

SYSTEMOWE ROZWIĄZYWANIE PŁASKICH PROBLEMÓW KONSOLIDACJI PRZY ZASTOSOWANIU METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

JERZY DOMSKI (KRAKÓW) i JÓZEF WILK (GDAŃSK)

W pracy przedstawiono system programów rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych konsolidacji z uwzględnieniem wpływu temperatury. Mieszany początkowo-brzegowy problem rozwiązano przy optymalnej organizacji obliczeń dla wielu wariantów. Zastosowano metodę różnic skończonych ze szczególnym uwzględnieniem proponowanej przez autorów metody relaksacyjnej. Przykłady numeryczne mają służyć za ilustrację i weryfikację algorytmów.

1. UWAGI WSTĘPNE

Przedmiotem naszych rozważań jest rozwiązywanie pewnych płaskich zagadnień sformułowanych na podstawie klasycznej teorii konsolidacji BIOTA [1] dla porowatego i nasyconego cieczą ośrodka o szkieletcie sprężystym. Tematyka ta była podejmowana przez DERSKIEGO w pracy [2], gdzie sprowadzono mieszany problem brzegowy do określonego typu równań całkowych i w pracy [3], w której podano metody rozwiązań tych problemów w przypadku ogólnym. W pracach [4 i 5] SOBECZYŃSKA stosując transformację Laplace'a wyznaczyła osiadanie konsolidującej półprzestrzeni sprężystej nagle obciążonej (warunek typu Heaviside'a) siłą skupioną oraz obciążeniem równomiernie rozłożonym na paśmie o ograniczonej szerokości. Inne podejście do tych zagadnień reprezentują prace [6 i 7], w których analizowano przypadek konsolidującej półpłaszczyzny sprężystej obciążonej stemplem oraz rozwiązano przykład konsolidującej warstwy sprężystej pod wpływem liniowo zmiennego w czasie, równomiernie rozłożonego obciążenia zewnętrznego.

W wymienionych pracach [6 i 7] zastosowano numeryczną metodę obliczeń przez zastąpienie wszystkich pochodnych w sformułowanych zadaniach przez odpowiednie ilorazy różnicowe. Pozwoliło to sprowadzić problem do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych o wymiarze odpowiadającym ilości węzłów siatki, na którą podzielono obszar całkowania. Przy założeniu, że ośrodek jest izotropowy oraz że krok czasowy jest stały, współczynniki układów równań dla każdego zadania były obliczane odrębnie. Algorytm obliczeń i program na komputer ograniczał się do rozwiązywania szeregu układów równań algebraicznych, przy czym dla kolejnych kroków czasowych modyfikacji ulegały tylko wektory prawych stron tych równań.

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest zaprojektowanie i wdrożenie w pełni zautomatyzowanego systemu programów na komputer, którego eksploatacja pozwala

na zaniechanie wielu ograniczeń wprowadzonych w pracach [6 i 7] oraz na istotne poszerzenie zakresu i powiększenie efektywności rozwiązań rozpatrywanych zagadnień.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

2.1. Układ równań

Rozpatrujemy sformułowany w naprężeniach [8] układ równań różniczkowych cząstkowych konsolidacji:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (RA - 2NR - Q^2) \nabla^2 \nabla^2 F &= 2N(Q + R) \nabla^2 \sigma, \\ (RN + RA - Q^2) \nabla^2 \sigma &= b(2Q + A + N + R) \dot{\sigma} - \frac{b}{2} (Q + R) \nabla^2 \dot{F}, \end{aligned}$$

w którym niewiadomymi są ciśnienie porowe, cieczy oraz naprężenia poziome, pionowe i styczne w szkielecie σ_x , σ_y i τ_{xy} , które w prostokątnym układzie współrzędnych Oxy , reprezentowane są za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego F :

$$(2.2) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

W układzie (2.1)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

jest operatorem Laplace'a, $\dot{\sigma}$ i \dot{F} są pochodnymi σ i F względem czasu. Występują ponadto współczynniki następujące: współczynnik oporności przepływu $b = \frac{1}{k}$ oraz

$$(2.3) \quad \begin{aligned} N &= G \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ A &= \frac{\gamma + f^2 + (1-2f) \left(1 - \frac{\delta}{\chi}\right)}{\delta^2} \frac{2}{3} G, \\ R &= \frac{f^2}{\gamma - \delta - \frac{\chi}{\delta^2}}, \\ Q &= \frac{f \left(1 - f - \frac{\delta}{\chi}\right)}{\gamma + \delta - \frac{\chi}{\delta^2}}. \end{aligned}$$

Prócz tego mamy następujące parametry materiałowe:

k współczynnik przepuