propagowały się z prędkościami skończonymi; matematycznie oznacza to hiperboliczność układu równań. Równanie charakterystyczne układu określające krzywe w płaszczyźnie x, t , wzdłuż których rozprzestrzeniają się fale, przyjmuje postać

$$(1.5) \quad \psi(\sigma, \varepsilon) dx dt^2 + \rho \Phi(\sigma, \varepsilon) dx^3 = 0,$$

co daje dwie rodziny charakterystyk następujących:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} dx &= 0, \\ \psi(\sigma, \varepsilon) dt^2 + \rho \Phi(\sigma, \varepsilon) dx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jedna z tych charakterystyk $x = \text{const}$ jest stała niezależnie od wyboru Φ i ψ . W zależności od charakteru Φ i ψ mogą istnieć dwie charakterystyki, jedna lub żadna. Rozpatrzmy te trzy przypadki osobno.

PRZYPADEK 1:

$$\psi(\sigma, \varepsilon) = 0, \quad \Phi(\sigma, \varepsilon) \neq 0, \quad \theta(\sigma, \varepsilon) = 0.$$

Równanie konstytutywne (1.4) można w tym przypadku napisać w postaci

$$(1.7) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie

$$f(\sigma, \varepsilon) = \frac{\theta(\sigma, \varepsilon)}{\Phi(\sigma, \varepsilon)}.$$

Równanie dla wszystkich trzech charakterystyk jest takie same: $dx = 0$. Zatem układ jest paraboliczny, a równanie (1.7) nawet w przypadku liniowym nie opisuje żadnego modelu mechanicznego.

PRZYPADEK 2:

$$\psi(\sigma, \varepsilon) \neq 0, \quad \Phi(\sigma, \varepsilon) = 0, \quad \theta(\sigma, \varepsilon) = 0.$$

Równanie charakterystyczne przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon) \quad \text{lub} \quad \sigma = f\left(\varepsilon, \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right),$$

gdzie

$$f(\sigma, \varepsilon) = \frac{\theta(\sigma, \varepsilon)}{\psi(\sigma, \varepsilon)}.$$

Równanie różniczkowe charakterystyk $(dt)^2 = 0$, $dx = 0$ mają trzy pierwiastki rzeczywiste, w tym dwa różne. Układ jest hiperboliczny, lecz nie dopuszcza skończonych prędkości propagacji fal, przez co przestaje być modelem w pełni adekwatnym. Model ten był stosowany w praktyce. W przypadku liniowej funkcji f jest znany jako model Voigta. Gdy f nie zależy od ε , opisuje ciecz idealnie lepką.

PRZYPADEK 3:

$$\psi(\sigma, \varepsilon) \neq 0, \quad \Phi(\sigma, \varepsilon) \neq 0, \quad \theta(\sigma, \varepsilon) \neq 0.$$

Równanie konstytutywne (1.4) przyjmuje w tym przypadku postać

$$(1.8) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = g(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + f(\sigma, \varepsilon),$$

gdzie

$$g(\sigma, \varepsilon) = \frac{-\psi(\sigma, \varepsilon)}{\Phi(\sigma, \varepsilon)}, \quad f(\sigma, \varepsilon) = \frac{\theta(\sigma, \varepsilon)}{\Phi(\sigma, \varepsilon)}.$$

Równanie to opisuje wiele znanych modeli stosowanych w teorii lepkosprężystości. W lepkoplastyczności — LUBLINER [1] i CRISTESCU [2], badając ogólną postać równania konstytutywnego, przyjmowali podobną formę quasi-liniową, uwzględniając obciążenie i odciążenie:

$$(1.9) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \langle g(\sigma, \varepsilon) \rangle + \begin{cases} f(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t}, & \text{jeśli } \frac{\partial \sigma}{\partial t} > 0, \\ \frac{1}{E_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} & \text{jeśli } \frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\langle g \rangle = \begin{cases} g, & \text{jeśli } g > 0, \\ 0 & \text{w przypadkach pozostałych.} \end{cases}$$

Równanie to obejmuje jako przypadki szczególne szereg powszechnie znanych równań konstytutywnych. Dla $g(\sigma, \varepsilon) \equiv 0$ i $f(\sigma, \varepsilon) = (d\sigma/d\varepsilon)^{-1}$ otrzymujemy teorię Kármána-Taylora-Rachmatulina, w której prędkość propagacji fali jest proporcjonalna do $f^{-1/2}$, a przyrosty małych zaburzeń w przepiężonym do stanu plastycznego przecie propagują się z prędkościami odpowiadającymi lokalnym modułom mate-

riału, nie przekraczającymi prędkości fal sprężystych. Jeśli $f(\sigma, \varepsilon) = 1/E_0$ (E_0 jest stałą równą modułowi Younga), a $g(\sigma, \varepsilon)$ jest dowolną funkcją, to otrzymujemy prędkościową teorię MALVERNA-SOKOŁOWSKIEGO [3, 4], według której prędkości fal i małych zaburzeń są zawsze sprężyste.

Równania charakterystyk układu (1.1), (1.2) oraz (1.8) lub (1.9) są następujące:

$$dx=0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0} g(\sigma, \varepsilon), \quad \text{gdy } g(\sigma, \varepsilon) > 0,$$

i posiadają trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Układ jest zatem ściśle hiperboliczny. Stąd też równania konstytutywne (1.8) i (1.9) są bardziej użyteczne niż te, które rozważaliśmy w przypadkach 1 i 2 i dlatego będą stosowane w niniejszym opracowaniu.

Zauważmy, że przy bardzo powolnych obciążeniach, tzn. w przypadku statycznym, równanie konstytutywne redukuje się do równania

$$(1.10) \quad f(\sigma, \varepsilon) = 0.$$

Z drugiej strony, przy bardzo dużych prędkościach odkształcenia wyraz $f(\sigma, \varepsilon)$ może być zaniedbany i wtedy związek naprężenie-odkształcenie przyjmie postać

$$(1.11) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = g(\sigma, \varepsilon).$$

Jak pokazano na rys. 1, równanie (1.10) i (1.11) reprezentują przypadki graniczne zależności $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ przy stałej prędkości odkształcenia: zerowej i nieskończonej.

Zwykle statyczne równanie $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ przyjmowane jest w postaci

$$(1.12) \quad \sigma = f_0(\varepsilon).$$

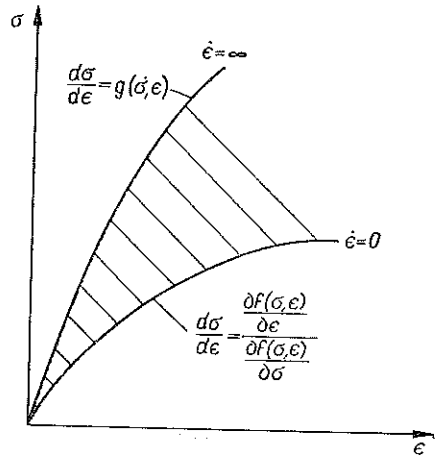
Sugeruje to, że $f(\sigma, \varepsilon)$ w równaniu (1.8) można określić w sposób następujący:

$$(1.13) \quad f(\sigma, \varepsilon) = -\tilde{k} [\sigma - f_0(\varepsilon)].$$

Stała \tilde{k} jest stałym czasem relaksacji materiału i jest miarą czułości materiału na prędkość odkształcenia. Jeśli chodzi o specyfikację funkcji $g(\sigma, \varepsilon)$ to (jak już wspominaliśmy wyżej) SOKOŁOWSKI [4], MALVERN [3], PERZYNA [5] i inni autorzy zauważyli, że szczególnie wygodnie jest przedstawić ją w postaci

$$(1.14) \quad g(\sigma, \varepsilon) = E_0.$$

Mimo że jest to wybór najprostszy i najbardziej ograniczony ze wszystkich możliwych, posiada jednak dobre uzasadnienie fizyczne. Implikuje on, że jeśli materiał jest obciążony w sposób nagły, to jego reakcja jest liniowa aż do pewnego naprężenia niszczącego.



Rys. 1. Obszar stanów $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla równania konstytutywnego (1.8)

Po podstawieniu funkcji (1.13) i (1.14) do (1.8) równanie konstytutywne przyjmuje postać

$$(1.15) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - E_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tilde{k} [\sigma - f_0(\varepsilon)] = 0.$$

Jedyną potencjalną nieliniowością jest w tym przypadku wyraz $f_0(\varepsilon)$. W teorii plastyczności $f_0(\varepsilon)$ często posiada w punkcie uplastycznienia nieciągłą pierwszą pochodną. Jeśli pochodna ta jest ciągła, to $f_0(\varepsilon)$ można zawsze przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$(1.16) \quad f_0(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \alpha_n \varepsilon^n.$$

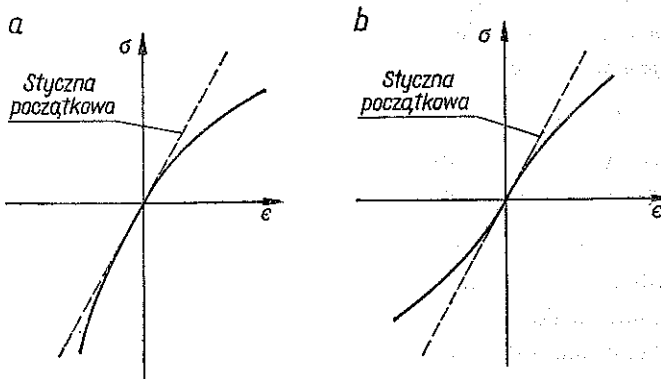
W pewnym stosownie dobranym przedziale daną krzywą statyczną $f_0(\varepsilon)$ można dobrze aproksymować za pomocą kilku wyrazów. Jeśli nie występuje przepiężenie ($\alpha_0 = 0$), to krzywe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla $N=2$ i $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$ oraz dla $N=3$ i $\alpha_2 = 0$ mają postać odpowiednio:

$$(1.17) \quad f_0(\varepsilon) = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2$$

oraz

$$(1.18) \quad f_0(\varepsilon) = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_3 \varepsilon^3.$$

Ich wykresy dla $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 < 0$ są pokazane na rys. 2 [6]. Nieliniowa krzywa trzeciego stopnia, ze względu na symetrię w zakresie ściskania, stanowi bardziej realistyczny



Rys. 2. Krzywe naprężenie-odkształcenie z nieliniowością a) kwadratową i b) trzeciego stopnia

model dla wielu materiałów. Z drugiej strony w jednowymiarowym stanie odkształcenia moduł wzmocnienia przy ściskaniu przedstawiony przez krzywą *a* jest szeroko stosowanym modelem.

Jeśli prędkość odkształcenia jest znaną funkcją czasu i zmienia się w przecie równomiernie, to równanie (1.15) można traktować jako liniowe równanie różniczkowe zwyczajne względem σ :

$$(1.19) \quad \frac{d\sigma}{dt} + \tilde{k}\sigma = Q(t).$$

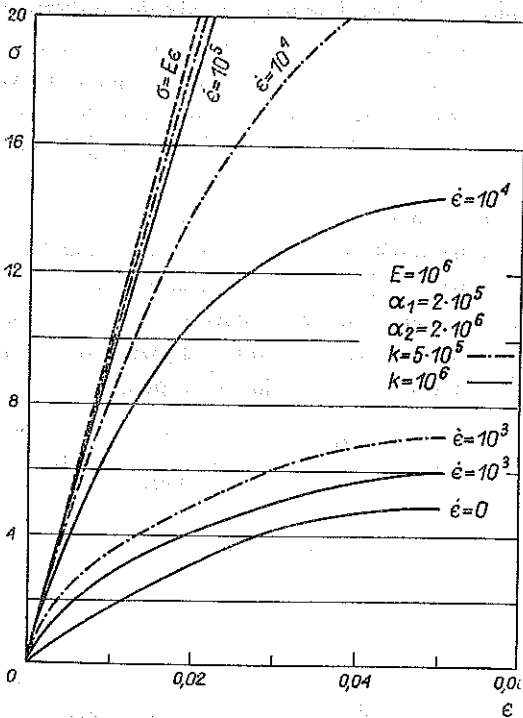
Dla stałej prędkości odkształcenia mamy $\partial \varepsilon / \partial t = \dot{\varepsilon}_0 = \text{const}$ lub $\varepsilon = \dot{\varepsilon} t + \varepsilon_0$. Jeśli przyjmiemy $\varepsilon_0 = 0$, $t = \varepsilon / \dot{\varepsilon}_0$, $dt = d\varepsilon / \dot{\varepsilon}$, to równanie (1.15) przybierze postać

$$(1.20) \quad \dot{\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tilde{k} + \sigma = E_0 \dot{\varepsilon} + \tilde{k} f_0(\varepsilon).$$

Ma ono rozwiązanie

$$(1.21) \quad \sigma = \varepsilon \frac{\tilde{k} \dot{\varepsilon}}{e^{\frac{\tilde{k} \varepsilon}{\dot{\varepsilon}}}} \int_0^{\varepsilon} \left[E_0 + \frac{\tilde{k}}{\dot{\varepsilon}} f_0(\varepsilon) e^{\frac{\tilde{k} \varepsilon}{\dot{\varepsilon}}} \right] d\varepsilon.$$

Równanie to daje się natychmiast rozwiązać, jeśli za $f_0(\varepsilon)$ podstawimy (1.17) lub (1.18). Na rys. 3 rozwiązanie (1.21) zilustrowano graficznie dla wielomianu kwadratowego (1.17), przyjmując $k = 5 \cdot 10^5$ i $k = 10^6$. Jest oczywiste, że k efektywnie



Rys. 3. Wykresy $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla stałych prędkości odkształcenia — — — $k = 5 \cdot 10^5$, — — — $k = 10^6$

określa czułość materiału na prędkość odkształcenia z tym zastrzeżeniem, że jedna stała nie może adekwatnie opisać tego zjawiska. KELLY [7] na przykład przyjmował k jako funkcję ε . Możliwością alternatywną do (1.13) jest przedstawienie $f(\sigma, \varepsilon)$ w postaci szeregu

$$(1.22) \quad -f(\sigma, \varepsilon) = k_1(\sigma - f_0(\varepsilon)) + k_2(\sigma - f_0(\varepsilon))^2 + \dots +$$

które było rozważane m.in. przez PERZYŃĘ [8].

W pracy [5] Perzyna uogólnił równanie konstytutywne Malverna-Sokołowskiego na przypadek ośrodka trójwymiarowego. Równanie te dla materiału plastycznego ze wzmocnieniem i czulego na prędkość odkształcenia bez wpływu temperatury ma postać

$$(1.23) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \Phi(F) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla } F > 0,$$

$$(1.24) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} \quad \text{dla } F \leq 0$$

oraz

$$(1.25) \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii},$$

gdzie $F = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) \kappa^{-1}$ jest statycznym warunkiem plastyczności, $\dot{\epsilon}_{ij}$, \dot{s}_{ij} , \dot{s}_{ij} i $\dot{\sigma}_{ij}$ oznaczają odpowiednio dewiatory i tensory prędkości odkształcenia i naprężenia, κ jest parametrem wzmocnienia izotropowego, γ współczynnikiem lepkości, a μ i K oznaczają odpowiednio moduł ścinania i moduł objętościowy.

Ostatnio ukazało się wiele prac na temat równań konstytutywnych teorii lepko-plastyczności. Równania (1.23)–(1.25) wydają się najlepiej dobrane i zweryfikowane doświadczalnie.

PERZYNA i WIERZBICKI [8 i 9] wykazali, że jednoczesny wpływ prędkości odkształcenia i temperatury może być opisany przez te same równania (1.23)–(1.25), jeśli wszystkie wielkości występujące w tych równaniach, w szczególności γ , F i Φ , uzależnić od temperatury. Oznaczając współczynnik rozszerzalności cieplnej przez α , temperaturę przez θ możemy równania konstytutywne uwzględniające efekt prędkości odkształcenia i temperatury przedstawić w postaci

$$(1.26) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma(\theta) \Phi \left[\frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p)}{\kappa(\theta)} - 1 \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla } f > \kappa(\theta),$$

$$(1.27) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} \quad \text{dla } f \leq \kappa(\theta),$$

$$(1.28) \quad \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii} + \alpha \dot{\theta}.$$

Dla materiałów idealnie plastycznych z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa tensor prędkości odkształcenia plastycznego przyjmie postać

$$(1.29) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma(\theta) \Phi \left[\frac{\sqrt{J_2}}{k(\theta)} - 1 \right] \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad \text{dla } \sqrt{J_2} > k(\theta),$$

gdzie J_2 jest drugim niezmiennikiem tensora naprężenia. Dla przypadku jednowymiarowego znajdziemy

$$(1.30) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma(\theta) \Phi \left[\frac{\sigma}{\sigma_y(\theta)} - 1 \right],$$

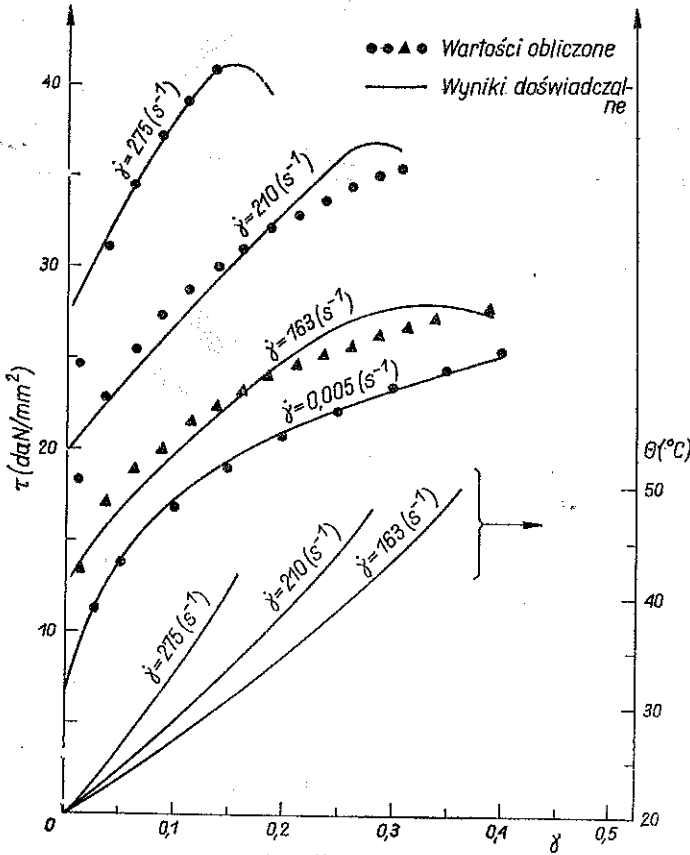
gdzie σ_y oznacza granicę plastyczności na rozciąganie.

W pracy [8] funkcję $\gamma(\theta)$, $\kappa(\theta)$, Φ określono dla różnych materiałów konstrukcyjnych. Podobną do (1.26)–(1.30) postać równań przyjmował KUKUDŻANOW [10]:

$$(1.31) \quad \dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \dot{\theta} \delta_{ij} - \frac{2\mu}{\bar{\tau}} \frac{\Phi [J_2 - k_s]}{J_2} s_{ij},$$

gdzie $\bar{\tau}$ jest stałą charakteryzującą wymiarową lepkość [s], oraz inni autorzy [11–16].

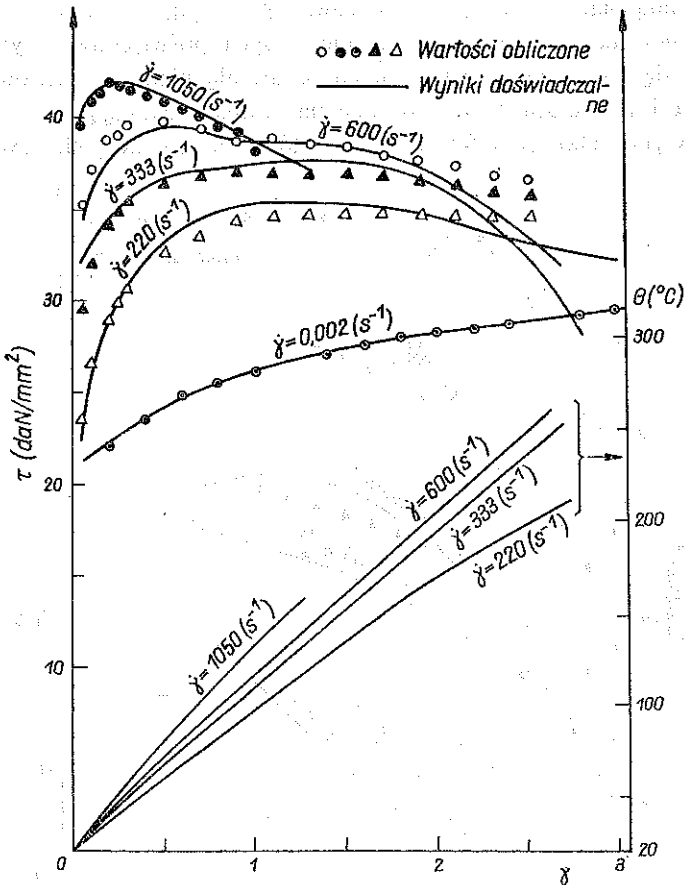
Jest również niewiele badań eksperymentalnych poświęconych dynamicznemu zachowaniu się materiałów plastycznych z uwzględnieniem efektów prędkości odkształcenia i temperatury. Wśród nich na uwagę zasługują prace CAMPBELLA i FERGUSONA [17], OXLEYA i STEVENSONA [18], LINDHOLMA [19], HARDINGA [20]



Rys. 4. Krzywe naprężenie tnące τ — odkształcenie postaciowe γ i temperatura θ — odkształcenie postaciowe γ dla duraluminium przy różnych prędkościach odkształcenia $\dot{\gamma}$

oraz ostatnie prace VINHA i jego współpracowników [21 i 22]. Przytoczymy tu wyniki doświadczeń Vinha, przeprowadzonych na specjalnie skonstruowanym przyrządzie do dynamicznego skręcania próbek rurowych, umożliwiającym badania w dużym przedziale prędkości odkształcenia i temperatury w warunkach adiabatyczności. Na rysunkach 4, 5, 6 przedstawiono krzywe {naprężenie-odkształcenie} i {temperatura-odkształcenie} przy różnych ustalonych prędkościach odkształcenia

dla duraluminium, miedzi elektrolitycznej i miękkiej stali. Krzywe dla duraluminium różnią się od krzywych dla miedzi i stali tym, że dla duraluminium wzrost temperatury jest nieduży, gdyż odkształcenia maksymalne (odpowiadające zniszczeniu) są małe, a krzywe {naprężenie-odkształcenie} przejawiają charakter rosnący z bardzo

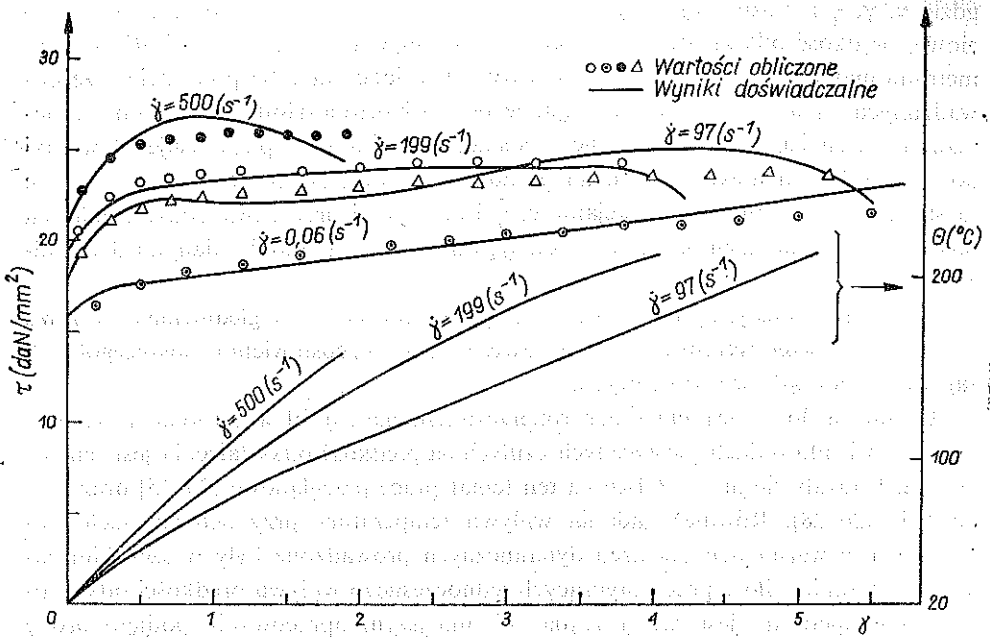


Rys. 5. Krzywe {naprężenie tnące τ — odkształcenie postaciowe γ } i {temperatura θ — odkształcenie} γ dla miękkiej stali przy różnych prędkościach odkształcenia $\dot{\gamma}$

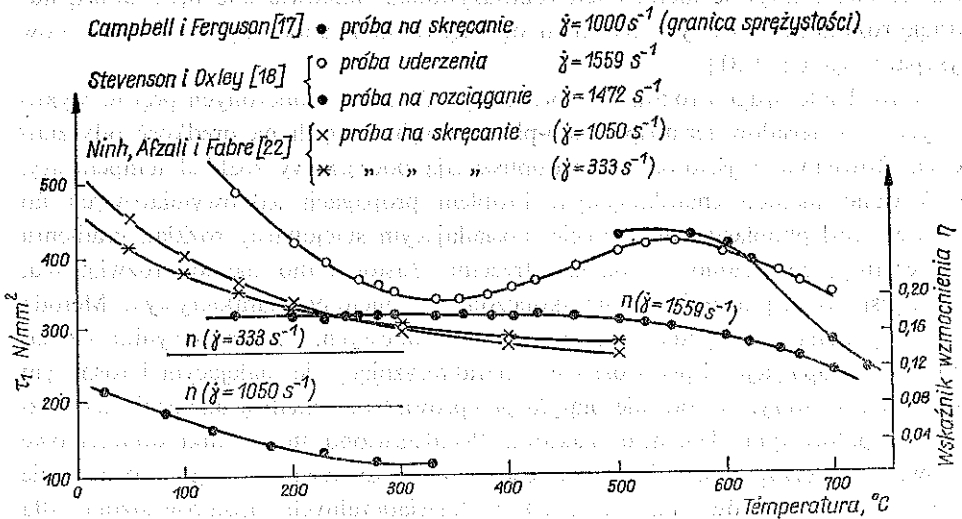
krótką strefą, odpowiadającą negatywnemu płynięciu plastycznemu. Dla miedzi i stali, ze wzrostem prędkości odkształcenia wzrasta temperatura, a rosnąca część krzywych (naprężenie-odkształcenie) jest krótka w porównaniu z rozwiniętą strefą nie rosnącą. Należy zauważyć, że wszystkie krzywe dynamiczne leżą ponad krzywą statyczną. Na rys. 7 porównano wyniki doświadczeń Vinha, Campbella i Stevensona.

Do opisu wyników doświadczalnych autorzy wykorzystali dwa równania konstytutywne: Cristescu-Lublinera (1.8) i Nortona-Hoffa:

$$\tau = F \gamma^n \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^m \exp(W, \theta),$$



Rys. 6. Krzywe {napężenie ścące τ — odkształcenie postaciowe γ } i {temperatura θ — odkształcenie γ } dla miedzi przy różnych prędkościach odkształcenia $\dot{\gamma}$



Rys. 7. Zależność napężenia τ i wskaźnika wzmocnienia n od temperatury θ dla miękkiej stali otrzymane przez różnych badaczy

gdzie τ , γ , $\dot{\gamma}$ i θ oznaczają odpowiednio naprężenie ścinające, odkształcenie postaciowe, prędkość odkształcenia postaciowego i temperaturę, a F , n , m i W są parametrami materiału, które należy wyznaczyć z doświadczenia. Na podstawie przeprowadzonych badań autorzy stwierdzają, że prawo Nortona-Hoffa, w którym mechanizm termicznej aktywacji występuje w postaci wykładniczej, lepiej opisuje ich wyniki doświadczeń. Dla niektórych metali parametry charakterystyczne F , m , n i W nie są stałe, lecz powinny być funkcjami γ , $\dot{\gamma}$ i θ . Wyniki przeprowadzonych obliczeń pokazano na rysunkach 4, 5 i 6. Wykazują one dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi.

Równania konstytutywne teorii lepkoplastyczności z uwzględnieniem wpływu temperatury przedyskutowane będą jeszcze przy przedstawieniu poszczególnych zagadnień początkowo-brzegowych.

Literatura dotycząca zagadnień rozprzestrzeniania się fal w ośrodkach nieograniczonych i falowdach plastycznych czułych na prędkość odkształcenia jest bardzo bogata. Ukazały się już w Polsce na ten temat prace przeglądowe [23–25] oraz monografie [26–28]. Również badania wpływu temperatury przy deformacjach plastycznych w warunkach obciążeń dynamicznych prowadzone były w szerokim zakresie. Natomiast ilość prac dotyczących jednoczesnego wpływu prędkości odkształcenia i temperatury jest raczej skąpa. W niniejszym opracowaniu podjęto próbę jednoczesnej oceny obydwu tych wpływów na klasycznym przykładzie propagacji fal w cienkich prętach — zarówno według teorii jednowymiarowej, jak i w złożonym stanie naprężenia i odkształcenia według teorii dwuwymiarowej. Wybrano zagadnienia interesujące pod względem poznawczym, które jednocześnie pokazywałyby różnorodne, efektywne metody ich rozwiązywania. Stanowiąc one będą dobrą ilustrację rozważań P. Perzyny na temat ogólnej termodynamicznej teorii materiałów dysypatywnych [29–31].

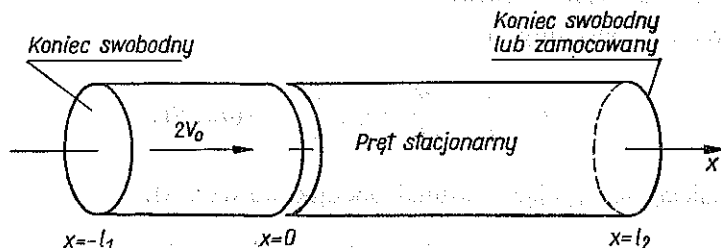
W rozdziale drugim rozważono problemy uderzenia skończonych prętów wykonanych z materiałów termosprężysto-plastycznych, czułych na prędkość odkształcenia. Równania wyjściowe, które dopuszczają początkowy rozkład temperatury, scałkowano metodą charakterystyk. Problem propagacji jednowymiarowych fal w sprężysto-lepkoplastycznym pręcie, posiadającym stacjonarny rozkład gradientu temperatury, rozważono w rozdziale trzecim. Zastosowano metodę rozwiązania, która jest syntezą metody różnic skończonych i metody charakterystyk. Metoda ta jest wygodna w przypadku charakterystyk nieliniowych. Pokazano wyniki rozwiązania dla propagacji fal przez ośrodek charakteryzujący się malejącym i rosnącym polem temperatury. W rozdziale piątym przeprowadzono analizę uderzenia termicznego w paliwowym elemencie reaktora. Przedstawiono tu techniki obliczeniowe zarówno dla przypadku jednowymiarowego jak i dwuwymiarowego. Porównanie otrzymanych wyników numerycznych i doświadczalnych przeprowadzono dla prętów sprężystych, sprężysto-plastycznych i sprężysto-lepkoplastycznych. Szczególną uwagę poświęcono rozwiązaniom ścisłym w teorii lepkoplastyczności i termolepkoplastyczności (rozdziały 4, 5). Przedstawiono cztery klasy rozwiązań w postaci zamkniętej: rozwiązanie samopodobne, rozwiązanie ze stałą prędkością propagacji fal (niecharakterystyczną), rozwiązanie «ustalonego stanu» i rozwiązanie za pomocą

funkcji Greena. Rozwiązania analityczne pozwalają przedyskutować rozwiązanie problemu w szerokim zakresie zmiennych niezależnych, a w szczególności zanalizować wpływ różnych parametrów rozwiązania. Stanowią również cenną pomoc przy ocenie przybliżonych metod numerycznych, zbieżności i dokładności rozwiązań numerycznych.

2. UDERZENIE PRĘTÓW Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU TEMPERATRUY I PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA

2.1. Uderzenie wzdłużne dwóch prętów

W wielu znanych w literaturze pracach dotyczących uderzenia dwóch prętów poza granicami plastyczności przyjmuje się półnieskończony lub skończony pręt poddany specjalnym warunkom brzegowym w płaszczyźnie uderzenia. W tym rozdziale rozważać będziemy zarówno ruch badanego pręta jak i pręta uderzającego oraz niektóre efekty termiczne wynikłe z procesu deformacji w zakresie niesprężystym.



Rys. 8. Uderzenie wzdłużne prętów

Przyjmujemy, że oba pręty wykonane są z tego samego materiału. Konfiguracja prętów w chwili poprzedzającej uderzenie pokazana jest na rys. 8 [32]. Równania wyjściowe opierają się na następujących założeniach:

a) Całkowite odkształcenie jest sumą odkształcenia sprężystego i plastycznego:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

b) Prędkość odkształcenia plastycznego jest funkcją tylko chwilowych zmiennych stanu:

$$\dot{\varepsilon}^p = \langle g(\sigma, \varepsilon, \theta) \rangle / E_0,$$

gdzie $\langle g \rangle = 0$, jeśli $g \leq 0$.

c) Obowiązuje termosprężyste prawo Hooke'a ze stałymi współczynnikami

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} - \alpha \dot{\theta}.$$

d) Praca plastyczna zamienia się całkowicie na ciepło [33]; prędkość wytwarzania ciepła na jednostkę objętości początkowej wynosi $\sigma \dot{\varepsilon}^p$.

e) Proces deformacji jest adiabatyczny.

Przy tych założeniach układ równań wyjściowych we współrzędnej Lagrange'a jest następujący:

1) prawo ruchu

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0;$$

2) równanie ciągłości

$$(2.2) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0;$$

3) prawo zachowania energii

$$(2.3) \quad \rho_0 C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - E_0 \alpha \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma g(\sigma, \varepsilon, \theta)/E_0,$$

gdzie C_v oznacza ciepło właściwe;

4) równanie konstytutywne

$$(2.4) \quad E_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - E_0 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} - g(\sigma, \varepsilon, \theta).$$

Przyjmujemy następujące warunki początkowe (rys. 8):

$$v(x, 0) = \begin{cases} 2v_0 & \text{dla } -l_1 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq l_2; \end{cases}$$

dla wszystkich x

$$\sigma(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = \tilde{\varepsilon}(x), \quad \theta(x, 0) = \tilde{\theta}(x).$$

Warunki brzegowe: jeśli końce ($i=1, 2$) są swobodne, to

$$\sigma(l_i, t) = 0;$$

jeśli koniec pręta jest zamocowany, to

$$v(l_2, t) = 0.$$

Płaszczyzna uderzenia $x=0$ jest w kontakcie tak długo, jak długo $\sigma \geq 0$. Naprężenie i prędkość na płaszczyźnie $x=0$ są ciągłe. Jeśli $\sigma < 0$, to powierzchnia $x=0$, powinna być zastąpiona przez dwie nowe powierzchnie swobodne. Ze względu na założenie o adiabatyczności procesu, wyjściowy układ równań jest typu hiperbolicznego o stałych współczynnikach przy pochodnych cząstkowych. W zapisie macierzowym przyjmuje on postać

$$(2.5) \quad au_x + bu_t + d = 0.$$

W układach równań u dużą liczbą niewiadomych, przy wyprowadzeniu równań charakterystyk i równań różniczkowych określonych na tych charakterystykach wygodnie jest postąpić następująco. Mnożąc równanie (2.5) przez macierz transponowaną \mathbf{T} taką, że

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{b}^* \quad \text{i} \quad \mathbf{T}\mathbf{d} = \mathbf{d}^*,$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą diagonalną, otrzymujemy

$$\mathbf{C}\mathbf{b}^* u_x + \mathbf{b}^* u_t + \mathbf{d}^* = 0$$

lub dla składowych

$$(2.6) \quad b^{*\nu i} (C^\nu \partial u^i) \partial x + \partial u^i (\partial t) + d^{*\nu} = 0.$$

Jeśli określimy kierunki charakterystyczne jako

$$dx/dt = C^\nu,$$

gdzie ν oznacza składową diagonalną macierzy \mathbf{C} , to równanie (2.6) redukuje się do równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2.7) \quad b^{*\nu i} du^i + d^{*\nu} dt = 0$$

określone na każdej charakterystyce C^ν .

Składowe macierzy \mathbf{T} można określić z jednorodnego równania $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{b}$. Aby macierz \mathbf{T} była macierzą nietrywialną, elementy macierzy \mathbf{C} muszą spełniać warunek

$$(2.8) \quad \det(\mathbf{a} - \mathbf{C}\mathbf{b}) = 0,$$

skąd otrzymujemy kierunki charakterystyczne C^ν .

Przy mniejszej ilości równań w praktyce postępujemy często inaczej. Podstawowy układ równań (2.1)–(2.4) uzupełniamy równaniami

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial u^i}{\partial t} dt \quad (i=1, 2, 3, 4; \quad u^1 = \sigma, \quad u^2 = v, \quad u^3 = \varepsilon, \quad u^4 = \theta).$$

Mamy zatem osiem równań dla pochodnych σ_x , σ_t , ..., θ_t :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,$$

$$\rho_0 C_\nu \frac{\partial \theta}{\partial t} - E_0 \alpha \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma g / E_0, \quad E_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} - E_0 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} = g,$$

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt,$$

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt, \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial t} dt$$

lub w równoważnej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_0\alpha\theta & 0 & \rho_0 C_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & -E\alpha_0 \\ dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_t \\ v_x \\ v_t \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_t \\ \theta_x \\ \theta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma g(\sigma, \varepsilon, \theta)/E_0 \\ g(\sigma, \varepsilon, \theta) \\ d\sigma \\ dv \\ d\varepsilon \\ d\theta \end{bmatrix}$$

Warunek $\det [a - Cb] = 0$ jest tu równoważny zanikaniu wyznacznika utworzonego ze współczynników przy pochodnych cząstkowych. Mamy zatem

$$(2.9) \quad \frac{dx}{dt} = C_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0} \sqrt{(1 + E_0 \theta \alpha^2) / \rho_0 C_v}} = \sqrt{\frac{E_a}{\rho_0}} = \pm c$$

oraz

$$(2.10) \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

a równania (2.7) otrzymuje się przez zastąpienie kolumn macierzy współczynników kolumną wyrazów wolnych:

$$(2.11) \quad d\sigma \pm \rho_0 c dv = g(1 - \alpha\sigma) \rho_0 C_v / dt \quad \text{na} \quad dx/dt = \pm c$$

oraz

$$(2.12) \quad d\sigma - E_a d\varepsilon = -g(1 - \alpha\sigma) \rho_0 C_v / dt,$$

$$(2.13) \quad \rho_0 C_v d\theta - E_0 \alpha \theta d\varepsilon = (\sigma g / E_0) dt \quad \text{na} \quad dx/dt = 0.$$

Wielkość E_a jest związana z c przez $c^2 = E_a / \rho_0$ i jest znana jako adiabatyyczny moduł Younga.

Aby ocenić wpływ θ i C_v na E_a , wypiszmy fizyczne własności dla aluminium w temperaturze pokojowej:

$$\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \left[\frac{1}{^\circ\text{K}} \right], \quad E_0 = 7 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]},$$

$$C_v = 8,792 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}} \right], \quad \rho_0 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}.$$

Wstawiając te współczynniki do (2.9), otrzymamy $E_a/E_0 = 1,005$. Ponieważ $E_0 \alpha^2$ i C_v bardzo niewiele zmieniają się w temperaturze pokojowej, dlatego w małym przedziale temperatury przyjmować będziemy $E_a = E_0$.

Mamy $1 - \alpha\sigma/\rho_0 C_v = 1 - 10^{-11} \sigma$, gdzie σ jest podane w niutonach na m^2 (Paskalach). Zatem efekt ten -- może nie być całkowicie zaniedbywalny dla naprężeń $10^8 - 10^9 N/m^2$, co odpowiada prędkości uderzenia w przybliżeniu od 100 do 120 [m/s].

Funkcję relaksacji $g(\sigma, \varepsilon, \theta)$ określono następująco. W zakresie izotermicznym uwzględniono liniowe wzmocnienie (z modułem E_1),

$$(2.14) \quad g(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{\tau_0} [\sigma - \sigma_y (1 - E_1/E_0) - \varepsilon E_1],$$

a w zakresie adiabatycznym wykładniczą zależność od temperatury granicy plastyczności (τ_0 i σ_y) [34],

$$(2.15) \quad g(\sigma, \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\tau_0} \exp[k_2(\theta - \theta_r)] \{\sigma - \sigma_y (1 - E_1/E_0) \exp[-k_1(\theta - \theta_r)] - E_1 \varepsilon\},$$

gdzie τ_0 oznacza granicę plastyczności przy ściskaniu, a k_1 i k_2 -- stałe.

Z założenia, że ε^p zależy od zmiennych stanu chwilowego, materiał bezpośrednio po uderzeniu zachowuje się sprężyste. Zatem zmienne σ , v , ε i θ na czele fali doznają skoków

$$(2.15') \quad \begin{aligned} [\sigma] &= E_a [\varepsilon] = \pm \rho_0 c [v], \\ \theta^\pm &= \theta(0^\pm) \exp(E_0 \alpha [\varepsilon] / \rho_0 C_v) = \theta(0^\pm) \exp(\alpha [\sigma] / \rho_0 C_v). \end{aligned}$$

Jeśli pręt przed uderzeniem był w stanie spoczynku (gradienty σ , v i θ są równe zeru), to

$$(2.16) \quad \sigma_0 = \rho_0 C_v v_0 = \varepsilon_0 E_a, \quad \theta(0^-) \exp(E_0 \alpha \sigma_0 / \rho_0 C_v).$$

Jeśli $\theta(0^+) = \theta(0^-)$, to otrzymujemy te same wartości skoków (tzn. (2.16)) dla $x=0^+$. Wzory te wykorzystamy do przedstawienia równań charakterystyk i równań różniczkowych wzdłuż charakterystyk w postaci bezwymiarowej. Wprowadźmy nowe zmienne bezwymiarowe:

$$S = \sigma/\sigma_0, \quad V = v/v_0, \quad E = \varepsilon/\varepsilon_0, \quad H = \theta/\theta(0^-), \quad X = x/l, \quad T = t/\tau, \quad \tau = l/c,$$

$$C_1 = \frac{E_0 \alpha \varepsilon_0}{\rho_0 C_v}, \quad C_2 = \frac{\sigma_0}{E_0 \rho_0 C_v \theta(0^-)},$$

$$C_3 = \frac{\alpha \sigma_0}{\rho_0 C_v} = C_1, \quad G(S, E, H) = g\tau(1 - C_1 S).$$

Równania (2.11)-(2.13) przyjmują w tym przypadku postać:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} dS \pm dV &= -G(S, E, H) dT \quad \text{na} \quad dX = \pm dT, \\ dS - dE &= -G(S, E, H) dT \quad \text{na} \quad dX = 0, \end{aligned}$$

$$dH - C_1 H dE = C_2 \cdot S \cdot G(S, E, H) dT (1 - C_3 S) \quad \text{na} \quad dX = 0.$$

Warunki początkowo-brzegowe w nowych zmiennych bezwymiarowych są następujące:

$$V(X, 0) = 2 \quad \text{dla} \quad -X_2 \leq X < 0,$$

$$V(X, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < X < X_1,$$

$$S(X, 0) = 0 \quad \text{dla wszystkich } X,$$

$$E(X, 0) = E(X) \quad \text{dla wszystkich } X,$$

$$H(X, 0) = H(X) \quad \text{dla wszystkich } X;$$

dla wszystkich czasów T , jeśli końce są swobodne

$$(2.18) \quad S(X_1, T) = 0,$$

dla wszystkich T , jeśli koniec jest zamocowany

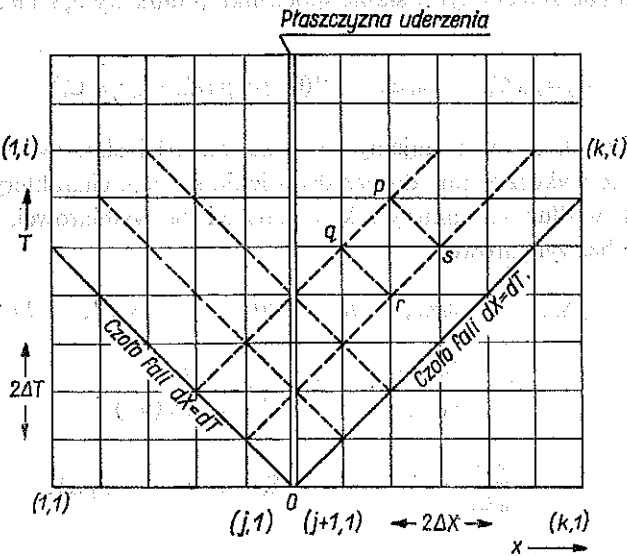
$$(2.19) \quad V(X_2, T) = 0.$$

Ponieważ w procesie adiabatycznym na czołach fal padających $dX = \pm dT$

$$dS = \pm dV = dE$$

przekształcając równania (2.17) redukują się do równania

$$(2.20) \quad 2dS = -GdT, \quad dH = C_1 HdS.$$



Rys. 9. Siatka charakterystyk

Równania różniczkowe wzdłuż charakterystyk rozwiążemy metodą różnic skończonych. Siatka charakterystyk pokazana jest na rys. 9. Oznaczając punkty w dowolnym oczku siatki przez p, q, r, s otrzymujemy następujący układ równań

algebraicznych na niewiadome S , V , E i H w punkcie p (wartości tych zmiennych w punktach q , r i s są znane z poprzednich obliczeń):

$$(2.21) \quad \begin{aligned} S_p + V_p &= S_q + V_q - \frac{1}{2} (G_p + G_q) \Delta T, \\ S_p - V_p &= S_s - V_s - \frac{1}{2} (G_p + G_s) \Delta T, \\ S_p - E_p &= S_r - E_r - (G_p + G_r) \Delta T, \\ H_p &= H_r + \frac{1}{2} C_1 (H_p + H_r) (E_p - E_r) + \frac{1}{2} C_2 (S_p + S_r) (G_p + G_r) \Delta T. \end{aligned}$$

Na czołach fal mamy

$$(2.22) \quad \begin{aligned} S_p - S_q &= -\frac{1}{2} (G_p + G_q) \Delta T \quad (= S_p - S_s), \\ \llbracket S \rrbracket &= \llbracket E \rrbracket = \pm \llbracket V \rrbracket, \\ H &= H_i \exp(C_1 \llbracket S \rrbracket), \end{aligned}$$

gdzie nawiasy kwadratowe $\llbracket \rrbracket$ oznaczają skoki zawartych w nich wielkości, a i wartości początkowe.

Aby otrzymać rozwiązanie na brzegach przyjmujemy w równaniach (2.21) $S_p = 0$ lub $V_p = 0$ w zależności od tego, czy koniec jest swobodny, czy zamocowany. Gdy $S = 0$, przyjmujemy również $G = 0$. Jeśli lewy brzeg jest swobodny, to

$$(2.23) \quad \begin{aligned} S_p &= 0, \\ V_p &= V_s - S_s + \frac{1}{2} (G_p + G_s) \Delta T = V_s - S_s + \frac{1}{2} G_s \Delta T, \\ E_p &= E_r + (G_p + G_r) \Delta T = E_r, \\ H_p &= H_r; \end{aligned}$$

jeśli prawy brzeg jest zamocowany, to

$$(2.24) \quad \begin{aligned} V_p &= 0, \\ S_p &= S_q + V_q - \frac{1}{2} (G_p + G_q) \Delta T, \\ E_p &= S_p - S_r + E_r + (G_p + G_r) \Delta T, \\ H_p &= H_r + \frac{1}{2} C_1 (H_p + H_r) (E_p - E_r) + \frac{1}{2} C_2 (S_p + S_r) (G_p + G_r) \Delta T. \end{aligned}$$

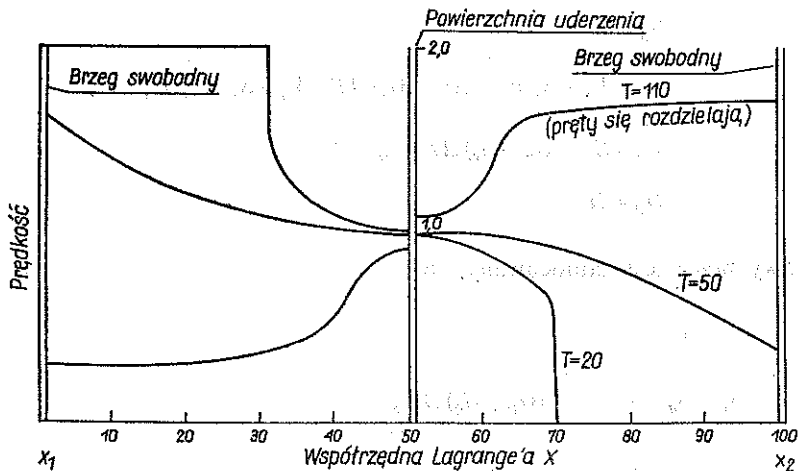
Punkty na powierzchni kontaktu prętów (j, k) i $(j+1, k)$ dla wszystkich k są traktowane jako punkty wewnętrzne, jeśli E i H na początku są ciągłe, tzn. jeśli $(j, 0)$

i $(j+1, 0)$ są identyczne. Jeśli E i H są początkowo nieciągłe wskutek różnicy temperatury w prętach, to przed uderzeniem należy rozwiązać następujące równania względem S_p, V_p (które są wspólne) E_p, E_p', H_p' i H_p' :

$$\begin{aligned}
 S_p + V_p &= S'_a + V'_a - \frac{1}{2} (G_p + G'_a) AT, \\
 S_p - V_p &= S_s - V_s - \frac{1}{2} (G_p + G_s) AT, \\
 S_p - E_p &= S_r - E_r - (G_p + G_r) AT, \\
 S_p - E'_p &= S_r - E'_r - (G_p + G'_r) AT, \\
 H_p &= H_r + \frac{1}{2} C_1 (H_p + H_r) (E_p - E_r) + \frac{1}{2} C_2 (S_p + S_r) (G_p + G_r) AT, \\
 H'_p &= H'_r + \frac{1}{2} C_1 (H'_p + H'_r) (E'_p - E'_r) + \frac{1}{2} C_2 (S_p + S_r) (G'_p + G'_r) AT.
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

W równaniach tych symbol ($'$) oznacza punkt $(j, 0)$. Ponadto jeśli S_p okaże się ujemne, to wyrażenia na niewiadome należy zmienić, przyjmując w miejscu kontaktu prętów brzegi swobodne.

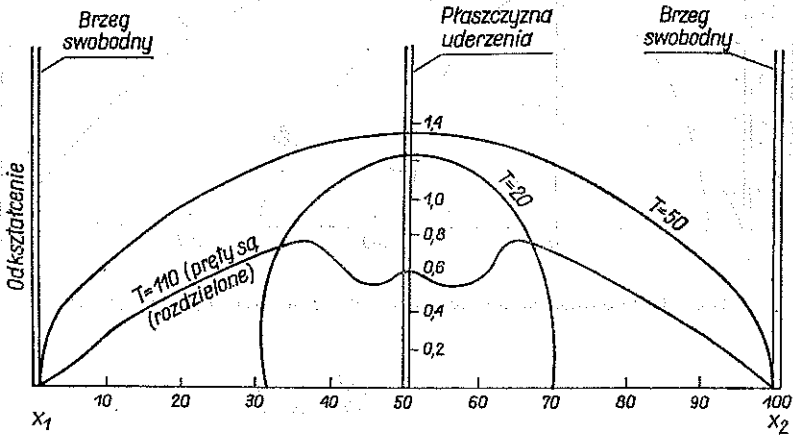
W obliczeniach numerycznych przyjęto następujące stałe: $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,5$, $\sigma_0 \tau / \tau_0 = 10$; $c_1 = 0,15$; $H_r = 10$; $k_1 = 2,0$; $k_2 = 5,0$. Na rysunkach 10-13 pokazane



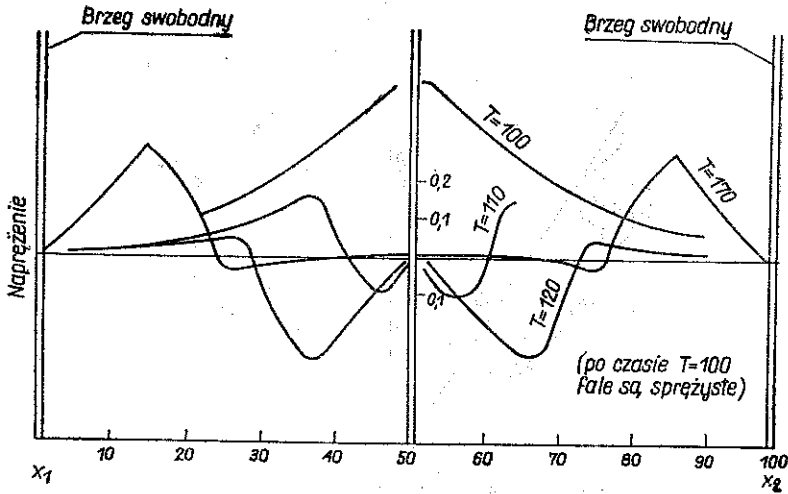
Rys. 10. Izotermiczne profile prędkości

są profile prędkości i odkształcenia w prętach dla różnych czasów. Ponieważ $dX = \pm dT$, przeto fale początkowo rozprzestrzeniają się w obydwu prętach od powierzchni uderzenia z prędkością 1. Gdyby fale te były sprężyste, odbiłyby się od swobod-

nych brzegów jako fale rozciągające. Ale czoła fal sprężystych wskutek oddziaływania z rozprzestrzeniającymi się za nimi falami plastycznymi nie są falami odciążenia (rys. 14). Jednakże dla $X_2 = X_1$ można zaobserwować silne oddziaływanie odbitej fali rozrzedzenia na płaszczyznę uderzenia (rys. 14, 10, 11), co zwiększa efekty

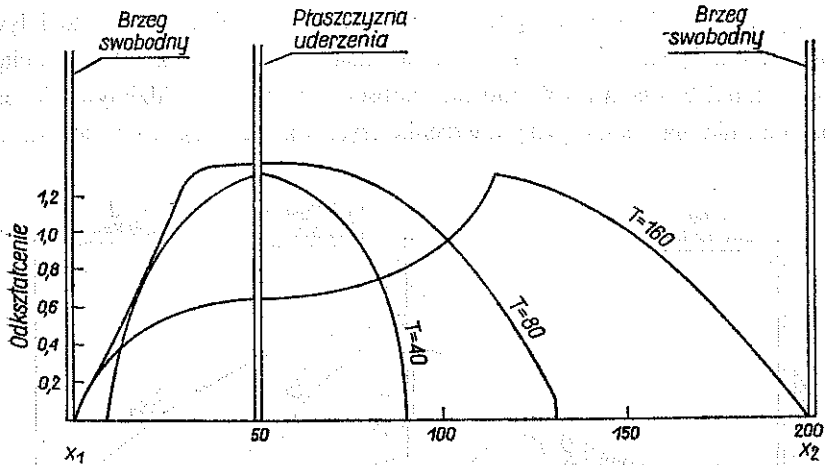


Rys. 11. Izotermiczne profile prędkości w prętach z brzegami swobodnymi

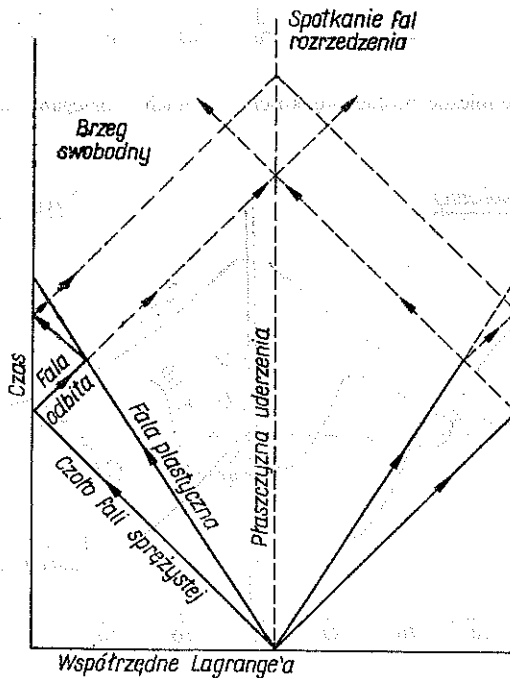


Rys. 12. Rozdzielenie się płaszczyzny kontaktu

odciążenia i wywołuje naprężenie rozciągające w płaszczyźnie styku powodując rozdzielenie się prętów. Rysunek 12 pokazuje rozkłady naprężenia w prętach w płaszczyźnie uderzenia w chwili rozłączania. Z drugiej strony, jeśli $X_1 \neq X_2$ (rys. 13), to spotkanie się fal nigdy nie nastąpi w płaszczyźnie uderzenia i profile odkształcenia wyraźnie się różnią od profili w przypadku poprzednim. Z wykresów można zauważyć



Rys. 13. Izotermiczne profile odkształcenia w prętach, gdy $x_2 = 3x_1$.

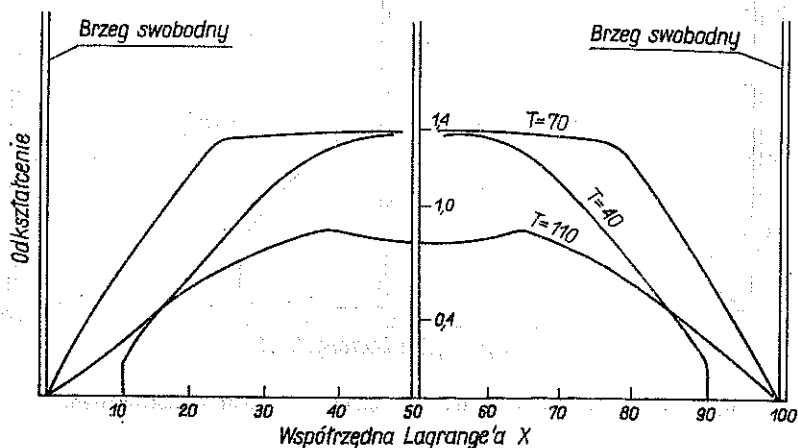


Rys. 14. Odbicie czoła fali padającej od końców swobodnych i fal plastycznych

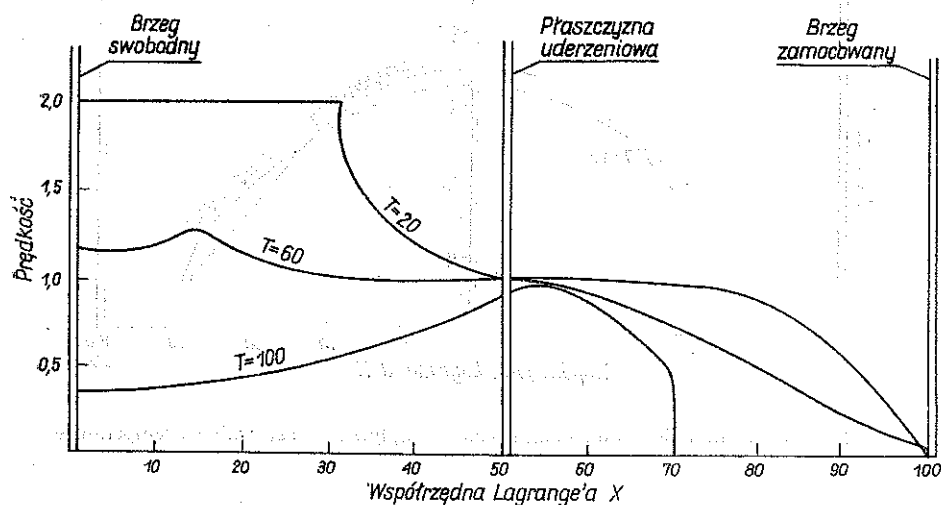
interesujące zjawisko: gdy upłynie dostatecznie dużo czasu, można uzyskać *plateau* odkształcenia i naprężenia nawet dla materiałów czułych na prędkość odkształcenia.

Na rysunkach 15–17 przedstawiono profile odkształcenia i prędkości dla różnych czasów. Rysunek 15 ilustruje przypadek z obydwoma końcami swobodnymi. Zauważ-

my, że wzrost odciążenia wskutek zderzenia się z falami rozrzedzenia jest raczej znikomy. Pręty są w kontakcie jeszcze w czasie $T=110$. Rysunki 16 i 17 pokazują wyniki obliczeń dla brzegu swobodnego i zamocowanego. Zwiększenie odkształcenia ściskającego na brzegu zamocowanym jest zauważalne. Rysunek 18 pokazuje różnicę

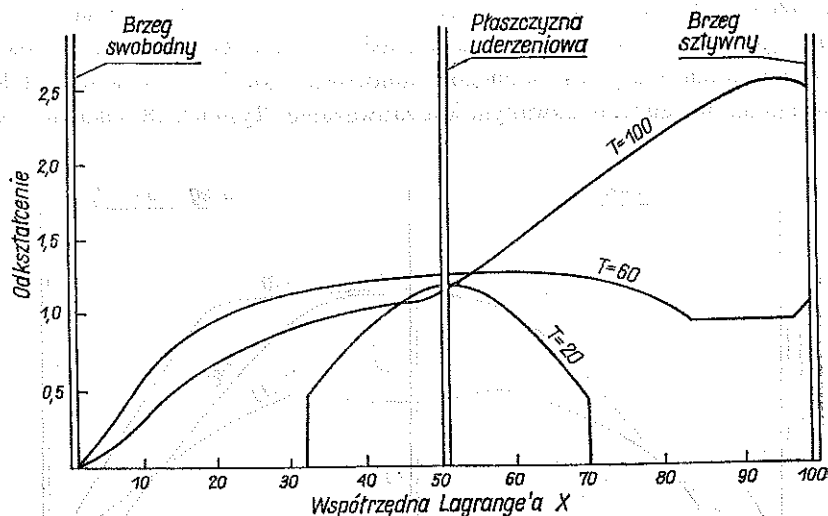


Rys. 15. Profile odkształcenia w prętach z brzegami swobodnymi

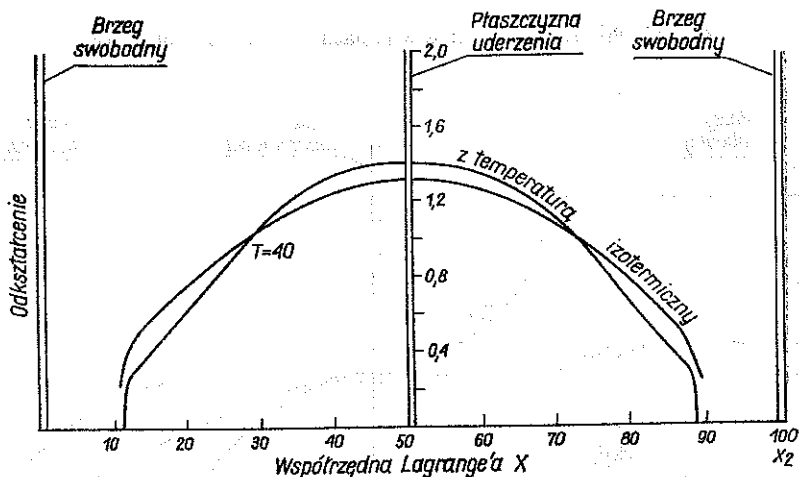


Rys. 16. Profile prędkości w prętach z końcem zamocowanym

między profilem izotermicznym i profilem adiabatycznym. Efekty temperatury typu rozważanego w tej pracy nie prowadzą do żadnych osobliwości w profilach fal. Historię odkształcenia w różnych przekrojach pręta można otrzymać z rysunków 15–17, wykreślając odkształcenie i prędkość jako funkcje czasu dla różnych ustalonych wartości zmiennej przestrzennej x .



Rys. 17. Profile odkształcenia w prętach z końcem zamocowanym



Rys. 18. Porównanie profili odkształcenia z wpływem i bez wpływu temperatury

2.2. Uderzenie lepkoplastycznego pręta o sztywną przegrodę

W. K. NOWACKI i J. ZARKA rozważali w pracy [35] termomechaniczny problem uderzenia sprężysto-lepkoplastycznego pręta o sztywną przegrodę analizując jednocześnie wpływ energii zmagazynowanej w materiale przy wykorzystaniu różnych hipotez w równaniu termodynamiki — na proces deformacji, naprężenia i temperatury w pręcie. Do rozważań przyjęto układ równań wyjściowych (1.1), (1.2), (2.3), (2.4) z modyfikacjami uwzględniającymi w równaniach (2.3) i (2.4) wpływ energii zmagazynowanej. Przyjęto następujące założenia: a) jeden parametr

wewnętrzny Y (bezwymiarowy), który określa uśredniony rozkład dyslokacji w polikryształ, wystarcza do scharakteryzowania stanu wewnętrznego materiału, b) prędkość odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}^p$ oraz parametru wewnętrznego \dot{Y} są funkcjami wartości chwilowych σ , θ , Y ; c) energia zmagazynowana U_2 jest proporcjonalna do Y^2 ($U_2 = AY^2$, A oznacza stałą). Biorąc pod uwagę powyższe założenia zamiast równań (2.3), (2.4) mamy

$$(2.3') \quad \rho_0 C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha \theta \frac{\partial \sigma}{\partial t} + 2AY \frac{\partial Y}{\partial t} = \sigma g(\sigma, \theta, Y),$$

$$(2.4) \quad E_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + E_0 \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + g(\sigma, \theta, Y),$$

oraz równanie ewolucji dla parametru wewnętrznego Y

$$(2.26) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = f(\sigma, \theta, Y).$$

Warunki początkowo-brzegowe dla wyżej rozważanego zagadnienia są następujące:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} &\text{dla } t=0 \\ &\sigma(x, 0)=0, \quad \epsilon(x, 0)=0, \quad Y(x, 0)=Y_0, \\ &\theta(x, 0)=\theta_0, \quad v(x, 0)=v_0; \end{aligned}$$

dla $x=0$

$$v(0, t)=0, \quad \text{jeśli } \sigma(0, t) < 0$$

lub

$$(2.28) \quad \sigma(0, t)=0;$$

dla $x=1$

$$\sigma(l, t)=0.$$

Funkcje $g(\sigma, \theta, Y)$ i $f(\sigma, \theta, Y)$ wyspecyfikowano w następujący sposób:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= g(\sigma, \theta, Y) = \frac{|\sigma|}{\mu} C_1(\theta) \langle \sigma - Y \rangle Y, \\ \dot{Y} &= f(\sigma, \theta, Y) = C_2(\theta) \langle \sigma - Y \rangle Y^{-\nu+1}, \end{aligned}$$

gdzie $|\sigma|$ jest wartością bezwzględną σ , a symbol $\langle \rangle$ oznacza

$$\langle \sigma - Y \rangle = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \sigma - Y > 0, \\ \sigma - Y, & \text{jeśli } \sigma - Y < 0. \end{cases}$$

Funkcje $C_1(\theta)$ i $C_2(\theta)$ przyjęto w postaci

$$(2.30) \quad C_1(\theta) = \frac{A_1}{k\theta} \exp -\frac{V}{k\theta}, \quad C_2(\theta) = \frac{A_2}{k\theta} \exp -\frac{V}{k\theta}.$$

gdzie p , A_1 , A_2 , V i k są stałymi fizycznymi charakteryzującymi materiał. Postać wyrażen (2.30) wskazuje, że odkształcenia lepkoplastyczne są wynikiem termicznie aktywowanych dyslokacji.

Do obliczeń przyjęto następujące wartości stałych materiałowych dla czystego aluminium w temperaturze 300°K:

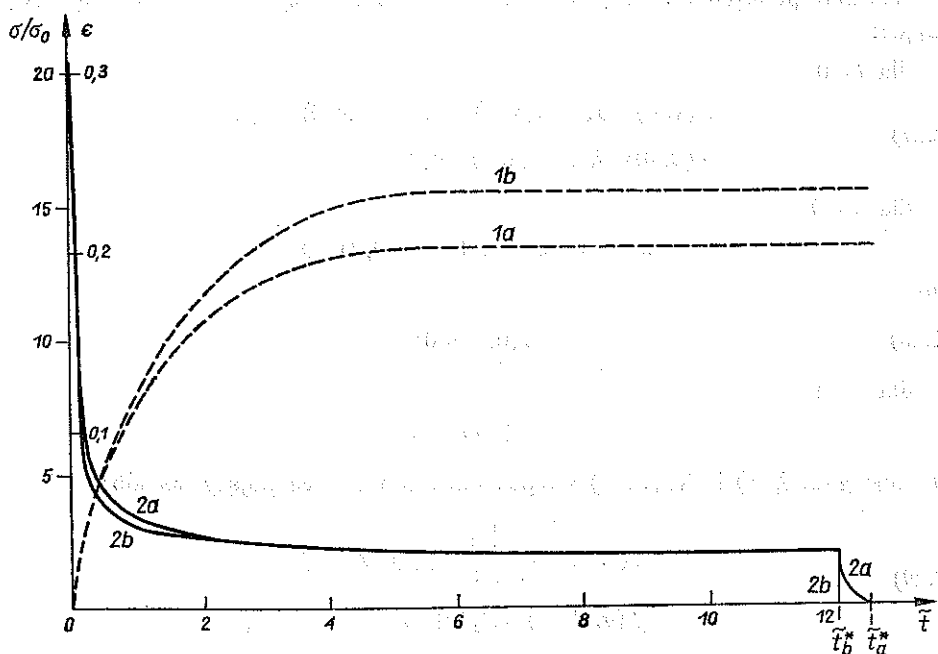
$$E_0 = 7,06 \cdot 10^4 \text{ Mpa}, \quad Y_0 = 5 \cdot 10^{-4}, \quad p = 4,$$

$$\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad C_v = 9 \cdot 10^2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad l = 0,1 \text{ m}, \quad v_0 = 52 \text{ m/s},$$

$$\eta_1(\theta) = C_1(\theta) Y l / c_0 = 0,02; \quad \eta_2(\theta) = C_2(\theta) Y_0^{(1-p)} l / c_0 = 0,5335,$$

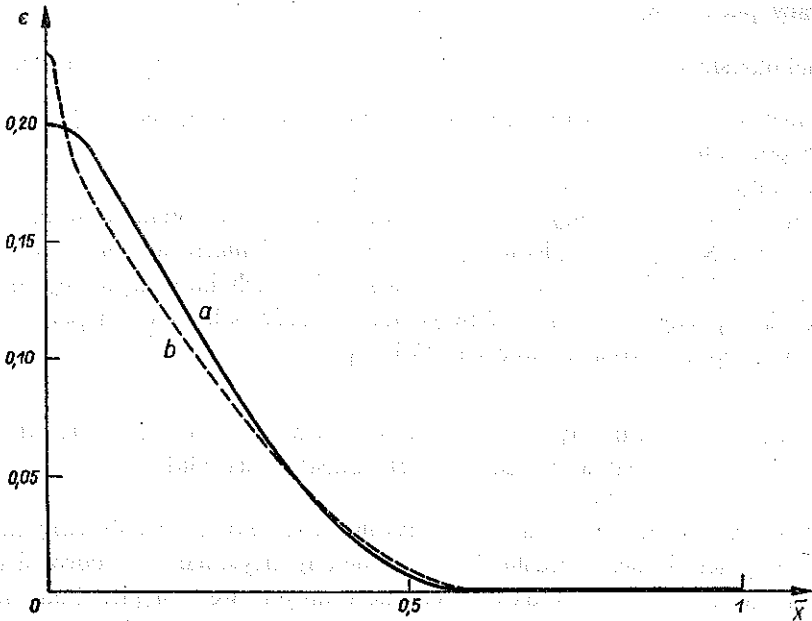
$$\eta_3 = 2 \frac{A}{E} Y_0^2 = 0,03; \quad B = \frac{\alpha Y_0 E_0}{\rho_0 C_v} = 3,704 \cdot 10^{-4}.$$

Równania wzdłuż charakterystyk scałkowano metodą Tréanora, a wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 19–21. Rozkład naprężenia i odkształcenia w czasie w płaszczyźnie uderzenia pręta oraz rozkład odkształcenia plastycznego

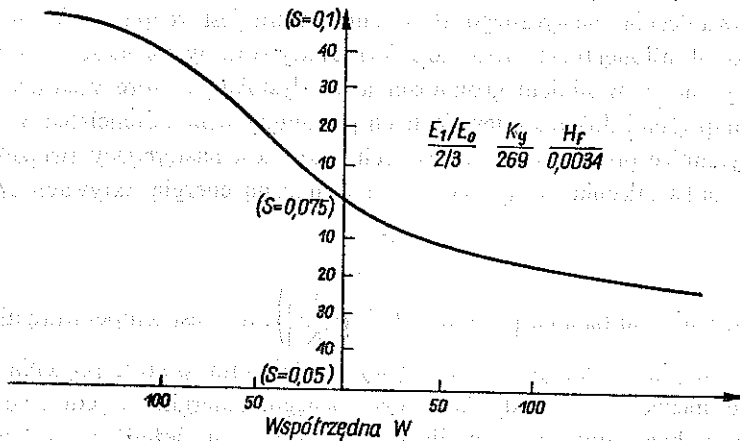


Rys. 19. Rozkład naprężenia i odkształcenia w czasie w płaszczyźnie uderzenia pręta: odkształcenie 1a i naprężenie 2a dla stałych współczynników C_1 i C_2 , odkształcenie 1b i naprężenie 2b dla współczynników C_1 i C_2 zależnych od temperatury

wzdłuż pręta w przypadku braku w równaniu termodynamiki energii zgmagazynowanej (tzn. gdy cała praca plastyczna jest zamieniona na ciepło) pokazano odpowiednio na rys. 19 i 20. Przyjmowano zarówno zmienność współczynników $C_1(\theta)$ i $C_2(\theta)$ zgodnie z równaniami (2.30) jak i ich niezależność od temperatury. Z wykresów tych



Rys. 20. Rozkład odkształceń trwałych w pręcie: a — C_1 i C_2 stałe b — C_1 i C_2 zależne od temperatury



Rys. 21. Przyrost temperatury wzdłuż długości pręta po uderzeniu: 1—bez energii zmagazynowanej,

2—moc energii zmagazynowanej $\dot{U}_2=0,1 \sigma \dot{\epsilon}^p$, 3 — moc energii zmagazynowanej $\dot{U}_2=A\dot{Y}\dot{Y}$

widać, że zmiany wielkości C_1 i C_2 zależne od temperatury nie mają wielkiego wpływu na rozwiązanie i praktycznie można przyjmować, że wielkości te są stałe. Na rys. 21 pokazano przyrost temperatury wzdłuż rozpiętości pręta obliczony według różnych hipotez, dotyczących udziału w równaniu termodynamiki energii zmagazynowanej: a) braku energii zmagazynowanej, b) energii zmagazynowanej równej

0,1 pracy plastycznej (często przyjmowanej w rozwiązaniach) c) energii zgromadzonej określonej wzorem $U^2 = AY^2 \left(\text{wyraz } 2A Y \frac{\partial Y}{\partial T} \text{ w (2.3')} \right)$. Łatwo zauważyć, że różnice w rozwiązaniach otrzymanych według różnych hipotez są również praktycznie pomijalne.

Z analizy powyższych wyników można wysnuć wniosek, że w procesie adiabaticznym zmiany temperatury wywołane zewnętrznymi obciążeniami mechanicznymi są pomijalne. Należy je uwzględniać jedynie w zagadnieniach, w których ma miejsce znaczny wkład ciepła z zewnątrz (przy odkształceniach nieskończenie małych).

Dla ciała plastycznego niewrażliwego na prędkość odkształcenia podobna analiza była przeprowadzona w pracach [36 i 37].

3. ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ FAL W SKOŃCZONYM SPRĘŻYSTOLEPKOPLASTYCZNYM PRĘCIE Z GRADIENTEM TEMPERATURY [38]

W wyprowadzeniu równania konstytutywnego, które by w sposób jawny uwzględniało efekty termiczne, przedstawiono tu metody fizyczne — w odróżnieniu od metod matematycznych, szeroko przedyskutowanych we wstępie. Podobnie jak w rozdziale poprzednim zakładamy, że $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$. Sprężysta składowa prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$, gdzie moduł sprężystości E jest wielkością zależną od temperatury. Wyraz rozszerzalności cieplnej $\alpha \dot{\theta}$ zaniedbujemy, gdyż rozważamy stacjonarne pole temperatury. Jednym ze sposobów znalezienia związku między prędkością odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}^p$ a temperaturą jest rozpatrzenie funkcji $\theta = \theta(\dot{\epsilon}^p)$ jako określonej przez proces termicznie aktywowany. Oznacza to, że odkształcenia plastyczne są wynikiem gromadzenia się dyslokacji, które wskutek działającego pola naprężeń i fluktuacji termicznych pokonują różne potencjalne przeszkody. W termodynamice procesów aktywowanych znany jest następujący związek między prędkością odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}^p$ i termiczną energią aktywacji \mathcal{H} :

$$(3.1) \quad \dot{\epsilon}^p \approx e^{-\mathcal{H}/k\theta},$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna $\left(-7,66 \cdot 10^{-22} \left[\frac{\text{J}}{\text{°K}} \right] \right)$, a θ jest temperaturą absolutną.

Termiczna energia aktywacji \mathcal{H} towarzyszy działającemu polu naprężeń w pokonywaniu termicznej przeszkody krótkiego zasięgu. Energia ta jednakże nie jest wystarczająco duża, aby pokonać siły dalekiego zasięgu. Jeżeli \mathcal{H}_0 jest całkowitą energią aktywacji wymaganą do pokonania bariery potencjalnej, to energia termicznych aktywacji jest różnicą między \mathcal{H}_0 i energią dostarczaną przez przyłożone pole naprężeń. Ta ostatnia może być napisana jako $V_0(\sigma - \bar{\sigma}_0)$, gdzie V_0 jest tzw. objętością aktywacji ($V_0 = \partial \mathcal{H} / \partial \sigma$), a $\bar{\sigma}_0$ oznacza atermiczne pole naprężeń dalekiego zasięgu, które przeciwstawia się ruchowi dyslokacji. $\bar{\sigma}_0$ na ogół jest rosnącą funkcją pola odkształcenia, a o \mathcal{H}_0 i V_0 zakłada się, że są stałe. Zatem energia termicznych aktywacji niezbędna do pokonania przeszkody termicznej jest następująca:

$$(3.2) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - V_0(\sigma - \bar{\sigma}_0).$$

Jest to ta część całkowitej energii aktywacji \mathcal{H}_0 , która wpływa w pierwszym rzędzie na deformację plastyczną. W związku z tym możemy napisać

$$(3.3) \quad \dot{\epsilon}^p \approx e^{-\frac{\mathcal{H}_0 - V_0[\sigma - \bar{\sigma}_0(\epsilon)]}{k\theta}},$$

gdzie $\bar{\sigma}_0(\epsilon)$, jak już wspominaliśmy, jest naprężeniem wewnętrznym dalekiego zasięgu, które wzrasta wraz z odkształceniem i dlatego możemy utożsamiać je formalnie ze statyczną krzywą {naprężenie-odkształcenie $\bar{\sigma}(\epsilon)$ }, a wyraz $\sigma - \bar{\sigma}(\epsilon)$ interpretować jako dynamiczną nadwyżkę naprężenia wprowadzoną wcześniej, o czym wspominaliśmy we wstępie, przez MALVERNA [3] w jego rozważaniach dotyczących deformacji prętów plastycznych czułych na prędkość odkształcenia. Dalszej interpretacji wyrazu $\bar{\sigma}(\epsilon)$ można dokonać pisząc równanie (3.3) w postaci

$$(3.4) \quad \sigma = \frac{\mathcal{H}_0}{V_0} + \bar{\sigma}(\epsilon) - \frac{k\theta}{V_0} \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}^p} \right),$$

gdzie $\dot{\epsilon}_0$ jest stałą proporcjonalności. Wyrażenie «statyczne» ma prawdziwy sens tylko wtedy, gdy wszystkie efekty prędkościowe znikają. Tu zachodzi to tylko wtedy, gdy $\theta=0$. W tym przypadku naprężenie jest proporcjonalne do dwóch wyrazów: pierwszego stałego \mathcal{H}_0/V_0 i drugiego $\bar{\sigma}(\epsilon)$. Wyrażeniu $\bar{\sigma}(\epsilon)$ można nadać interpretację niesprężystego wzmocnienia w temperaturach bliskich zeru absolutnemu. Przy tej interpretacji atermicznego pola naprężeń dalekiego zasięgu równanie konstytutywne przyjmuje postać

$$(3.5) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_0(\theta)} + \dot{\epsilon}_0 e^{-\frac{U[\sigma - \bar{\sigma}(\epsilon)] - 1}{K\theta}},$$

gdzie $U = V_0/\mathcal{H}_0$, $K = k/\mathcal{H}_0$ a $\dot{\epsilon}_0$ jest współczynnikiem lepkości o wymiarze prędkości, $\dot{\epsilon}_0$ jak wiadomo jest funkcją wektora Burgersa gęstości dyslokacji i prędkości, a zatem funkcją odkształcenia. Dla naszych celów przyjmiemy $\dot{\epsilon}_0$ jako stałą, którą dobiera się z danych doświadczalnych.

Układ równań podstawowych składa się z równań (1.1) i (1.2) oraz (3.5). Pole temperatury, które wchodzi bezpośrednio do równania (3.5) można określić przez funkcję wykładniczą, zależną tylko od położenia:

$$(3.6) \quad \theta = \theta(x) = \theta_0 e^{-ax}.$$

Taki rozkład temperatury opisuje spokojny profil temperatury pojawiający się między dwoma stacjonarnymi źródłami termicznymi. Moduł sprężystości $E(\theta)$ przyjęto w postaci liniowej funkcji temperatury:

$$(3.7) \quad E(\theta) = E_0 - E_1 \theta.$$

W wielkościach bezwymiarowych

$$X = x/l, \quad T = (c_0 t)/l, \quad S = \frac{\sigma}{\theta c_0^2}, \quad V = v/c_0, \quad c_0 = (E_0/\theta)^{\frac{1}{2}}$$

układ równań podstawowych przyjmie postać

$$(3.8) \quad S_X = V_T, \quad V_X = E_T, \quad E_T = \psi^2 S_T + Q,$$

gdzie

$$\psi^2 = \psi^2(X) = (1 - C_\lambda e^{-\kappa X})^{-1},$$

(3.9)

$$Q = Q(S, X) = A \exp \frac{U' \left[S - \frac{\bar{\sigma}(\varepsilon)}{\rho_0 c_0^2} \right] - 1}{K \theta_0 e^{-\kappa X}}$$

oraz

$$A = \frac{l \dot{\varepsilon}_0}{c_0}, \quad U' = \rho_0 c_0^2 U, \quad \kappa = a l, \quad C_\lambda = \theta_0 E_1 / E_0.$$

Warunki początkowe. Pręt jest w spoczynku w stanie naturalnym:

$$(3.10) \quad S(X, 0) = V(X, 0) = E(X, 0).$$

Warunki brzegowe: nieobciążony koniec pręta jest swobodny, podczas gdy na drugim końcu może być dane naprężenie, odkształcenie lub prędkości

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \text{dla } X=1 \quad S(1, T) &= 0, \\ \text{dla } X=0 \quad S(0, T) &= \tilde{S}(T), \quad V(0, T) = \tilde{V}(T), \quad E(0, T) = \tilde{E}(T). \end{aligned}$$

Do rozwiązania powyższego problemu brzegowego z uwagi na jego nieliniowy charakter (krzywoliniowe charakterystyki, nieliniowa funkcja Q) efektywną okazuje się metoda rozwiązania, będąca kombinacją metody charakterystyk dla czoła fali i niejawnego schematu różnicowego dla rozwiązania za czołem fali. Eliminując z układu równań (3.8) E otrzymamy układ równań dla S i V :

$$(3.12) \quad S_X = V_T, \quad V_X = \psi^2 S_T + Q,$$

który jest układem hiperbolicznym, posiadającym charakterystyki

$$(3.13) \quad \frac{dT}{dX} = \pm \psi(X)$$

i równania charakterystyczne

$$(3.14) \quad dV dX - dS dT - Q dX^2 = 0.$$

Całkując równanie ruchu (3.13) otrzymamy dla czoła fali

$$(3.15) \quad T = \ln \left\{ \frac{(\sqrt{1 - C_\lambda e^{-\kappa X}} + 1)(\sqrt{1 - C_\lambda} - 1)}{(\sqrt{1 - C_\lambda e^{-\kappa X}} - 1)(\sqrt{1 + C_\lambda} + 1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa}} \quad \text{dla } 0 < X < 1.$$

W czasie T odpowiadającym $X=1$ czoło fali padającej odbija się od swobodnego końca pręta i wraca w obszar już zaburzony. Równanie ruchu fali odbitej otrzymuje się z całkowania równania (3.13) z warunkiem początkowym

$$(3.16) \quad X=1, \quad T = \ln \left\{ \frac{(\sqrt{1 - C_\lambda e^{-\kappa}} + 1)(\sqrt{1 - C_\lambda} - 1)}{(\sqrt{1 - C_\lambda e^{-\kappa}} - 1)(\sqrt{1 + C_\lambda} + 1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Rozważmy najpierw rozwiązanie równania (3.12) na czole fali padającej w przedziale $0 < X < 1$. Z warunku ciągłości kinematycznej otrzymujemy

$$(3.17) \quad [V] = -\psi [S].$$

Założenie, że ośrodek był początkowo niezaburzony prowadzi do

$$(3.18) \quad V = -\psi S.$$

Wykorzystując tę zależność oraz $dT = \psi dX$ dla równania (3.14), dostajemy

$$(3.19) \quad 2\psi \frac{dS}{dX} + S \frac{d\psi}{dX} + Q = 0.$$

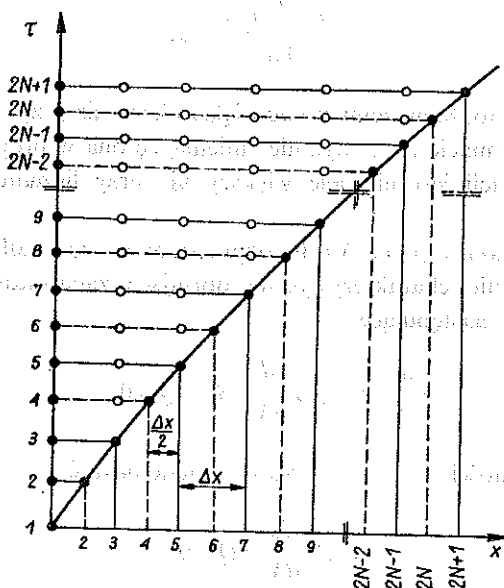
Całkując (3.19) otrzymamy S . Wielkość V dostaniemy z (3.18), a E wynika z warunku ciągłości kinematycznej

$$(3.20) \quad [E] = -\psi [V],$$

tzn. $E = -\psi V$ w przedziale czasu

$$0 < T \leq \ln \left\{ \frac{(\sqrt{1-C_\lambda} e^{-\kappa} + 1)(\sqrt{1-C_\lambda} - 1)}{(\sqrt{1-C_\lambda} e^{-\kappa} - 1)(\sqrt{1-C_\lambda} + 1)} \right\}^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Regularne rozwiązanie za czołem fali w punktach oznaczonych na rys. 22 kółkami, uzyskujemy całkując równania wyjściowe metodą różnic skończonych.



Rys. 22. Siatka różnic skończonych

Korzystnie jest zastosować schemat różnicowy niejawni trzypunktowy względem czasu i współrzędnych przestrzennych. W punktach zaczernionych dane są warunki brzegowe. (częściowo lub całkowicie) oraz znalezione rozwiązanie na czole fali.

Przyrosty czasu ΔT spełniają warunki $\Delta T F < \Delta X$; przy czym ΔT zmienia się dla ustalonego X .

Gdy równania są nieliniowe, korzystnie jest zastosować następujący schemat iteracyjny. Załóżmy, że rozwiązanie jest znane dla wszystkich kroków czasowych z $T=T_j$ włącznie i poszukujemy rozwiązania dla czasu T_{j+1} . Po napisaniu niejawnego schematu różnicowego otrzymujemy równanie macierzowe

$$(3.21) \quad CY = A;$$

gdzie C jest macierzą współczynników powstałych z wag przyjętego schematu różnicowego, Y jest wektorem rozwiązania, a A jest wektorem zawierającym wyrazy dysypatywne Q . Rozwiązanie równania (3.21) rozpoczynamy od rozwiązania równania $CY_0 = A_0$ lub $Y_0 = C^{-1} A_0$. A_0 powstaje z A przez podstawienie $Q=0$. W pierwszej iteracji znajdujemy $Y = Y_1$ z równania (3.21), gdzie $A = A_1$ zawiera $Q(S_0, X)$ wyznaczone z liniowej aproksymacji. Powtarzając obliczenie przyjmując w A_2 $Q(S_1, X)$ otrzymujemy Y_2 . Następnie rozwiązanie osłabiamy zastępując Y_2 wartością średnią z rozwiązań Y_1 i Y_2 z odpowiednimi wagami $Y_2 \rightarrow C^{-1} A/Y_2$, $Y_1 \delta$, gdzie δ jest parametrem osłabienia. To nowe Y_2 porównujemy z Y_1 (ich poszczególne elementy) sprawdzając, czy odpowiednie pary spełniają obrany błąd ε . Jeśli nie, to powtarzamy iterację. Zatem dla $i \geq 2$ liczymy $Y_i \rightarrow C^{-1} (A/Y_i, Y_{i-1}, \delta)$ sprawdzając, czy

$$(3.22) \quad \frac{|Y_i| - |Y_{i-1}|}{|Y_i|} < \varepsilon.$$

Zaletą tej metody jest to, że możemy wziąć większy krok niż przy schemacie zwykłym, tylko raz odwracamy macierz C , gdyż nie zmienia się ona w procesie iteracji, a czas liczenia kolejnej iteracji jest niewiele większy niż przy liczeniu pierwszej iteracji z układu liniowego.

Fala odbita od końca pręta $X=1$ rozprzestrzenia się wzdłuż charakterystyki $dT = -\psi dX$. Równanie charakterystyczne opisujące zachowanie się nieciągłości wzdłuż tej drogi jest następujące:

$$(3.23) \quad \frac{d}{dX} [V] + \psi \frac{d}{dX} [S] - Q = 0,$$

które wskutek zależności $[V] = -\psi [S]$ przybiera postać

$$(3.24) \quad [S] \frac{d\psi}{dX} + Q = 0.$$

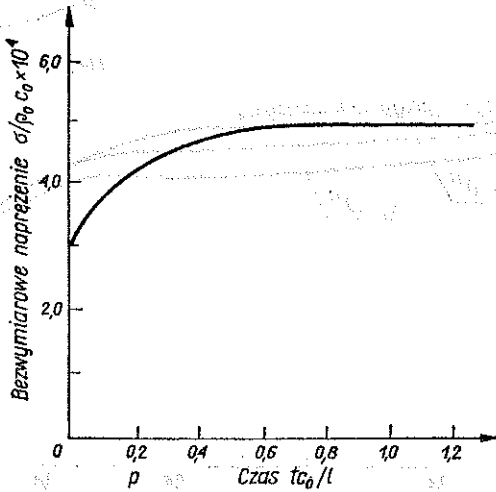
Znając rozwiązanie przed czołem fali odbitej możemy rozwiązać (3.24), a następnie opisaną wyżej techniką znaleźć rozwiązanie za czołem fali odbitej. Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące wielkości dla aluminium 1100-0 (LINDHOLM [39]): $E_0 = 7,72 \cdot 10^4$ MPa przy 0°K , przyjęto, że $\bar{\sigma}(\varepsilon)$ [MPa] zmienia się liniowo i równa się $4,2 \cdot 10^3 \varepsilon$, $\mathcal{H}_0/V_0 = 13,8 \cdot 10^3$, $V_0 = 2,46 \cdot 10^{-29}$ m³, $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{12}$ s⁻¹. Moduł spręży-

stości w przedziale temperatury $294 < \theta \text{ } ^\circ\text{K} < 644$ zmienia się liniowo według następującego wzoru:

$$(3.25) \quad E(\theta) = 6,89 (13,370 - 3,53 \theta) \text{ [MPa]}.$$

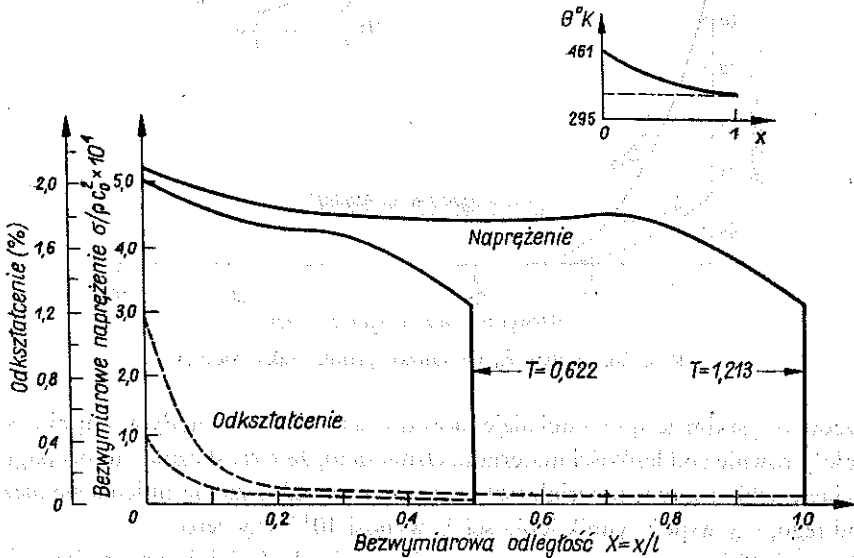
Obciążenie końca pręta $X=0$ przyjęto w postaci (por. rys. 23):

$$\sigma(0, t) = 6,89 [4 + 3(1 - \exp(-4C_0 t l^{-1}))] \text{ [MPa]}.$$



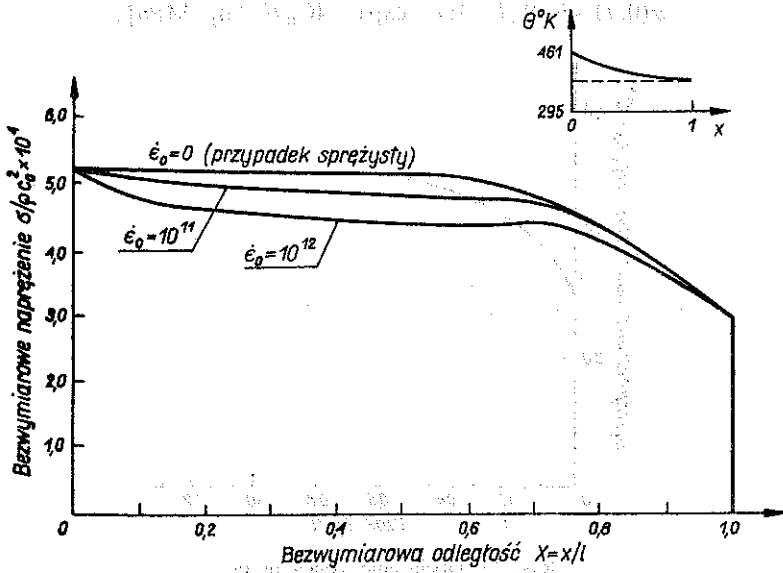
Rys. 23. Obciążenie końca pręta

Rysunki 24–26 pokazują niektóre wyniki obliczeń dla fali rozprzestrzeniającej się w kierunku malejącej temperatury. Gradient temperatury wzdłuż całego pręta wynosi 166°K . Na rys. 24 pokazano charakter profilu napężenia i odkształcenia

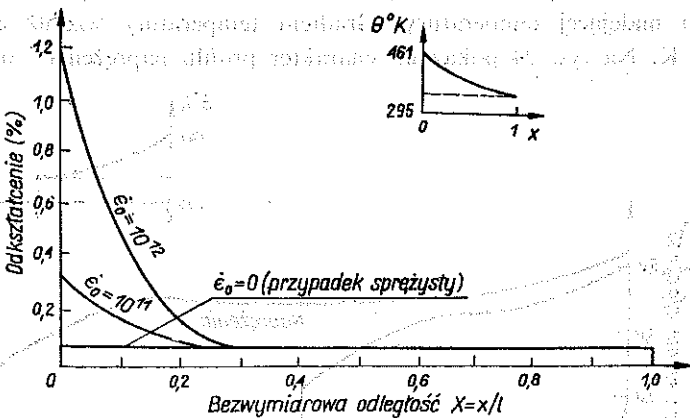


Rys. 24. Profil napężenia i odkształcenia, malejący rozkład temperatury

w dwóch różnych chwilach czasowych $t=0,622$ i $t=1,213$, w których czoło fali padającej dotarło do połowy i końca pręta. Naprężenie i prędkość odkształcenia są dodatnie. Zmniejszanie się odkształcenia wzdłuż pręta jest dużo większe niż naprężenia. Naprężenie i odkształcenie wzrasta na czole fali bardzo powoli. Wynika



Rys. 25. Wpływ $\dot{\epsilon}_0$ na falowe profile naprężenia

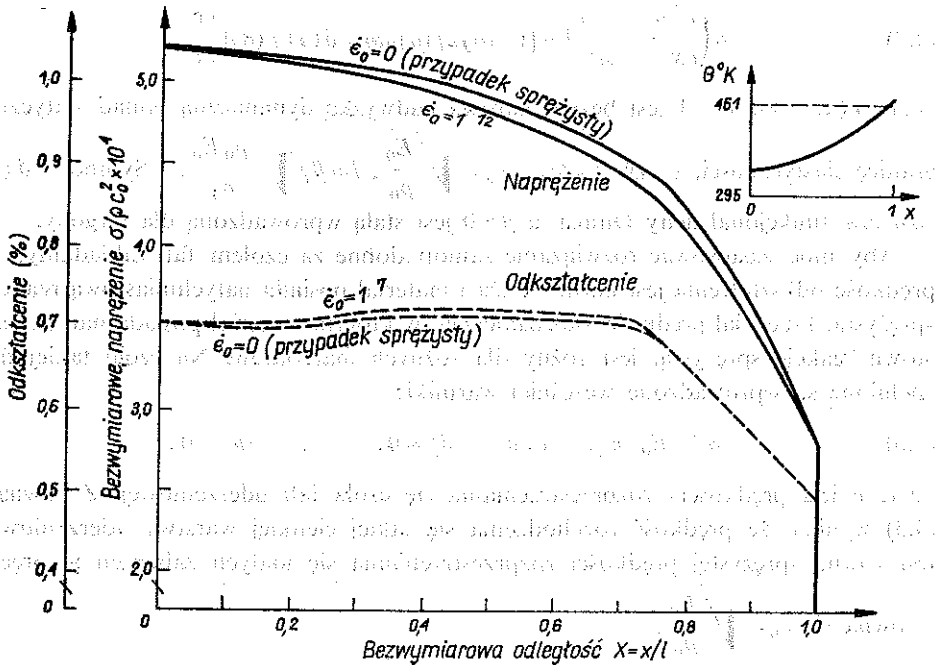


Rys. 26. Wpływ $\dot{\epsilon}_0$ na falowe profile odkształcenia

to przede wszystkim ze sprężystej niejednorodności, chociaż w małym stopniu wzrost ten zależy również od lepkości materiału. Oznacza to, że wzrost czoła fali propagującej się w ciągle ochładzanym materiale (sztywniejszym) zasadniczo nie zmienia się niezależnie od tego, czy współczynnik lepkości $\dot{\epsilon}_0$ wynosi 10^{12} , czy zero.

Rysunki 25 i 26 pokazują wpływ współczynnika lepkości $\dot{\epsilon}_0$ na profile fali. Dla $\dot{\epsilon}_0=0$ mamy stan sprężysty niejednorodny. Dla rozważanych tu warunków począt-

kowo-brzegowych wpływ lepkości zmniejsza w sposób oczywisty poziom naprężenia, zwiększając jednocześnie poziom odkształcenia. Profil odkształcenia ulega znacznej zmianie w okolicy uderzanego końca pręta. Duże gradienty odkształcenia są tu spowodowane efektami lepkoplastycznymi. Na rys. 27 przedstawiono profile odkształcenia w przypadku rozprzestrzeniania się fali w kierunku ciągłego wzrostu



Rys. 27. Profile naprężenia i odkształcenia, wzrastający rozkład temperatury

temperatury (przyjęto dokładnie odwrócony rozkład temperatury). Zwróćmy uwagę na profile odkształcenia, które są teraz dużo mniejsze niż w przypadku malejącej temperatury. Na rys. 27 odkształcenie niezależnie od wielkości prędkości odkształcenia nie ulega zmianie. Dzieje się tak dlatego, gdyż temperatura pręta w tym przypadku jest na tyle niska, że materiał nie przejawia własności lepkich. Można zauważyć mały spadek odkształcenia wzdłuż pręta. W zasadzie jednak jest bardzo mała różnica między rozwiązaniem sprężystym ($\dot{\epsilon}_0 = 0$) i lepkoplastycznym ($\dot{\epsilon}_0 = 10^{12}$).

4. ROZWIĄZANIE ZAMKNIĘTE DLA JEDNOWYMIAROWYCH ZAGADNIENÍ FALOWYCH TEORII LEPKOPLASTYCZNOŚCI I TERMOLEPKO-PLASTYCZNOŚCI

4.1. Rozwiązania samopodobne [40]

Rozważać będziemy szczególny przypadek równania konstytutywnego (1.4) zaproponowanego przez Sokołowskiego [4]

$$(4.1) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{1}{E_0} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \gamma f \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} - 1 \right) \right],$$

gdzie f jest bezwymiarową funkcją klasy C^1 taką, że $f(\eta) > 0$ dla $\eta > 0$; symbol $1_+(\cdot)$ oznacza funkcję Heaviside'a, a pozostałe oznaczenia pozostają bez zmian. Układ równań złożony z równania konstytutywnego (4.1) i równania ruchu (1.1) można sprowadzić do jednego równania różniczkowego cząstkowego hiperbolicznego, drugiego rzędu typu ewolucji, które w bezwymiarowej postaci przyjmuje postać

$$(4.2) \quad \beta \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \right) = [1_+(\sigma) df(\sigma) / d\sigma + \delta(\sigma) f(\sigma)] \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

gdzie $\sigma(x, t) = \bar{\sigma} / \sigma - 1$ jest bezwymiarową nadwyżką dynamiczną ponad statyczną granicę plastyczności, $x = l\bar{x}$, $t = lc_0 \bar{t}$, $c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}$, $l = \beta\gamma \sqrt{\frac{\rho_0 E_0}{\sigma_Y}}$. Symbol $\delta(\cdot)$ oznacza funkcjonal delty Diraca, a $\beta > 0$ jest stałą wprowadzoną dla wygody.

Aby móc zastosować rozwiązanie samopodobne za czołem fali zakładamy, że prędkość odkształcenia jest bardzo duża i materiał posiada natychmiastową reakcję sprężystą. Przedział prędkości odkształcenia, w którym materiał posiada natychmiastową reakcję sprężystą, jest różny dla różnych materiałów. Na czołe takiej fali spełnione są wprowadzone wcześniej warunki:

$$(4.3) \quad [\sigma] = E_0 [\varepsilon], \quad c [u] + [\bar{\sigma}] = 0, \quad c [\varepsilon] + [u] = 0,$$

gdzie c jest prędkością rozprzestrzeniania się czoła fali uderzeniowej. Z równań (4.3) wynika że prędkość rozchodzenia się takiej cienkiej warstwy uderzeniowej jest równa sprężystej prędkości rozprzestrzeniania się małych zaburzeń w przecie i równa się $c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}$.

W klasie rozwiązań samopodobnych wygodnie jest przyjąć równanie (4.2) i potęgową postać funkcji f [41]:

$$(4.4) \quad f(\sigma) = \sigma^p,$$

gdzie $p > 0$ jest stałą materiałową opisującą czułość materiału na prędkość odkształcenia. Prawo (4.4) jest adekwatne dla dynamiki stopów metali przy umiarkowanie wysokich prędkościach odkształcenia i jest często stosowane w dynamice konstrukcji.

Przy tych założeniach równanie (4.2) można wyrazić w postaci

$$(4.5) \quad \varphi(\sigma_{xx}, \sigma_{tt}, \sigma_t; x, t) = 0,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \varphi \equiv \sigma_{xx} - \sigma_{tt} - \sigma^{p-1} \sigma_t 1_+(\sigma).$$

Stała β została tu zastąpiona przez p .

Rozważmy jednoparametrową ciągłą grupę transformacji określonej przez wzory następujące:

$$(4.7) \quad (X, T, \Sigma) = (bx, b^m t, b^n \sigma),$$

$$(4.8) \quad (\Sigma_{xx}, \Sigma_{TT}, \Sigma_T) = (b^{n-2} \sigma_{xx}, b^{n-2m} \sigma_{tt}, b^{n-m} \sigma_t),$$

gdzie b jest parametrem, a n i m są stałymi. Można wykazać, że dla specjalnej klasy

$$m=1, n=\frac{1}{1-p}$$

$$(4.9) \quad \varphi(\sigma_{xx}, \sigma_{tt}, \sigma_t, \sigma; x, t) = b^{(1-2n)/(1-p)} (\Sigma_{XX}, \Sigma_{TT}, \Sigma; X, T)$$

gdzie przyjęto $p \neq 1$.

Dla $p=1$ mamy $f=k(\sigma-\sigma_Y)$. Równanie (4.5) jest liniowe i jego rozwiązanie analityczne przedyskutowane zostało przez MALVERNA [42]. Przy danej na brzegu $x=0$ prędkości uderzenia V_0 rozwiązanie to przyjmuje zamkniętą postać

$$(4.10) \quad \frac{\bar{\sigma}(x, t)}{\sigma_Y} = 1 + \left(\frac{\rho_0 c_0 V_0}{\sigma_Y} - 1 \right) I_0(\eta) \exp\left(\frac{kE}{2} t\right) \quad \text{dla} \quad x \leq c_0 t,$$

gdzie I_0 oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju, a $\eta = \frac{kE}{2} \left(t^2 - \frac{x^2}{c_0^2} \right)^{1/2}$.

Wracając do równania (4.9) można stwierdzić, że φ jest niezmiennikiem grupy przekształceń konforemnych (4.7)–(4.8) z $m=1$ i $n=\frac{1}{p-1}$. Na podstawie twierdzenia

MORGANA [43] z teorii grup rozwiązanie równania (4.3) można wyrazić za pomocą funkcji $F(\xi)$ zależnej od absolutnego niezmiennika ξ grupy przekształceń określonej przez wzór

$$(4.11) \quad (X, T) = (bx, bt).$$

Funkcja $F(\xi)$ jest niezmiennikiem absolutnym grupy przekształceń określonej przez wzór

$$(4.12) \quad (X, T, \Sigma) = \left(bx, bt, b \left(\frac{1}{1-p} \right) \sigma \right).$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(4.13) \quad \xi = \frac{t}{x}$$

oraz

$$(4.14) \quad F(\xi) = x \left(\frac{1}{p-1} \right) \sigma(x, t)$$

są absolutnymi niezmiennikami grup przekształceń (4.11) i (4.12). Zatem istnieje klasa samopodobnych rozwiązań równania (4.4) postaci

$$(4.15) \quad \sigma = x \left(\frac{1}{1-p} \right) F(\xi), \quad \text{gdzie} \quad \xi = \frac{t}{x}.$$

Uwzględniając ten wzór w (4.5)–(4.7), otrzymujemy nieliniowe zwyczajne równanie różniczkowe drugiego rzędu, które dla $p > 0$ przyjmuje postać

$$(4.16) \quad (\xi^2 - 1)F'' - \{[2p/(1-p)]\xi + F^{p-1}\}F' + \left[\frac{p}{(1-p)^2} \right]F = 0.$$

W przypadku szczególnym, gdy $p=2$, $\xi > 0$, równanie powyższe sprowadza się do równania Riccatiego przez obniżenie rzędu

$$(4.17) \quad 2(\xi^2 - 1)F' + 4\xi F - F^2 = 4K_0,$$

gdzie K_0 jest dowolną stałą całkowania. Równanie to można sprowadzić do równania różniczkowego zwyczajnego liniowego przez podstawienie

$$(4.18) \quad (\xi^2 - 1)^r V(\xi) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{F(\xi')}{\xi'^2 - 1} d\xi' \right], \quad 2\xi = \xi + 1$$

Otrzymujemy zatem

$$(4.19) \quad (1 - \zeta)V'' + 2(1+r)(1-2\zeta)V' - (2r - K_0)V = 0,$$

gdzie r spełnia równanie kwadratowe

$$(4.20) \quad 4r^2 + 4r + K_0 = 0.$$

Równanie (4.19) posiada trzy punkty osobliwe $\zeta=0, 1, \infty$ i jego rozwiązanie wyraża się przez funkcje hypergeometryczne. Dla $\xi > 1$ rozwiązanie ogólne równania (4.19) ma postać

$$(4.21) \quad V(\zeta) = C \zeta^{-2r-3} {}_2F_1 \left[2r+3, 2, 4; \frac{1}{\zeta} \right]$$

gdzie C oznacza stałą dowolną.

Z (4.14) otrzymujemy

$$(4.22) \quad F(\xi) = 6(\xi - 1) - 4r + 2(r+3) \frac{(\xi - 1) {}_2F_1 [2r+4, 3, 5; 2/(\xi+1)]}{(\xi+1) {}_2F_1 [2r+3, 2, 4; 2/(\xi+1)]}.$$

Funkcja ta przyjmuje szczególnie prostą postać (wyrażającą się przez funkcje elementarne) dla szczególnych wartości K_0 . Na przykład dla $K_0=0$ (tzn. $r=0$ lub $r=1$) mamy dla $F(\xi)$ i $\sigma(x, t)$

$$(4.23) \quad F(\xi) = 8 \{ 2\xi + (\xi^2 - 1) \ln [(\xi - 1)/(\xi + 1)] + A_1 (\xi^2 - 1) \}^{-1},$$

$$(4.24) \quad \sigma(x, t) = 8x \{ 2xt + (t^2 - x^2) \ln [(t - x)/(t + x)] + A_1 (t^2 - x^2) \}^{-1}.$$

Dla $K_0 = -3 \left(r = \frac{1}{2} \text{ lub } r = -\frac{3}{2} \right)$ otrzymujemy

$$(4.25) \quad F(\xi) = 6(1 + A_2 \xi + \xi^2) / (A_2 + 3\xi - \xi^2),$$

$$(4.26) \quad \sigma(x, t) = 6(x^2 + A_2 xt + t^2) / (A_2 x^3 + 3x^2 t - t^3),$$

gdzie A_1 i A_2 są stałe dowolne. Zauważmy, że rozwiązanie powyższe jest niezmiennicze przy translacji $(x', t') = (x+a, t+a)$.

Rozwiązanie samopodobne można zbudować również tuż za czołem fali uderzeniowej, o czym wspominaliśmy na początku tego rozdziału, gdy wykorzystamy wzory (4.3). Wartości v i $\bar{\sigma}$ bezpośrednio za czołem fali uderzeniowej muszą spełniać równania wzdłuż charakterystyk:

$$(4.27) \quad d\sigma - \rho c dv = -E_0 \gamma f \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} - 1 \right) \right] dt,$$

przy czym $c=c_0=\sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}$. Ponieważ fala rozchodzi się w ośrodek niezaburzony, bezpośrednio za czołem fali na podstawie (4.3) mamy $\sigma=-\rho_0 c_0 v$, a zatem z (4.27)

$$2\beta d\sigma = -f(\sigma)1_+(\sigma)dt,$$

gdzie σ i β oznaczają nadwyżkę dynamiczną i stałą materiałową określoną w (4.2).

Jeśli $\sigma > 0$ a $\frac{d\sigma}{dt} < 0$, to nadwyżka ta wraz z czołem fali uderzeniowej maleje ze wzrostem czasu i wynosi

$$(4.28) \quad t = 2\beta \int_{\sigma}^{\sigma_1} f^{-1}(\zeta) d\zeta + C',$$

Zauważmy, że identyczne rozwiązanie otrzymamy inną metodą w (4.39). Zatem rozwiązania w postaci zamkniętej są możliwe dla szczególnych postaci funkcji f . Dla $f(\zeta) = \zeta^p$, $p \neq 1$ mamy

$$(4.29) \quad t = \left[\frac{2p}{1-p} \right] (\sigma_1^{1-p} - \sigma^{1-p}),$$

gdzie $\sigma_1 = \sigma(0)$, a stałą β utożsamiono z p . Z (4.29) wynika, że σ maleje od σ_1 przy $t=0$ do $\sigma=0$, gdy $t=\infty$. W przypadku $p=2$ równanie to jest spełnione przez jedno z rozwiązań samopodobnych:

$$(4.30) \quad 8\sigma^{-1} = (x+a) [2\eta + (\eta^2 - 1) \{A_1 + \ln[(\eta-1)/(\eta+1)]\}],$$

gdzie $\eta = \frac{t+a}{x+a}$, przy czym a i A_1 są stałymi całkowania.

Jeśli $a=4/\sigma_1$, to nadwyżka naprężenia za czołem fali uderzeniowej jest określona za pomocą wzoru

$$(4.31) \quad \sigma = 8 \left[\left(t + \frac{1}{\sigma_1} \right) \left\{ 2 + \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \left[A_1 + \ln \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right) \right] \right\} \right],$$

a naprężeniowy warunek brzegowy $x=0$ przyjmuje postać

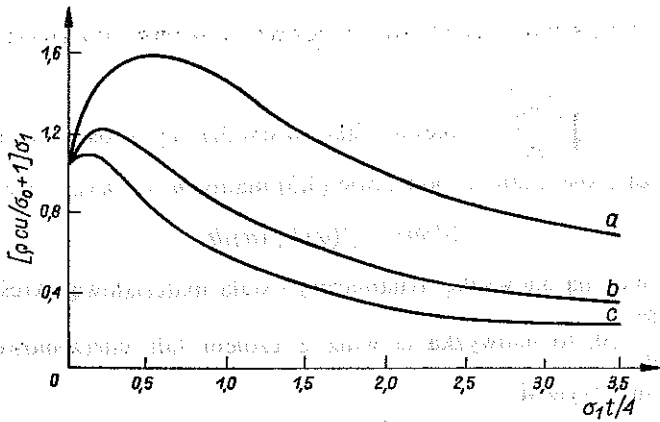
$$(4.32) \quad \sigma(0, t) = 8 \left[\left(t + \frac{4}{\sigma_1} \right) + (2t + \sigma_1 t^2/4) \left\{ A_1 - \ln \left[1 + \frac{8}{\sigma_1 t} \right] \right\} \right].$$

Wzory w postaci bezwymiarowej dla $\sigma(x, t)$, $v(x, t)$ i $\varepsilon(x, t)$ w tym przypadku są następujące:

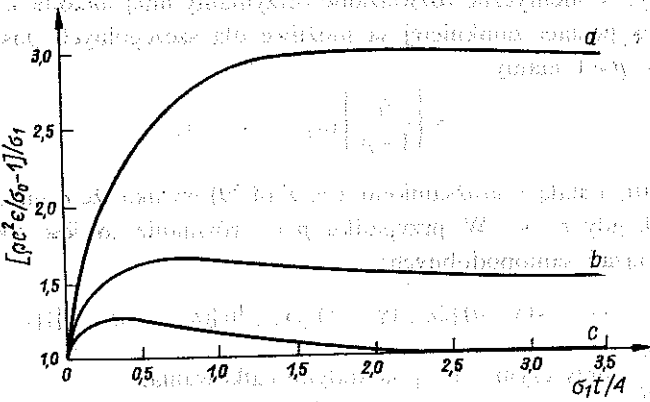
$$(4.33) \quad \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} - 1 = \left[\frac{4c_0 \sigma_Y}{E_0 \gamma} \right] (x + c_0 t_0) [2c_0 (x + c_0 t_0) (t + t_0) - \\ - [(c_0^2 t(t + 2t_0) - x(x + 2C_0 t_0)) \{ \ln [(c_0 t + x + 2c_0 t_0)/(c_0 t - x)] + B \}]^{-1},$$

$$(4.34) \quad v = -\frac{\sigma_Y}{\rho_0} [\sigma(t + t_0)/(x + c_0 t_0) + c_0^{-1}],$$

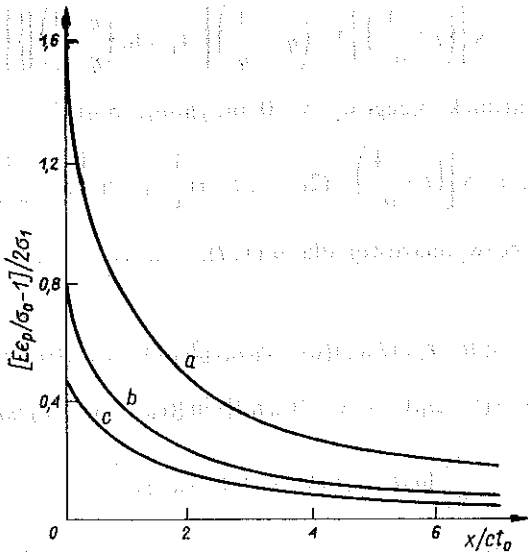
$$(4.35) \quad \varepsilon = \frac{\sigma_Y}{\rho_0} [\sigma(t + t_0)^2/(x + c_0 t_0)^2 + c_0^{-2}], \quad t_0 = \frac{2\sigma_Y}{\gamma \sigma_1 E_0}.$$



Rys. 28. Zmiana prędkości w czasie w $X=0$. Rozwiązanie samopodobne ($p=2$): a) $A_1=\ln 2$, b) $A_1=\ln 4$, c) $A_1=\ln 8$



Rys. 29. Zmiana odkształcenia w czasie w $X=0$. Rozwiązanie samopodobne ($p=2$): a) $A_1=\ln 2$, b) $A_1=\ln 4$, c) $A_1=\ln 8$



Rys. 30. Rozkład odkształceń trwałych ($p=2$): a) $A_1=\ln 2$, b) $A_1=\ln 4$, c) $A_1=\ln 8$

Rozkłady funkcji v i ε w czasie dla różnych wartości stałej A_1 są pokazane na rys. 28 i 29. Trwałe odkształcenia plastyczne ε_p można znaleźć ze wzoru

$$(4.36) \quad \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_Y}{E_0} [(4c_0 \sigma_Y) (A_1 \gamma E) / (x + c_0 t_0)^{-1} + 1].$$

Ich rozkład wzdłuż pręta pokazany jest na rys. 30.

4.2. Nieliniowe fale dysypatywne ze stałymi niecharakterystycznymi prędkościami

Równanie (4.5) jest nieliniowym równaniem hiperbolicznym typu ewolucji. Prędkości charakterystyczne tego równania są określone przez równania różniczkowe charakterystyk:

$$(4.37) \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_0$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(4.37') \quad \frac{dx}{dt} = \pm 1.$$

Ponieważ w równaniu (4.5) występują wyrazy dysypatywne $1 + (\sigma) \frac{df(\sigma)}{d\sigma} + \delta(\sigma) f(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t}$, przeto należy się spodziewać, że w obszarze odkształceń plastycznych może rozprzestrzeniać się fala dysypatywna z prędkością inną niż prędkości (4.37)–(4.37') rozprzestrzeniania się fal nieciągłości. Aby to wykazać, rozważmy

klasę rozwiązań dla nadwyżki $\sigma \equiv \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} - 1$ postaci

$$(4.38) \quad \sigma(x, t) = g(s),$$

gdzie

$$(4.39) \quad s = \bar{c}t - x;$$

\bar{c} oznacza stałą prędkość nierówną prędkości charakterystycznej.

Podstawiając σ do równania (4.5) otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$(4.40) \quad \beta(1 - \bar{c}^2)g'' = \bar{c}[1 + (g)f'(g) + \delta(g)f(g)]g'.$$

Całkowanie daje bezpośrednio

$$(4.41) \quad \beta(1 - \bar{c}^2)g' = \bar{c}1 + (g)f(g) + A,$$

gdzie A oznacza stałą całkowania.

Z równania ruchu (1.1) i równania konstytutywnego (4.1) wynika, że $A=0$.

Zatem

$$(4.42) \quad \beta(1 - \bar{c}^2)g' = \bar{c}1 + (g)f(g).$$

Jeśli $g < 0$, to mamy

$$(4.43) \quad \beta(1-\bar{c}^2)g' = 0.$$

Z wyjątkiem trywialnego przypadku $g = \text{const}$ równanie (4.43) prowadzi do $\bar{c}^2 = \pm 1$ odpowiadającym sprężystym prędkościom rozprzestrzeniania się fal. Dla $g > 0$ równanie (4.43) daje

$$(4.44) \quad \bar{c}^2 < 1 \quad \text{dla} \quad \frac{g'}{\bar{c}} > 0,$$

$$(4.45) \quad \bar{c}^2 > 1 \quad \text{dla} \quad \frac{g'}{\bar{c}} < 0.$$

W przypadku $\bar{c}^2 < 1$ nadwyżka naprężenia może wzrastać lub maleć w zależności od tego, czy $\bar{c} > 0$, czy też $\bar{c} < 0$, tzn.

$$\frac{g'}{\bar{c}} > 0, \quad \text{jeśli} \quad \begin{cases} g' < 0, & \text{jeśli } \bar{c} < 0, \\ g' > 0, & \text{jeśli } \bar{c} > 0. \end{cases}$$

Wynika stąd, że jeśli dla $g > 0$ rozwiązanie istnieje, to fale określone przez te rozwiązania są niecharakterystyczne. Jeśli $h = g'$, to równanie (4.40) dla $g > 0$ przyjmuje postać

$$(4.46) \quad \frac{h'}{g'} = \frac{\bar{c}}{\beta(1-\bar{c}^2)} f'(g).$$

Ponieważ $f(g)$ jest funkcją klasy C^1 , więc równanie to nie posiada żadnych punktów osobliwych i z odpowiedniego twierdzenia Poincarégo można wywnioskować, że na ogół nie posiada rozwiązań periodycznych. Dla $g > 0$ równanie (4.42) można scałkować przez kwadratury:

$$(4.47) \quad s = \beta(1-\bar{c}^2) \int \bar{c} \int f^{-1}(\zeta) d\zeta + C',$$

gdzie C' oznacza stałą dowolną.

Interesujące rezultaty otrzyma się, gdy się przyjmie postać funkcji $f(\zeta)$ zaproponowaną przez PERZYŃĘ [8]:

$$(4.48) \quad f(\zeta) = \sum_{l=0}^L a_l \zeta^l,$$

$$(4.49) \quad f(\zeta) = b_0 + \sum_{l=0}^L b_l (\exp \zeta^l - 1).$$

gdzie a_l i b_l są stałymi współczynnikami. Funkcja (4.48) określa jako szczególny przypadek model (4.4) zaproponowany przez Cowpera i Symondsa. Dla $F(\zeta) = \zeta^p$, $p \neq 1$ równanie (4.43) daje

$$(4.50) \quad s - s_1 = \frac{(1-\bar{c}^2)}{(1-p)\bar{c}} (g^{1-p} - g_1^{1-p}),$$

gdzie $g_1 = g(s_1)$ a za β przyjęto p .

Inny prosty wynik otrzymamy dla równania konstytutywnego (4.49), gdy $L=1$. Po scałkowaniu (4.47) otrzymujemy

$$(4.51) \quad s-s_1 = \frac{(1-\bar{c}^2)}{\bar{c}} \left[(g_1-g) + \ln \frac{e^{\theta}-1}{e^{\theta_1}-1} \right],$$

gdzie $g_1 = g'(s_1)$, s_1 oznacza stałą, a b_1 zastępuje stałą β .

Należy zauważyć, że dla funkcji f danej równaniem (4.48) $f^{-1}(\zeta)$ może być wyrażone w postaci

$$f^{-1}(\zeta) = \sum_{k=1}^m c_k (\alpha_k \zeta + \alpha)^{-k} + \sum_{p=1}^n (d_p \zeta + e_p) (\beta_1 \zeta^2 + 2\beta_2 \zeta + \beta_3)^{-p}.$$

Zatem całka równania (4.42)

$$(4.52) \quad s = [\beta(1-\bar{c}^2)/\bar{c}] \int^s f^{-1}(\zeta) d\zeta + C'$$

może być zawsze wyznaczona przez funkcje elementarne.

4.3. Rozwiązanie dla ustalonego profilu falowego zagadnienia termolepkoplastyczności

W celu znalezienia zamkniętego rozwiązania falowego o ustalonym profilu postaci $f(x-\bar{c}t)$, dla sprężystolepkoplastycznego pręta z uwzględnieniem efektów temperatury, przyjmujemy rozważany wcześniej układ równań podstawowych (2.1)–(2.4). Zakładając, że σ , v , ε i θ są funkcjami tylko jednej zmiennej $s = x - \bar{c}t$, sprowadzimy układ równań (2.1)–(2.4) do postaci

$$(4.53) \quad \frac{d(\sigma - \rho_0 \bar{c}v)}{ds} = 0 \quad \text{lub} \quad \sigma - \rho_0 \bar{c}v = \text{const},$$

$$(4.54) \quad \frac{d(v - \varepsilon)}{ds} = 0 \quad \text{lub} \quad v - \varepsilon = \text{const},$$

$$(4.55) \quad \bar{c} \frac{d\sigma}{ds} - \bar{c}E_0 \frac{d\varepsilon}{ds} - E_0 \alpha \bar{c} \frac{d\theta}{ds} = g(\sigma, \varepsilon, \theta),$$

$$(4.56) \quad E_0 \alpha \bar{c} \theta \frac{d\varepsilon}{ds} - C_v \bar{c} \frac{d\theta}{ds} = \sigma g / E_0.$$

W przypadku izotermicznym w miejsce równań (4.55)–(4.56) mamy jedno równanie

$$(4.57) \quad \bar{c} \frac{d\sigma}{ds} - \bar{c}E_0 \frac{d\varepsilon}{ds} = g \quad \text{lub} \quad d\sigma/ds = \rho_0 \bar{c}g(\rho_0 \bar{c} - E_0).$$

Korzystając z (4.57), równanie (4.56) przedstawimy w postaci

$$(4.58) \quad (\bar{c} - E_0) \rho_0 \bar{c} (d\sigma) ds = -E_0 \alpha \bar{c} \frac{d\theta}{ds} = g.$$

Równania (4.56) i (4.58) można rozwiązać względem $d\sigma/ds$ i $d\theta/ds$:

$$(4.59) \quad \left[\bar{c}^2 - \frac{E_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{E_0 \alpha^2 \theta}{\rho_0 C_v} \right) \right] \frac{d\sigma}{ds} = g \bar{c} \left(1 - \frac{\alpha \sigma}{C_v} \right),$$

$$(4.60) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{g \bar{c} (1 - \alpha \sigma / \rho_0 C_v) E_0 \alpha \theta}{\bar{c}^2 C_v [\bar{c}^2 - (E_0 / \rho_0) (1 + E_0 \alpha^2 \theta / \rho_0 C_v)] - \sigma E_0 C_v \bar{c}^2} - \frac{\sigma g}{\bar{c}^2 C_v}.$$

Eliminując s z powyższych dwóch równań, otrzymujemy

$$(4.61) \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{E_0 \alpha \theta}{\partial_0 \bar{c}^2 C_v} \frac{1}{(1 - \alpha \sigma / \rho_0 C_v)} - \frac{\sigma (1 - E_0 / \rho_0 \bar{c}^2)}{E_0 C_v (1 - \alpha \sigma / \rho_0 C_v)}.$$

Podstawiając $H = \frac{\theta}{\theta_s}$, $S = \frac{\sigma}{\sigma_s}$, gdzie $\theta_s = \frac{\rho_0 C_v}{E_0 \alpha^2}$, $\sigma_s = \frac{\rho_0 C_v}{\alpha}$, $\Gamma = \frac{E_0}{\rho_0 \bar{c}^2}$, dostajemy

$$(4.62) \quad \frac{dH}{dS} = \frac{\Gamma H - (1 - \Gamma) S}{1 - S}.$$

Analizując tę funkcję przekonamy się, że fizycznie interesującym obszarem rozwiązania jest ($H > 0$, $0 < S < 1$). W tym obszarze $\frac{dH}{dS} > 0$, gdy $\Gamma > 1$. Aby scałkować równanie (4.62) wprowadzamy następujące podstawienie:

$$(4.63) \quad \begin{aligned} u &= 1 - S, & dS &= -du, & u &> 0, \\ v &= H - \frac{(1 - \Gamma)}{\Gamma}, & dv &= dH, & v &> 0. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\frac{dv}{du} + \Gamma \frac{v}{u} = (\Gamma - 1),$$

którego rozwiązanie ogólne jest następujące:

$$v = A u^{-\Gamma} + \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} \right) u.$$

Wykorzystując z powrotem podstawienie (4.63), znajdziemy

$$(4.64) \quad H = - \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} \right) \left(S + \frac{1}{\Gamma} \right) + A (1 - S)^{-\Gamma}.$$

Symbol A oznacza tu stałą materiałową, którą określa się z warunku brzegowego dla $s = \pm \infty$. Profile dla σ , ε , θ współrzędnej s dla różnych postaci funkcji $g(\sigma, \varepsilon, \theta)$ można otrzymać z (4.64) oraz z równania

$$(4.65) \quad \sigma - \sigma_r = \rho_0 \bar{c}^2 (\varepsilon - \varepsilon_r),$$

które będzie przedyskutowane dalej.

Przyjmujemy taką samą postać funkcji $g(\sigma, \varepsilon, \theta)$ jak w przykładzie numerycznym (równanie (2.15)) oraz początkowy stan $H_i=0$, $S_i=S_y$. Zatem równanie (4.59) we współrzędnych bezwymiarowych przyjmie postać

$$(4.66) \quad \frac{dS}{dW} = \frac{1-S}{[1-\Gamma(1+H)]} \left\{ S - \frac{E_1}{\sigma_s} \varepsilon - S_y \left[1 - \frac{E_1}{E_0} \right] \exp(-K_y H) \right\},$$

gdzie $W=s/\tau_0 c$, $K_y=k_y \theta_s$, a H spełnia równanie (4.64). Obszar naprężenia i odkształcenia, dla którego ma miejsce fala ustalonego profilu, jest dany przez (4.65), które w tym przypadku przyjmie postać

$$(4.67) \quad S - S_y = \rho_0 \bar{c}^2 (\varepsilon - \varepsilon_y) \sigma_s, \quad \varepsilon_y = \sigma_s S_y / E_0.$$

Eliminując ε z (4.59) otrzymujemy

$$\frac{dS}{dW} = \frac{1-S}{[1-\gamma(1+H)]} \left\{ \left(1 - \frac{E_1}{\rho_0 \bar{c}^2} \right) S + S_y \left[\frac{E_1}{\rho_0 \bar{c}^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) - \left(1 - \frac{E_1}{E_0} \right) \exp(-K_y H) \right] \right\}.$$

Ponieważ $g=0$ dla $g \leq 0$, przeto wyrażenie w nawiasach {...} jest równe zero. Z równania (4.64) i założenia $H_i=0$ mamy

$$(4.68) \quad H = \frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \cdot \frac{(1-S_y)(S_y+1/\Gamma) - (1-S)^f (S+1/\Gamma)}{(1-S)^\Gamma}.$$

Ponieważ stan końcowy jest stanem stacjonarnym, a g przyjęliśmy za równe zero, więc mamy następujące warunki zgodności nałożone na stałe materiałowe:

$$S_f - S_y = \rho_0 \bar{c}^2 (\sigma_f - \sigma_s S_y / E_0) \sigma_s,$$

$$S_f - E_1 \varepsilon_f / \sigma_s - S_y (1 - E_1 / E_0) \exp(-K_y H_f) = 0,$$

a H_f obliczone zostało z (4.68) przy $S=S_f$. Wskaźnik « f » oznacza stan końcowy. Rys. 31 ilustruje rozwiązanie stałego profilu dla następujących stałych:

$$S_f = 0,1; \quad S_y = 0,05; \quad E_0/E_1 = \frac{3}{2}; \quad \sigma_s/E_0 = 2,2; \quad E_1/\rho_0 \bar{c}^2 = 1,2.$$

Rozwiązanie podane na rys. 31 nie przedstawia ustalonego profilu, gdyż czas obliczeń nie był dostatecznie długi.

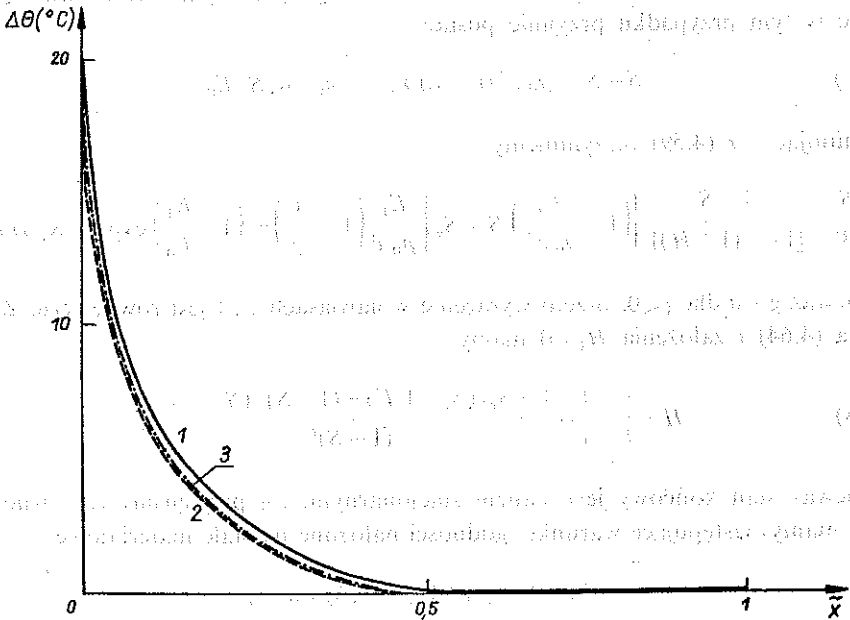
Uzyskane rozwiązanie zamknięte posiada duże znaczenie w technice numerycznej. Stanowi ono ocenę górną rozwiązania fałowego uzyskanego np. metodą różnic skończonych.

Rozwiązanie o ustalonym profilu można formalnie uzyskać, postępując w sposób przedstawiony wyżej. Należy jednak zbadać, czy każde równanie konstytutywne dopuszcza istnienie takiego rozwiązania.

Rozważmy w tym celu równania ruchu i ciągłości wyrażone w zmiennej s (równania (4.53)–(4.54)). Ponieważ zakładamy stały profil rozwiązania we współrzędnej s ,

przeło stan początkowy i stan końcowy są stanami ustalonymi. Oznacza to, że w płaszczyźnie σ, ϵ stany te znajdują się na statycznej krzywej {naprężenie-odkształcenie}, gdzie $g=0$. W przypadku fali sprężystoplastycznej fala sprężysta biegnie szybciej niż fala plastyczna i początkowy stan rozwiązania o stałym profilu jest równy granicy sprężystości.

Oznaczając stan odniesienia przez σ_r, v_r i ϵ_r , z równań (4.53)–(4.54) otrzymujemy bezpośrednio, że rozwiązanie równania (4.57) w płaszczyźnie σ, ϵ musi leżeć na

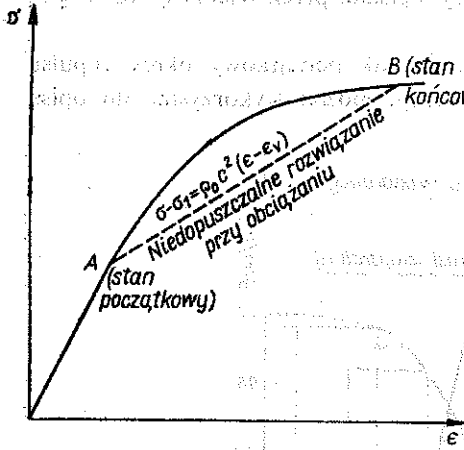


Rys. 31. Przykład rozwiązania o ustalonym profilu

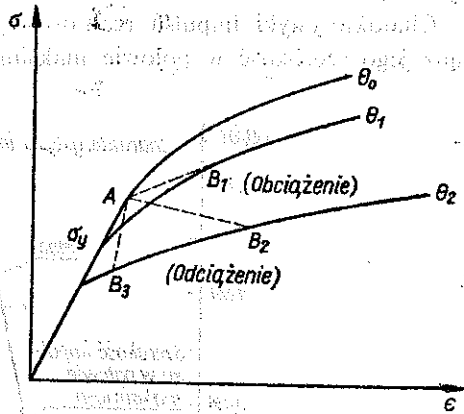
prostej (4.65), łączącej stan początkowy i końcowy. Jeśli nałożyć tę prostą na krzywą $\sigma = \sigma(\epsilon)$ z rys. 32, to widać od razu, że wypukła krzywa {naprężenie-odkształcenie} nie dopuszcza rozwiązania o ustalonym profilu. Natomiast w przypadku biliniowego modelu Prandtla prosta (4.65) pokrywa się z plastycznym odcinkiem krzywej $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Ale na tym odcinku $g=0$ i z całkowania równania (4.57) wynika, że $\sigma = \text{const}$. Oznacza to, że dla pewnej klasy materiałów plastycznych zależnych od czasu uzyskanie *plateau* odkształcenia jest również możliwe po upływie dostatecznie długiego czasu.

Rozważmy teraz wpływ temperatury przy przyjęciu jej jednorodnego początkowego rozkładu na rozwiązanie o ustalonym profilu. Rozwiązanie jest możliwe również dla wypukłej charakterystyki $\sigma = \sigma(\epsilon)$ pod warunkiem, że wraz ze wzrostem temperatury następuje wyraźne obniżenie granicy plastyczności lub zmiana nachylenia krzywej umocnienia (rys. 33). Na tym rysunku można łatwo wyróżnić stany, spełniające równanie (4.65), łączące punkty A i B_i ($i=1, 2$) nie naruszające praw fizycznych

(choć nie wszystkie są dopuszczalne). Należy jednak zwrócić uwagę, że w praktyce niewiele jest materiałów, czułych w sposób istotny na niezbyt duże wahania temperatury (dobrym przykładem są np. plastyki).



Rys. 32. Obszar rozwiązania o ustalonym profilu w płaszczyźnie σ, ϵ



Rys. 33. Obszar możliwych rozwiązań o ustalonym profilu

5. FALE NAPRĘŻENIA WYWOŁANE NAGŁYM OGRZANIEM

5.1. Fale termiczne w reaktorowych elementach paliwowych

W niektórych konstrukcjach lub ich elementach, w szczególności w obudowach zasilania reaktorów, wskutek nagłego ogrzania (np. rozszczepialnego paliwa) powstają fale naprężenia o wysokich amplitudach prowadzące do zniszczenia konstrukcji. Wskazuje to na pilną potrzebę wprowadzenia udoskonalonych modeli teoretycznych i technik rozwiązywania zagadnień brzegowych, które pozwoliłyby na dokładną analizę zjawisk zachodzących wewnątrz ciała (konstrukcji) jak i generowania fal w ciałach stałych za pomocą impulsu termicznego. W procesie nagłego intensywnego ogrzania materiału zmieniają się jego własności mechaniczne.

Jak wynika z dotychczasowych badań, zachowanie się większości materiałów rozszczepialnych może być opisane modelem sprężysto-plastycznym, lepko-sprężystym bądź sprężysto-lepkoplastycznym z uwzględnieniem sił bezwładności. Równania ruchu, równania ciągłości oraz związki fizyczne wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi dla wyspecyfikowanego rozkładu temperatury stanowią podstawowy układ równań, który należy rozwiązać. W czasie trwania impulsu reaktorowego, równania konstytutywne winny być sprzężone z równaniami kinetyki neutronów, by adekwatnie opisać zmianę mocy impulsu w czasie, a zatem czasową zależność wzrostu temperatury w materiale. Z przeprowadzonych obliczeń [44] wynika, że w wielu przypadkach problem kinetyki neutronów można zaniedbać, a wykorzystać funkcję wzrostu temperatury aproksymującą ściśle całkę impulsu zależną od czasu. Przewodnictwo ciepła również można pominąć, gdyż interesujące

Analiza jednowymiarowa. Równania ruchu i ciągłości są takie same jak (1.1)–(1.2). Równania konstytutywne zawierające własności sprężyste, plastyczne i lepkie oraz uwzględniające efekty bezwładności poprzecznej przyjmują postać [46]:

$$(5.2) \quad \sigma = E_0(\varepsilon - \alpha\theta) + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v^2 k_r^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad \text{dla} \quad \sigma \leq \sigma_y,$$

$$(5.3) \quad \sigma = \sigma_y + E_p(\varepsilon_p - \alpha\theta - \varepsilon_y) + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_p^2 k^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad \text{dla} \quad \sigma > \sigma_y,$$

gdzie α oznacza współczynnik rozszerzalności cieplnej, θ przyrost temperatury, η współczynnik tłumienia dla ciała Kelvina-Voighta, v współczynnik Poissona, k_r promień obrotu (żyroskopowy), E_0 moduł sprężysty, E_p moduł plastyczny, σ_y granicę plastyczności na rozciąganie i ε_y odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności σ_y .

Przy numerycznym całkowaniu równań (1.1)–(1.2), (5.2)–(5.3) wygodniej jest stosować różniczkową postać funkcji {naprężenie-odkształcenie}. Postać tę otrzymuje się bądź z (5.2) bądź z (5.3), gdyż granica plastyczności σ_y i odkształcenie plastyczne ε_y nie zależą od czasu. Mamy więc

$$(5.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \eta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + v^2 k_r^2 \frac{\partial^3 \sigma}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - T \frac{\partial (E\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2 k^2),$$

W powyższym równaniu moduł E_0 i współczynnik Poissona v przyjmują wartości sprężyste dopóki nie zostanie osiągnięta granica plastyczności, a wartości plastyczne do chwili wystąpienia odciążenia, kiedy to moduł i współczynnik Poissona z powrotem przyjmują wartości sprężyste. Warunek plastyczności ma postać $\sigma \geq \sigma_y$.

Warunki początkowe przyjmujemy jak dla ciała pozostającego w spoczynku, tzn. prędkość, odkształcenie i naprężenie są równe zero. Temperatura rośnie zgodnie z daną funkcją czasu i przestrzeni, a wyznaczana jest prędkość, współrzędna położenia, odkształcenie i naprężenie. Składowa przemieszczenia u określona jest jako zmiana położenia współrzędnej

$$u = x - x_0,$$

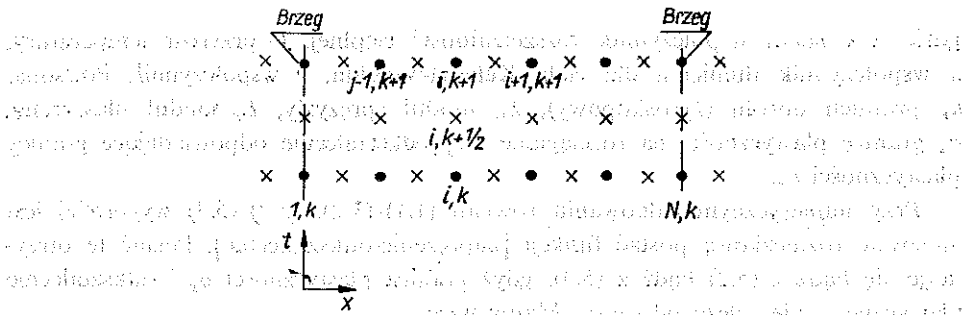
gdzie x_0 jest jej początkowym położeniem. Warunki brzegowe określają naprężenie nałożone na końcach ciała. Jeśli koniec jest zamocowany, to prędkość jest równa zero. Równania podstawowe rozwiązano metodą numeryczną opracowaną przez RICHTMAYERA i MORTONA [47] i stosowaną przez HERMANA [48] do analizy jednowymiarowych fal uderzeniowych. Zastosowano zmodyfikowane centrowane schematy różnicowe drugiego rzędu dla prędkości i liniowe wzory interpolacyjne dla wielkości położonych między oczkami siatek. Prędkość, naprężenie, odkształcenie i współrzędne położenia są aproksymowane przez następujące funkcje różnicowe (rys. 35):

$$(5.5) \quad v(x, t) \approx v_{i,k}, \quad x(x, t) \approx x_{i,k}, \quad \varepsilon(x, t) \approx \varepsilon_{i,k}, \quad \sigma(x, t) \approx \sigma_{i,k}.$$

Podstawowe schematy różnicowe dla pochodnej przestrzennej i czasowej oraz schematy liniowej interpolacji są następujące:

$$(5.6) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},k} = \frac{v_{i+1,k} - v_{i,k}}{x_{i+1,k} - x_{i,k}}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,k+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{t_{i,k+1} - t_{i,k}},$$

$$(5.7) \quad v_{i+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(v_{i+1,k} + v_{i,k}), \quad v_{i,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{i,k+1} + v_{i,k}).$$



Rys. 35. Siatka przestrzenno-czasowa dla zagadnienia jednowymiarowego

Równanie ruchu w formie różnicowej jest następujące:

$$(5.8) \quad \frac{v_{i,k+\frac{1}{2}} - v_{i,k-\frac{1}{2}}}{\Delta t_k} = \frac{2(\sigma_{i+\frac{1}{2},k} - \sigma_{i-\frac{1}{2},k})}{\rho_{i+\frac{1}{2},k}(x_{i+1,k} - x_{i,k}) + \rho_{i-\frac{1}{2},k}(x_{i,k} - x_{i-1,k})},$$

gdzie gęstość wynosi

$$(5.9) \quad \rho_{i-\frac{1}{2},k} = m_{i-\frac{1}{2}}/(x_{i,k} - x_{i-1,k}),$$

a $m_{i-\frac{1}{2}}$ oznacza masę poszczególnych oczek siatki obliczoną z gęstości początkowej i wyjściowych położeń współrzędnych. Ponadto wartości współrzędnych i składowe odkształcenia są określone następująco:

$$(5.10) \quad x_{i,k+1} = x_{i,k} + \Delta t_k v_{i,k+\frac{1}{2}},$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},k+1} = \varepsilon_{i+\frac{1}{2},k} + \frac{\Delta t_k (v_{i+1,k+\frac{1}{2}} - v_{i,k+\frac{1}{2}})}{x_{i+1,k+\frac{1}{2}} - x_{i,k+\frac{1}{2}}},$$

gdzie

$$x_{i+1,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i+1,k+1} + x_{i+1,k}).$$

Różnicowa postać równania konstytutywnego ze stałym współczynnikiem tłumienia i bezwładnością poprzeczną jest następująca:

$$(5.11) \quad v_{i+\frac{1}{2},k+1} - \sigma_{i+\frac{1}{2},k} = E_{i+\frac{1}{2},k+1} (\varepsilon_{i+\frac{1}{2},k+1} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},k}) - (\alpha E)_{i+\frac{1}{2},k+1} (T_{i+\frac{1}{2},k+1} - T_{i+\frac{1}{2},k}) + \frac{\eta}{\Delta t_k} (\varepsilon_{i+\frac{1}{2},k+1} - 2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},k} + \varepsilon_{i+\frac{1}{2},k-1}) +$$

$$+ \frac{v^2 k^2}{\Delta t k} \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},k+1} - 2\sigma_{i+\frac{1}{2},k+1} + \sigma_{i-\frac{1}{2},k+1}}{(x_{i+\frac{1}{2},k+1} - x_{i+\frac{1}{2},k+1})(x_{i+\frac{1}{2},k+1} - x_{i-\frac{1}{2},k+1})} + \varepsilon_{i+\frac{1}{2},k+1} (E_{i+\frac{1}{2},k+1} - E_{i+\frac{1}{2},k}) - T_{i+\frac{1}{2},k+1} [(\alpha E)_{i+\frac{1}{2},k+1} - (\alpha E)_{i+\frac{1}{2},k}].$$

Równania powyższe są rozwiązywane w takiej kolejności, w jakiej są wypisane. Prędkości są określone w punktach oznaczonych «x» między krokami czasowymi $k+1$ i k (rys. 35), odkształcenie, naprężenie i gęstość są liczone w punktach «x» między $i-i+1$, a współrzędne przestrzenne są określone w punktach oznaczonych kropką. Dla zamocowanego końca pręta przyjmujemy, że prędkość równa się zeru dla wszystkich kroków czasowych, dla brzegu swobodnego, że naprężenie w punktach leżących na zewnątrz brzegu jest zawsze równe zeru. Wykazano, że warunek stabilności rozwiązania numerycznego jest następujący:

$$(5.12) \quad \frac{E_0}{\rho_0} \frac{\Delta t^2}{\Delta x_{\min}^2} + \frac{\eta \Delta t}{\Delta x_{\min}^2} \leq 1,$$

gdzie Δx_{\min} jest najmniejszym przyrostem czasowym.

Analiza dwuwymiarowa. Równania ruchu dla dwuwymiarowego problemu walca kołowego z kołową symetrią w układzie współrzędnych x, y, v mają postać

$$(5.13) \quad \rho v_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xy}}{y},$$

$$(5.14) \quad \rho v_y = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta}}{y},$$

gdzie v_x i v_y oznaczają osiową i promieniową składową prędkości, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} odpowiednio naprężenie osiowe, radialne i styczne. Równania ciągłości są następujące:

$$(5.15) \quad \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

gdzie ε_{xx} , ε_{yy} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{xy} oznaczają odpowiednio radialną, osiową styczną i postaciową składową tensora odkształcenia, a t jest czasem. Współrzędne położenia wyznacza się ze składowych prędkości:

$$(5.16) \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y.$$

Równania konstytutywne dla czterech niezerowych składowych tensora naprężenia wyprowadzone przez Freudenthala i Geiringer z tłumieniem dla ciała Kelvina-Voighta mają postać:

$$(5.17) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right) + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial t^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon_{xx} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu + \lambda) + (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{yy}) \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \theta \frac{\partial}{\partial t} [(3\lambda + 2\mu) \alpha].$$

$$(5.18) \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} \right) + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t^2} \right) +$$

$$- (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu + \lambda) + (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}) \frac{\partial \lambda}{\partial t} -$$

$$- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \theta \frac{\partial}{\partial t} [(3\lambda + 2\mu)],$$

$$(5.19) \quad \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right) + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial t^2} \right) +$$

$$- (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon_{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial t} (2\mu + \lambda) + (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \frac{\partial \lambda}{\partial t} -$$

$$- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \theta \frac{\partial}{\partial t} [(3\lambda + 2\mu) \alpha].$$

$$(5.20) \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} + 2\eta \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial t^2} + 2\varepsilon_{xy} \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Równania te odnoszą się do obszaru sprężystego i plastycznego, jeśli wybierzemy dla w tych obszarów odpowiednie wartości modułu i współczynnika Poissona.

Warunek Hubera-Misesa ma postać

$$(5.21) \quad \{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}\}^{\frac{1}{2}} \geq 2\sigma_y.$$

W przypadku sprężystym moduł Younga i współczynnik Poissona są równe zeru; w zakresie odkształceń plastycznych dla biliniowego modułu Prandtla przyjmujemy następujący moduł plastyczny i plastyczny współczynnik Poissona:

$$E_p \approx 0,1 E_0, \quad \nu_p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{E_p}{E_0}.$$

Do rozwiązania powyższych równań wykorzystano technikę numeryczną stosowaną przez WILKINSA [49], BERTHOLFA [50] i HERMANA [51]. Wykorzystano całkowite definicje pochodnych cząstkowych dla ich aproksymacji przez schematy różnicowe. Dla funkcji $F(x, y)$ pochodne są określone następująco:

$$(5.22) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\int_C F(n_i) dS}{\lim_{A \rightarrow 0} A}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\int_C F(n_j) dS}{\lim_{A \rightarrow 0} A},$$

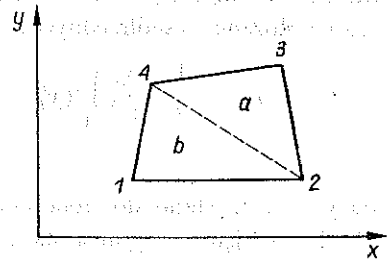
gdzie C jest konturem ograniczającym powierzchnię A , S jest długością łuku, a n wektorem normalnym do brzegu C . Stosując te definicje do czworokąta 1, 2, 3, 4 (rys. 36) o polu powierzchni A z funkcją F określoną w punktach 1, 2, 3, 4, pochodne funkcji F można napisać w postaci

$$(5.23) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2A} [(F_2 - F_4)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_4)(F_3 - F_1)],$$

$$(5.24) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2A} [(F_2 - F_4)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_4)(F_3 - F_1)].$$

Pochodne są określone w środku czworokąta. Powierzchnia czworokąta podzielona jest na dwa trójkąty a i b o polach powierzchni A i A_b . Pola tych powierzchni wyrażone są następująco przez współrzędne punktów 1, 2, 3, 4:

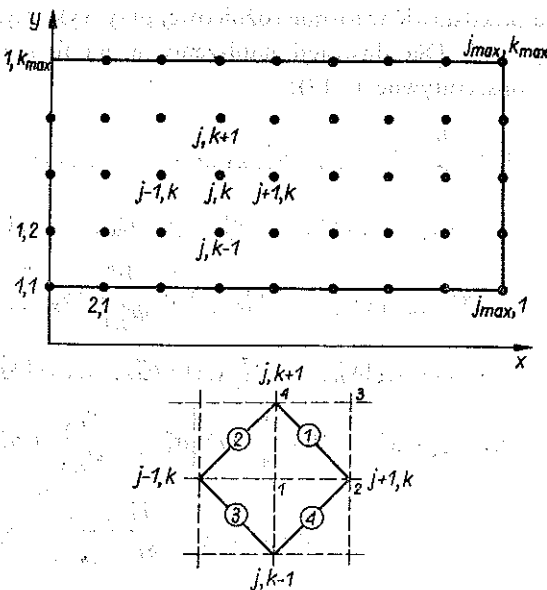
$$(5.25) \quad \begin{aligned} A_a &= \frac{1}{2} x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + \\ &+ x_4 (y_2 - y_3), \\ A_b &= \frac{1}{2} x_2 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_2) + \\ &+ x_1 (y_2 - y_4), \\ A &= A_a + A_b. \end{aligned}$$



Rys. 36. Czworokąt 1234 o polu powierzchni A

Rozważany przez nas cylinder pokrywamy siatką poruszającą się wraz z materiałem (z osią x jako osią symetrii) pokazaną na rys. 37 wraz z małym czworokątem będącym podstawą schematu różnicowego. Oznaczając kierunki x i y przez j i k mamy

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{j,k}, & x_2 &= x_{j+1,k}, & x_3 &= x_{j+1,k+1}, & x_4 &= x_{j,k+1}, \\ y_1 &= y_{j,k}, & y_2 &= y_{j+1,k}, & y_3 &= y_{j+1,k+1}, & y_4 &= y_{j,k+1} \end{aligned}$$



Rys. 37. Siatka przestrzenna dla zagadnienia dwuwymiarowego

oraz wzory na pola powierzchni

$$\begin{aligned} A_{a1} &= A_{aj+1,k+1} = \frac{1}{2} \{x_{j+1,k}(y_{j+1,k+1} - y_{j,k+1}) + x_{j+1,k+1}(y_{j,k+1} - y_{j+1,k}) + \\ &+ x_{j,k+1}(y_{j+1,k} - y_{j+1,k+1})\}, \\ A_{b1} &= A_{bj,k} = \frac{1}{2} \{x_{j+1,k}(y_{j+1,k+1} - y_{j,k}) + x_{j,k+1}(y_{j,k} - y_{j+1,k}) + \\ &+ x_{j,k}(y_{j+1,k} - y_{j,k+1})\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A_{j,k} = A_1 = A_{a_{j+1,k+1}} + A_{b_{j,k}}.$$

Masa czworokąta 1 jest stała w czasie i jest obliczona w chwili początkowej z wyjściowego położenia współrzędnych:

$$M_1 = M_{j,k} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_0}{V^0} \right)_1 \{ (y_{j+1,k}^0 + y_{j+1,k+1}^0 + y_{j,k+1}^0) A_{a_{j+1,k+1}}^0 + (y_{j,k}^0 + y_{j+1,k}^0 + y_{j,k+1}^0) A_{b_{j,k}}^0 \},$$

Masy wykorzystano do obliczenia zmian gęstości materiału w czasie ogrzewania cylindra. Objętość i gęstość na n -tym kroku czasowym są dane odpowiednio wzorami:

$$V_{j,k}^n = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{M_{j,k}} \{ (y_{j+1,k}^n + y_{j+1,k+1}^n + y_{j,k+1}^n) A_{a_{j+1,k+1}}^n + (y_{j,k}^n + y_{j+1,k}^n + y_{j,k+1}^n) A_{b_{j,k}}^n \},$$

$$\rho_{j,k}^n = \rho_0 / V_{j,k}^n.$$

Składowe prędkości są określone w punktach j, k , składowe naprężenia oraz masa, pole powierzchni, objętość — w środku małych czworokątów 1, 2, 3, 4. Równania (5.13)–(5.21) można przedstawić w formie różnicowej przy wykorzystaniu powyższych schematów i interpolacji. Dla ilustracji napiszemy w tej formie równanie ruchu (5.13) i równanie konstytutywne (5.17):

$$(5.13') \quad v_{xj,k}^{n+\frac{1}{2}} = v_{xj,k}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^n}{\Phi_{j,k}^n} \{ y_{j+1,k}^n + \sigma_{xxj,k}^n (y_{j+1,k}^n - y_{j,k+1}^n) + \sigma_{xxj-1,k}^n (y_{j,k+1}^n - y_{j-1,k}^n) + \sigma_{xxj-1,k-1}^n (y_{j-1,k}^n - y_{j,k-1}^n) \} \times$$

$$\times \sigma_{xxj,k-1}^n (y_{j,k-1}^n - y_{j+1,k}^n) + \frac{\Delta t^n}{\Phi_{j,k}^n} \{ \sigma_{xyj,k}^n (x_{j+1,k}^n - x_{j,k+1}^n) \times$$

$$\times \sigma_{xyj-1,k}^n (x_{j,k+1}^n - x_{j-1,k}^n) + \sigma_{xyj-1,k-1}^n (x_{j-1,k-1}^n - x_{j,k-1}^n) +$$

$$+ \sigma_{xyj,k-1}^n (x_{j,k-1}^n - x_{j+1,k}^n) \} + \frac{1}{4} \Delta t^n \left\{ \sigma_{xyj,k}^n \frac{A_{j,k}^n}{M_{j,k}} + \sigma_{xyj-1,k}^n \frac{A_{j-1,k}^n}{M_{j-1,k}} + \right.$$

$$\left. + \sigma_{xyj-1,k-1}^n \frac{A_{j-1,k-1}^n}{M_{j-1,k-1}} + \sigma_{xyj,k-1}^n \frac{A_{j,k-1}^n}{M_{j,k-1}} \right\},$$

gdzie

$$\Phi_{j,k}^n = \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{A_{j,k}^n}{M_{j,k}} + \frac{A_{j-1,k}^n}{M_{j-1,k}} + \frac{A_{j-1,k-1}^n}{M_{j-1,k-1}} + \frac{A_{j,k-1}^n}{M_{j,k-1}} \right\}$$

oraz

$$(5.17') \quad \sigma_{xxj,k}^{n+1} = \sigma_{xxj,k}^n + (2\mu + \lambda)_{j,k}^{n+1} (\varepsilon_{xxj,k}^{n+1} - \varepsilon_{xxj,k}^n) + \lambda_{j,k}^{n+1} (\varepsilon_{\theta\theta j,k}^{n+1} - \varepsilon_{\theta\theta j,k}^n +$$

$$+ \varepsilon_{yyj,k}^{n+1} - \varepsilon_{yyj,k}^n) + \frac{3}{4} \frac{n}{\Delta t^n} (\varepsilon_{xxj,k}^{n+1} - 2\varepsilon_{xxj,k}^n + \varepsilon_{xxj,k}^{n-1}) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2n}{3At^n} (\varepsilon_{yy}^{n+1} - 2\varepsilon_{yy}^n + \varepsilon_{yy}^{n-1} - 2\varepsilon_{\theta\theta}^n + \varepsilon_{\theta\theta}^{n-1} + \varepsilon_{yy}^{n-1}) - \\
& - \frac{(3\lambda + 2\mu)_{j,k}^{n+1} \alpha_{j,k}^{n+1}}{4} \{ \theta_{j,k}^{n+1} + \theta_{j+1,k}^{n+1} + \theta_{j,k+1}^{n+1} - \theta_{j,k}^n - \theta_{j+1,k}^n - \theta_{j+1,k+1}^n - \theta_{j,k+1}^n \} \times \\
& \quad \times \varepsilon_{xx}^{n+1} [(2\mu + \lambda)_{j,k}^{n+1} - (2\mu + \lambda)_{j,k}^n] + (\varepsilon_{\theta\theta}^{n+1} + \varepsilon_{yy}^{n+1}) (\lambda_{j,k}^{n+1} - \lambda_{j,k}^n) - \\
& - \frac{1}{4} [\theta_{j,k}^{n+1} + \theta_{j+1,k}^{n+1} + \theta_{j+1,k+1}^{n+1} + \theta_{j,k+1}^{n+1}] [(3\lambda + 2\mu)_{j,k}^{n+1} \alpha_{j,k}^{n+1} - (3\lambda + 2\mu)_{j,k}^n \alpha_{j,k}^n] \varepsilon
\end{aligned}$$

Do obliczeń numerycznych przyjęto walec o długości 2,54 m wykonany z uraniu 10 w/o molybdenum, materiału powszechnie stosowanego w konstrukcji reaktorów. Jego własności w temperaturze pokojowej są następujące: $E = 8,20 \cdot 10^4$ MPa, $\alpha = 14,4 \cdot 10^{-6}$ [1/°K], $\nu = 0,37$, $\rho = 1,72 \cdot 10^4$ kg/m³. Ponadto przyjmowano $\eta = 100$ lb_F sec/in², $\sigma_y = 414$ MPa i $\sigma_v = 276$ MPa. Osiowy środek pręta został ogrzany do temperatury maksymalnej 500°C w czasie impulsu trwającego 33 μ s. Średnica pręta jest dostatecznie mała, tak że efekty bezwładności poprzecznej można pominąć. Temperatura zmienia się wzdłuż osi pręta w sposób sinusoidalny i jest extrapolowana do zera w odległości równej 10% długości pręta przed każdym końcem. Obierając początek układu w jednym z końców pręta, rozkład temperatury możemy przedstawić w postaci

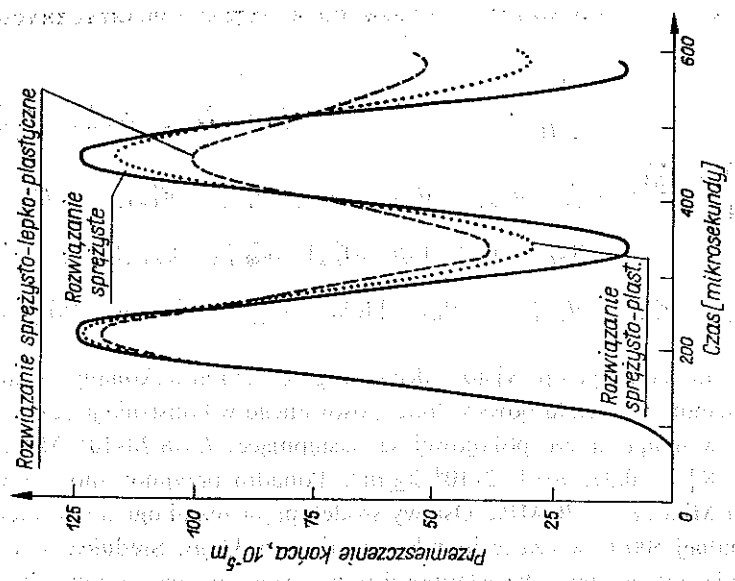
$$F(x) = \sin \pi \left(\frac{X + EXT}{l + 2EXT} \right),$$

gdzie l jest długością pręta, EXT długością przedziału extrapolacji (0,1 l). Zmienność temperatury w czasie jest określona wzorem (5.1). Przyjęto $b = 33$ s i $T_p = 6b$.

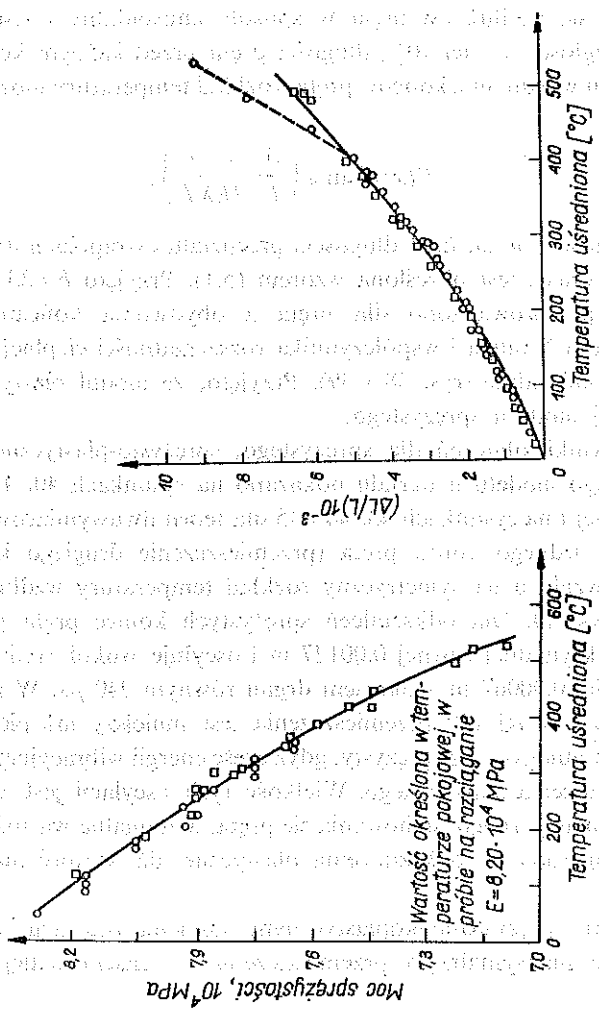
Obliczenia przeprowadzono dla pręta z obydwoioma końcami swobodnymi. Zależność modułu Younga i współczynnika rozszerzalności cieplnej od temperatury określono doświadczalnie (rys. 38 i 39). Przyjęto, że moduł plastyczny jest równy jednej dziesiątej modułu sprężystego.

Niektóre wyniki obliczeń dla sprężystego, sprężysto-plastycznego i sprężysto-lepkoplastycznego modelu materiału pokazano na rysunkach 40, 41 i 42 dla teorii jednowymiarowej i na rysunkach 43, 44 i 45 dla teorii dwuwymiarowej. Dynamiczne przemieszczenie jednego końca pręta (przemieszczenie drugiego końca pręta jest takie same ze względu na symetryczny rozkład temperatury wzdłuż osi pręta) jest pokazany na rys. 40. Dla odkształceń sprężystych koniec pręta przemieszcza się do wartości maksymalnej równej 0,00127 m i oscyluje wokół średniego przemieszczenia o wartości 0,00067 m z okresem drgań równym 240 μ s. W przypadku sprężysto-plastycznym drugi pik przemieszczenia jest mniejszy niż pierwszy, a nawet pierwszy pik jest mniejszy niż sprężysty, gdyż część energii wibracyjnej przekształca się na pracę odkształcenia plastycznego. Wielkość tych oscylacji jest znacznie zmniejszona wskutek plastycznego zachowania się pręta. Minimalna wartość przemieszczenia jest bardziej czuła na odkształcenia plastyczne niż wartość maksymalna bądź średnia.

W przypadku sprężysto-lepkoplastycznym tłumienie oscylacji jest zupełnie wyraźne (wielkość maksymalnego przemieszczenia z czasem maleje). Ewentualnie

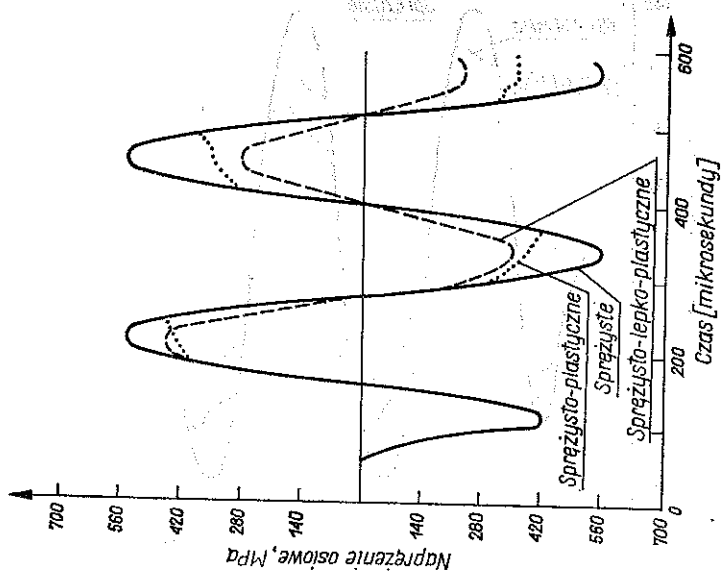


Rys. 40. Dynamiczne przemieszczenie jednego końca pręta, rozwiązanie jednowymiarowe, pręt sprężysto-lepkoplastyczny.

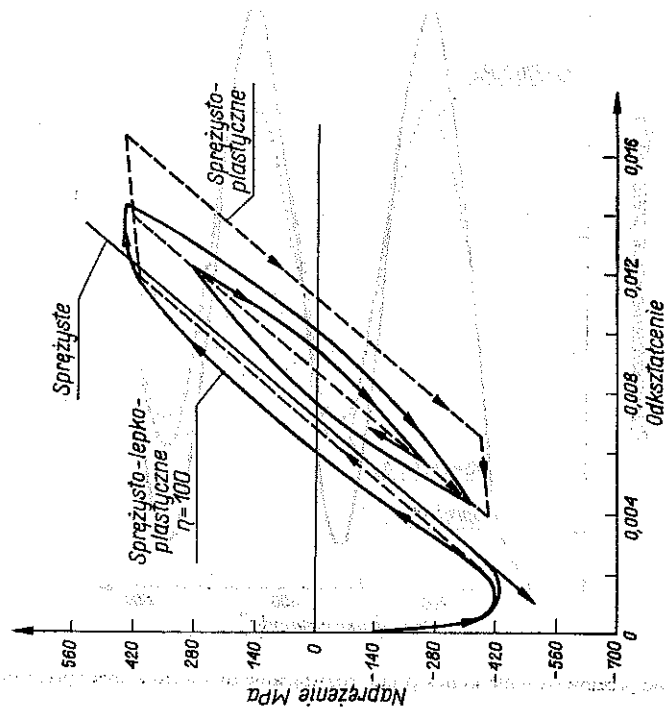


Rys. 38. Zależność modułu Younga od temperatury dla molibdenu U-10 w/o Mo

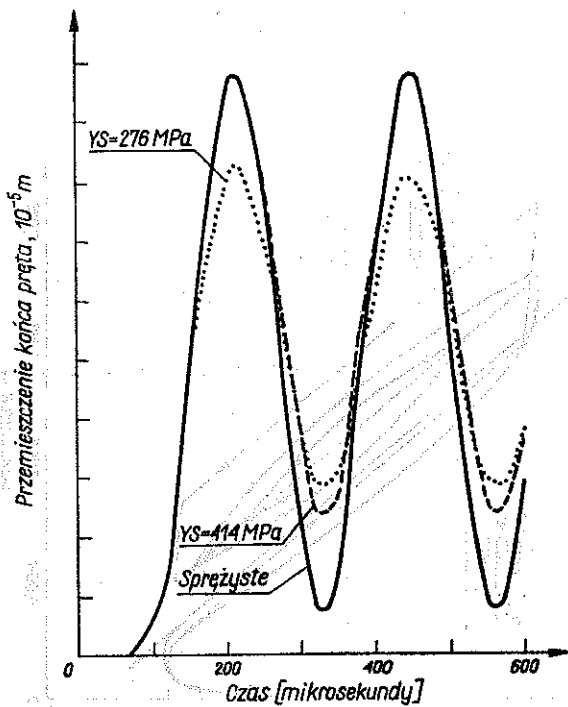
Rys. 39. Zależność współczynnika rozszerzalności cieplnej dla U-10 w/o Mo



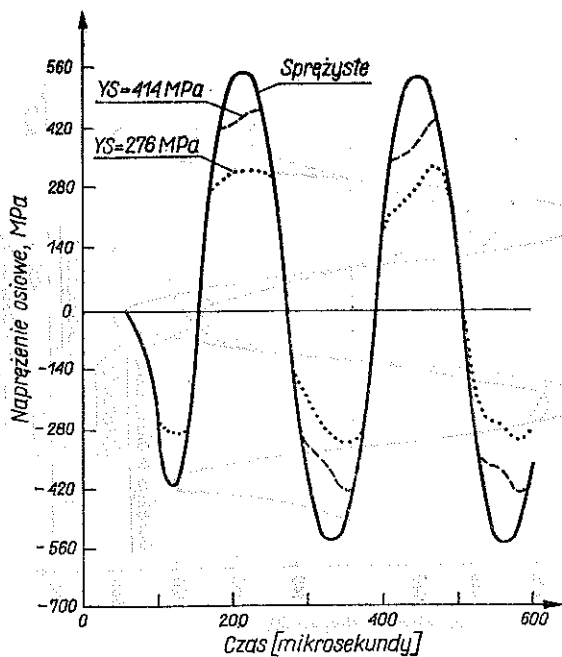
Rys. 41. Napięcie osiowe w połowie rozpiętości pręta wykonanego z molibdenu U-10 w/o Mo rozwiązane jedno-wymiarowe sprężysto-lepkoplastyczne



Rys. 42. Obliczona pętla [napięcie-odkształcenie] dla pręta sprężysto-lepkoplastycznego

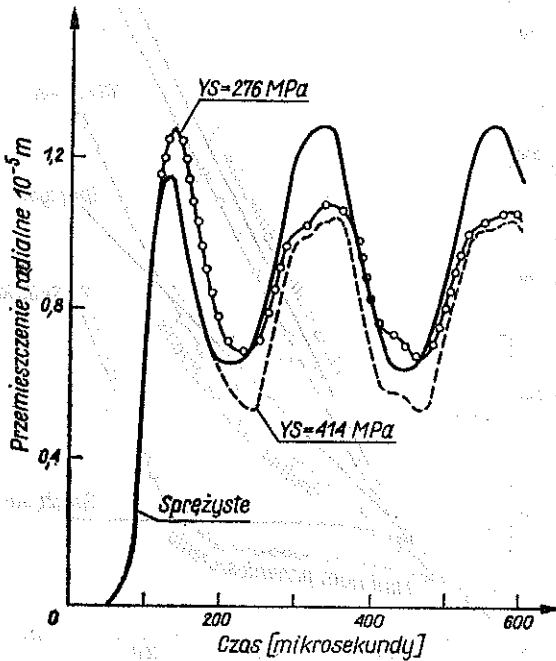


Rys. 43. Dynamiczne przemieszczenie końca pręta, rozwiązanie dwuwymiarowe sprężysto-plastyczne



Rys. 44. Napięcie osiowe w połowie rozpiętości pręta, rozwiązanie dwuwymiarowe sprężysto-plastyczne

oscylacje te znikną zupełnie i pozostanie wartość przemieszczenia będąca średnią wartością przemieszczenia końca pręta. Maksymalną wartość naprężeń osiowych występuje w połowie rozpiętości pręta, a jej zmiany w czasie pokazano na rys. 41. W przypadku sprężystym początkowe naprężenie ściskające osiąga około 412 MPa, gdyż końce pręta nie mogą się przesuwac zbyt gwałtownie wraz ze wzrostem temperatury. Gdy końce pręta osiągną ich maksymalne przemieszczenie w pręcie, pojawi się naprężenie, którego pik wynosi około

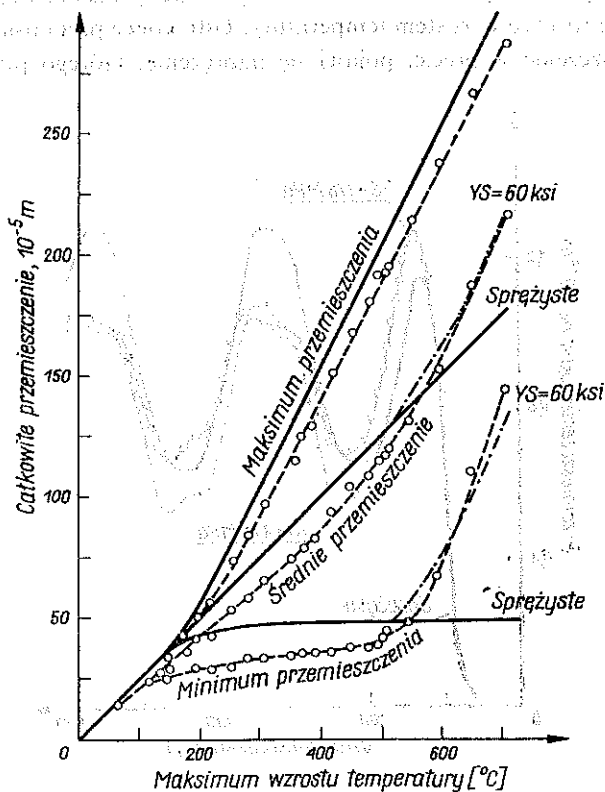


Rys. 45. Przemieszczenie radialne w połowie pręta, rozwiązanie dwuwymiarowe sprężysto-plastyczne

552 MPa. Historia naprężenia w czasie jest znacznie zmodyfikowana przez proces sprężysto-plastyczny. Płynięcie w procesie początkowego ściskania, jak również później w procesie rozciągania — jest wyraźnie widoczne. Efekty lepkie znacznie modyfikują krzywą {naprężenie-czas}, a wielkość oscylacji, podobnie jak poprzednio, maleje aż do zerowych wartości naprężenia. Plastyczne płynięcie i odciążenie pręta w czasie ściskania i rozciągania jest pokazane w sposób jasny na rys. 33 na przykładzie wykresu {naprężenie-odkształcenie}. Strzałki wskazują postępowanie krzywej w czasie od początkowego płynięcia ściskającego do płynięcia rozciągającego, a następnie sprężysto-lepkiego odciążenia. Sprężysto-lepkoplastyczna krzywa {naprężenie-odkształcenie} oscyluje w sposób kołowy wokół krzywej sprężysto-plastycznej spadając ewentualnie do naprężeń zerowych.

Wyniki analizy dwuwymiarowej (rys. 43, 44) są zupełnie podobne do wyników analizy problemu jednowymiarowego (w szczególności wpływ lepkości na rozwiązanie). Analiza jednowymiarowa nie jest w stanie określić efektów w kierunku

promieniowym. Przesunięcie radialne punktu leżącego w połowie rozpiętości pręta jest pokazane na rys. 45. Porównanie wyników liczbowych z danymi doświadczalnymi pokazano na rys. 46. Wykreślono maksymalną, średnią i minimalną wartość przesunięcia końca pręta (średnia wartość z dwóch końców) dla przy-



Rys. 46. Porównanie obliczonego i zmierzonego przesunięcia dla pręta sprężysto-plastycznego

o granicy plastyczności 414 MPa. Osiągnięto dobrą zgodność wyników. Widoczny jest nagły wzrost minimalnej i średniej wartości przesunięcia po przekroczeniu granicy plastyczności, stanowiąc dobry wskaźnik rozwinięcia się deformacji plastycznych.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że dla bardzo dużych czasów numerycznego całkowania wyniki otrzymane według teorii termo-lepkoplastyczności i termo-plastyczności są zbliżone. Potwierdza to otrzymany wcześniej analitycznie wynik W. K. NOWACKIEGO, który badając zagadnienie rozprzestrzeniania się fal w pół-przestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej wywołanych uderzeniami termicznymi na jej brzegu [11] wykazał, że w stanie asymptotycznym efekt dynamiczny zanika, a wyniki zbliżone są do rozwiązań RANIECKIEGO opartych na modelu deformacyjnej teorii plastyczności [12].

5.2. Fale naprężenia wywołane nagłym ogrzaniem i ciśnieniem [52]

Rozważany jest półnieskończony pręt poddany jednoczesnemu nagłemu działaniu ciśnienia i temperatury na jego końcu. Materiał jest sprężysto-lepkoplastyczny, liniowy, z parametrami wewnętrznymi ε^{vp} i β . Własności mechaniczne materiału nie wpływają na pole temperatury. Parametrami wewnętrznymi są odkształcenia niesprężyste ε^{vp} i parametr termiczny β . Ich równania ewolucji mają postać

$$(5.26) \quad \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} = \gamma \left(\frac{|\sigma|}{\kappa_0} - 1 \right) \frac{\sigma}{|\sigma|},$$

$$(5.27) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = b_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \beta,$$

gdzie b_1 jest stałą, a τ oznacza czas relaksacji.

Równania konstytutywne dla naprężenia σ i entropii η przyjęto w postaci

$$(5.28) \quad \sigma = E_0(\varepsilon - \varepsilon^{vp}) - \alpha E_0(\theta - \theta^*),$$

$$(5.29) \quad \eta = \frac{\alpha E_0}{\rho_0}(\varepsilon - \varepsilon^{vp}) + \frac{\alpha E_0 C_v}{\rho_0}(\theta - \theta^*),$$

gdzie θ^* oznacza temperaturę stanu równowagi. Przy tych założeniach rozważany problem opisany równaniami ruchu, ciągłości, związkami konstytutywnymi i prawem zachowania energii przyjmuje postać

$$(5.30) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} E_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} E_0 \frac{\partial \gamma^{vp}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} E_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(5.31) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$(5.32) \quad \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial t} - \gamma \left(\frac{|\sigma|}{\kappa_0} - 1 \right) \frac{\sigma}{|\sigma|} = 0,$$

$$(5.33) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} - b_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{\tau} \beta = 0,$$

$$(5.34) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + q_s \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$

gdzie $q_s = \frac{b_1 k}{C_v \rho_0}$, a k jest współczynnikiem ciepła.

Z równania charakterystycznego dla układu równań (5.30)–(5.34)

$$(5.35) \quad c(c^2 - c_0^2)(c - c_0^2) = 0$$

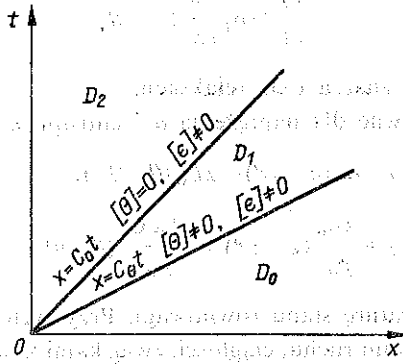
wynika, że w przecie rozprzestrzeniają się dwie fale: najpierw fala termiczna z prędkością $c_0 = \sqrt{\frac{b_1^2 k \tau}{C_v \rho_0}}$, a następnie fala mechaniczna z prędkością $c_\theta = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}$ (przy

założeniu $c_\theta > c_0$, rys. 47). Warunki ciągłości dynamicznej dla układu (5.30)–(5.34) są następujące:

$$(5.36) \quad \alpha \frac{E_0}{\rho_0} [[\theta]] = (c^2 - c_0^2) [[\varepsilon]], \quad [[\beta]] = \frac{c C_0 \rho_0}{b_1 k \tau} [[\theta]],$$

$$[[\sigma]] = \rho c^2 [[\varepsilon]], \quad [[\varphi]] = -c [[\varepsilon]].$$

Wynika z nich, że na fali mechanicznej skok temperatury $[\theta] = 0$. Symbol $[f]$ oznacza skok funkcji przy przejściu przez falę nieciągłości i jest określony następująco: $[f] = f^- - f^+$.



Rys. 47. Płaszczyzna fazowa x, t : fala termiczna $x = c_\theta t$ i mechaniczna $x = c_0 t$, obszar D_0 niezaburzony, D_1 obszar pola termicznego, D_2 obszar pola termicznego i mechanicznego

Warunki początkowo-brzegowe są następujące. W chwili $t = 0$ pręt znajduje się w stanie równowagi. Na końcu pręta $x = 0$ przyłożone są skokowo ciśnienie i temperatura

$$(5.37) \quad \sigma(0, t) = \bar{\sigma}h(t), \quad \vartheta(0, t) = \bar{\theta}h(t).$$

Skok temperatury na pierwszej fali $x = c_0 t$ (z indeksem «1») określony jest równaniem

$$(5.38) \quad \frac{d}{dt} [[\theta]]_1 = -\frac{1}{2\tau} [[\theta]]_2,$$

a skok odkształcenia $[[\varepsilon]]$ na drugiej fali (z indeksem «2») spełnia równanie

$$(5.39) \quad \frac{d}{dt} [[\varepsilon]]_2 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\kappa_0} E_0 [[\varepsilon]]_2.$$

Wykorzystując (5.36) otrzymamy podobne wzory na skoki $[[\varepsilon]]$, $[[\sigma]]$, $[[\varphi]]$.

Warunki początkowe dla równań (5.38), (5.37), tzn.

$$[[\theta]](0) = [[\theta]]_1(0) + [[\theta]]_2(0),$$

$$[[\sigma]](0) = [[\sigma]]_1(0) + [[\sigma]]_2(0),$$

wyznacza się z warunków zgodności (5.36) i warunków brzegowych (5.37)

$$\begin{aligned}
 & [\theta]_1(0) = \bar{\theta}, \quad [\theta]_2(0) = 0, \\
 (5.40) \quad & [\sigma]_1(0) = -\frac{c_0^2 \alpha E_0}{c_\theta^2 - c_0^2} \bar{\theta}, \quad [\sigma]_2(0) = \bar{\sigma} + \frac{\alpha E_0 c_\theta^2}{c_\theta^2 - c_0^2} \bar{\theta}, \\
 & [\varepsilon]_1(0) = -\frac{E_0 \alpha}{\alpha \rho_0 (c_\theta^2 - c_0^2)}, \quad [\varepsilon]_2(0) = \frac{1}{E_0} \left(\bar{\sigma} + \frac{\alpha E_0 c_\theta^2}{c_\theta^2 - c_0^2} \right).
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania (5.38) z warunkiem początkowym (5.40)₁ są funkcje

$$\begin{aligned}
 (5.41) \quad & \theta_1^-(t) = \bar{\theta} e^{-\frac{t}{2\tau}} + \theta^*, \\
 & \varepsilon_1^-(t) = -\frac{E_0 \alpha}{\rho_0 (c_\theta^2 - c_0^2)} \bar{\theta} e^{-\frac{t}{2\tau}} + \varepsilon^*, \\
 & v_1^-(t) = \frac{E_0 \alpha c_\theta}{\rho_0 (c_\theta^2 - c_0^2)} \bar{\theta} e^{-\frac{t}{2\tau}} + v^*.
 \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymuje się rozwiązanie równania (5.39) z warunkiem początkowym $[[\varepsilon]]_2(0)$:

$$\begin{aligned}
 (5.42) \quad & \varepsilon_2^-(t) = \frac{1}{E_0} [[\theta]_2(0)] e^{-\frac{\gamma E_0 t}{2\kappa_0}} + \varepsilon_2^+(t), \\
 & v_2^-(t) = -\frac{1}{\rho_0 c_0} [[\theta]_2(0)] e^{-\frac{\gamma E_0 t}{2\kappa_0}} + v_2^+(t).
 \end{aligned}$$

Równania (5.33) i (5.34) łatwo sprowadzają się do jednego równania różniczkowego drugiego rzędu dla θ typu telegrafijnego:

$$(5.43) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c_\theta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{2c_\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Jego rozwiązanie w obszarze zawartym między prostą $x=0$, na której dane są warunki brzegowe, a prostą $x=c_\theta t$, gdzie określone jest rozwiązanie (5.40)₁, przyjmując postać

$$\begin{aligned}
 (5.44) \quad \theta(x, t) = & \frac{1}{2} \bar{\theta} e^{-\frac{t}{2c_\theta \tau}} + \frac{1}{2} J_0 \left[\frac{1}{2c_\theta \tau} \sqrt{x^2 - c_\theta^2 t^2} (\bar{\theta} + \theta^*) e^{-\frac{t}{2\tau}} \right] + \\
 & + \int_{t-\frac{x}{c_\theta}}^0 \left\{ \bar{\theta} e^{\frac{\omega}{2\tau}} J_0 \sqrt{x^2 - c_\theta^2 (\omega-t)^2} \frac{x}{2\tau c_\theta \sqrt{x^2 - c_\theta^2 (\omega-t)^2}} \right. \\
 & \left. + J_0 \left[\frac{1}{2\tau c_\theta} \sqrt{x^2 - c_\theta^2 (\omega-t)^2} e^{\frac{\omega}{2\tau}} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} (0, \omega) \right] \right\} d\omega + \\
 & + \frac{1}{2\tau} \theta^* e^{-\frac{t}{2\tau}} \int_0^{\frac{1}{2} \left(t + \frac{x}{c_\theta} \right)} e^{\frac{\omega}{2\tau}} J_0 \left[\frac{1}{2\tau c_\theta} (c_\theta \omega - x)^2 - c_\theta^2 (\omega-t)^2 \right] d\omega,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, \omega) = -\frac{\partial}{2\tau c_0} + \frac{1}{2\tau c_0} \theta^{\#} e^{-\frac{\omega}{2\tau}} + \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{\omega}{2\tau}} \bar{\theta} \int_0^{\omega} \frac{\delta J_0 \left[\frac{1}{2\tau c_0} \sqrt{-c_0^2(\delta - \omega)^2} \right]}{\sqrt{-c_0^2(\delta - \omega)^2}} d\delta -$$

$$- \frac{1}{2\tau^2} e^{\frac{\omega}{2\tau}} \theta^{\#} \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\delta J_0' \left[\frac{1}{2\tau c_0} \sqrt{c_0^2 \omega(2\delta - \omega)} \right]}{\sqrt{c_0^2 \omega(2\delta - \omega)}} \delta d\delta$$

oraz gdzie J_0 i J_0' oznaczają odpowiednio funkcję Bessela zerowego rzędu i jej pochodną. Znając rozkład temperatury w każdym punkcie $x > 0$, $t > 0$, można rozwiązać układ równań (5.30)–(5.32), sprowadzając go do jednego niejednorodnego równania telegrafijnego:

$$(5.45) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\kappa_0 \rho_0} \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} = 0.$$

Rozwiązanie tego równania, podobnie jak równania (5.43), konstruuje się za pomocą funkcji Riemanna oddzielnie w obszarach D_1 i D_2 (rys. 47). W obszarach odkształceń sprężystych w równaniu (5.45) przyjmujemy $\gamma = 0$.

W zależności od warunków początkowo-brzegowych wystąpią różne zagadnienia początkowo-brzegowe dla równania (5.45). Przydatne w tym przypadku mogą okazać się wyniki prac [37] i [53]. Na ich podstawie można przewidzieć zachowanie się pręta poddanego działaniu temperatury, powstawanie obszarów odciążenia oraz przeprowadzić analizę zjawisk zachodzących w ośrodku przed dotarciem fal obciążeń mechanicznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. LUBLINER, *A generalized theory of strain-rate dependent plastic wave propagation in bars*, J. Mech. Phys. Sol., **12**, 59–65, 1964.
2. N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North Holland, Amsterdam 1964.
3. L. E. MALVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect*, J. Appl. Mech., **18**, 203, 1951.
4. W. W. SOKOLOWSKI, *Propagation of elastic-viscoplastic waves in rods*, DAN USSR, LX, 5, 1948 (w języku rosyjskim).
5. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 1963.
6. D. T. DAVY, *Waves in nonlinear rate dependent materials*, Report of the University of Iowa, Department of Mechanics and Hydraulics, 1971.
7. J. M. KELLY, *Generalization of some elastic viscoplastic stress strain relations*, Trans. Soc. of Rheology, **11**, 1, 55–76, 1967.
8. P. PERZYNA, *The study of the dynamical behaviour of rate sensitive plastic materials*, AMS, **15**, 113–130, 1963.
9. P. PERZYNA, T. WIERZBICKI, *On temperature dependent and strain-rate sensitive plastic materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., **12**, 4, 1964.
- 9a. P. PERZYNA, T. WIERZBICKI, *Temperature dependent and strain rate sensitive materials*, AMS, **16**, 1, 135–142, 1964.

10. V. N. KUKUDŻANOW, *On wave propagation in a coupled thermoelastic-plastic medium*, Arch. Mech., 29, 2, 325–338, 1977.
11. W. K. NOWACKI, *Thermal shock on the boundary of an elastic-viscoplastic semiinfinite body*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn., 13, 2, 1965.
12. B. RANIECKI, *Thermal shock on the boundary of an elastic-plastic semiinfinite body*, Proc. Vibr. Probl., 15, 4, 1964.
13. A. BALTOV, N. BOGDANOVA, *Shallow viscoplastic cylinder under dynamic load and temperature*, Izv. ITM-BAN, 4, 5–22, 1967.
14. N. BOGDANOVA, A. BALTOV, *Some axisymmetric problems in thermo-viscoplasticity*, Izv. ITM-BAN, 5, 65–94, 1968.
15. D. KOLAROV, A. BALTOV, *Dynamic problems in viscoplastic media with temperature field*, PMM, 15, 6, 1239–1253, 1970.
16. U. K. NIGUL, J. K. ENGELBRECHT, *Nonlinear transient wave processes of deformation in thermoelastic solids*, AN ESSR, Tallin 1972.
17. J. D. CAMPBELL, W. G. FERGUSON, *The temperature and strain-rate dependence of the shear strength of mild steel*, Phil. Mag., 21, 169, 63–82, 1969.
18. M. G. STEVENSON, P. L. B. OXLEY, *An experimental investigation of the influence of strain-rate and temperature on the flow stress properties of a low carbon using a machining test*, Proc. Inst. Mech. Eng., 185, 741–754, 1970–1971.
19. U. S. LINDHOLM, *Review of dynamic testing techniques and material behaviour*, Mechanical properties at high rates of strain, Inst. of Phys. Conf. Ser., 21, 1974.
20. J. HARDING, *The temperature and strain rate sensitivity of titanium*, Arch. Mech., 27, 5–6, 715–732, 1975.
21. M. AFZALI, *Sur la plasticité adiabatique de quelques métaux usuels, Influence de la vitesse de déformation, de la déformation et de la température sur les lois de comportement*, Thèse de docteur-ingénieur, Paris 1977.
22. T. VINH, M. AFZALI, J-C FABRE, *Déformation viscoplastique adiabatique des quelques métaux usuels*, Symp. Franco-Polonais, Kraków 1977, Problemes de Rhéologie, III.
23. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., 9, 1966.
24. J. BEJDA, *Przestrzenne zagadnienia dynamiczne ośrodków niesprężystych*, R. I., 17, 4, 1969.
25. J. BEJDA, *On traveling multidimensional non-elastic waves*, Problèmes de Rhéologie, PWN, Warszawa 1973.
26. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.
27. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale*, WNT, Warszawa 1968.
28. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1968.
29. P. PERZYNA, *Thermodynamic theory of viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., 11, 313–354, Academic Press 1971.
30. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological materials with internal changes*, J. de Mécanique, 10, 391–408, 1971.
31. P. PERZYNA, *Thermodynamic of a unique material structure*, Arch. Mech., 27, 5–6, 791–806, 1975.
32. Y. HORIE, *Longitudinal motion of bars by impact with temperature effects*, TR 69–11, North Carolina State University, 1969.
33. G. I. TAYLOR, H. QUINNEY, *The plastic deformation of metals*, Trans. Roy. Soc., 230, A, 323–362, London 1931.
34. J. E. DORN, S. L. RAJNAK, *Dislocation and plastic waves*, University California, 10627, Berkeley 1963.
35. W. K. NOWACKI, J. ZARKA, *Sur le champ des températures obtenues en thermoélastoviscoplasticité*, Arch. Mech., 26, 4, 701–715, 1974.
36. K. PODOLAK, B. RANIECKI, *A note on the influence of energy dissipation on the propagation of elastic plastic waves*, Arch. Mech., 28, 4, 625–635, 1976.

37. B. RANIECKI, *The influence of dynamical thermal expansions on the propagation of plane elastic plastic stress waves*, Quart Appl. Math., XXIX, 2, 277-290, 1971.
38. P. H. FRANCIS, *Elastoplastic wave propagation in a rate sensitive finite rod having a thermal gradient*, J. Appl. Mech., 37, 2, 315-323, 1970.
39. U. S. LINDHOLM, *Some experiments in dynamic plasticity under combined stress*, Mechanical behaviour of materials under dynamic loads, 77-95, Springer-Verlag, New York 1968.
40. E. E. BURNISTON, T. S. CHANG, *Nonlinear waves in a rate-sensitive elastoplastic material*, Int. J. Engng Sci., 10, 353-367, 1972.
41. G. R. COWPER, P. S. SYMONDS, *Strain hardening and strain effects in the impact loading of cantilever beams*, TR 28, Brown University, 1957.
42. L. E. MALVERN, *Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect*, Quart. Appl. Math., 8, 405, 1951.
43. A. J. A. MORGAN, Q. J. Math., 2, 250, 1952.
44. J. A. REUSCHER, *Coupled kinetic-elasticity calculations of pulsed reactor performance*, Symp. on Dynamics Nuclear Systems, March 23-25, Univ. of Arizona, Tucson, Arizona 1970.
45. T. F. WIMETT, R. H. WHITE, W. R. STRATTON, D. P. WOOD, *Godiva II, An unmoderated pulse irradiation reactor*, Nucl. Sci. Engng., 8, 691-708, 1960.
46. J. A. REUSCHER, *Analysis of internal heating shock effects in reactor fuel components*, Nucl. Eng. and Design, 18, 213-251, North Holland 1972.
47. R. D. RICHTMAYER, K. W. MORTON, *Difference methods for initial value problems*, Interscience Publishers, New York 1967.
48. W. HERMAN, P. HOLZHAUSER, *WONDY: A computer program for calculating problems of motion in one dimension*, Sandia Laboratories Research Report, SC-RR-66-601, February 1967.
49. M. L. WILKINS, *Calculations of elastic-plastic flow*, UCRL-7322, 1969.
50. L. D. BERTHOLF, S. BENSLEY, *TODDY II: A computer program for two-dimensional wave propagation*, Sandia Lab, Research Rep., SC-RR-68-41, 1968.
51. W. HERMAN, M. O. BRIEN, *RAVE 1: A Fortran program for the calculations of two-dimensional wave propagation*, ASRL Report, 1021, 1964.
52. K. SZMIT, *Strong discontinuity waves in a viscoplastic rod subjected to sudden heat and pressure*, Arch. Mech.,
53. W. K. NOWACKI, B. RANIECKI, *Note on the propagation of thermoelastic and thermoviscoelastic (non coupled) waves*, Progress in thermoelasticity, 145-157, PWN, Warszawa 1967.

Резюме

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Подробно рассмотрена задача распространения волн напряжений в конечных пластических стержнях с учетом влияния скорости деформации и температуры. Подобраны интересные с физической точки зрения задачи, на примере которых показаны одновременно разные эффективные методы решения. Рассмотрены нагрузки механического, термического и радиационного типа. Особое внимание уделяется методам наиболее удобным в области динамической пластичности: конечных разностей и характеристик. Показаны эффективные, устойчивые и практически проверенные одно- и двумерные разностные схемы в зависимости от характера краевой задачи. Результаты вычислений представлены обширно на графиках. Приведены также четыре метода, позволяющие получить аналитические решения. Подробно обсуждены самоподобные, стационарные решения, решения с нехарактеристическими скоростями и полученные с помощью функции Грина.

SUMMARY

SOLUTIONS OF WAVE PROPAGATION PROBLEMS IN PLASTIC RODS SENSITIVE TO STRAIN RATE AND TEMPERATURE

The problem of stress wave propagation in finite rods made of plastic materials sensitive to strain-rate and temperature effects is examined in detail. We have chosen the problems interesting from physical point of view to demonstrate at the same time different methods of their solution. Mechanical thermal and radiation types of loading are assumed. An attention is paid to the numerical methods of solution namely to the techniques of finite differences and characteristics for one and two dimensions which appear the most useful methods of solution in dynamic thermo-viscoplasticity. In dependence of the character of the boundary-value problem one or two-dimensional economic effective stable and verified in practice difference schemes were chosen. Numerous diagrams illustrating a theory are presented. Four methods allowing for obtaining the analytical solutions are also demonstrated. The self similarity solution, steady wave solution solution of dissipative waves and solution obtained by means of Green function are discussed in detail.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1977 r.
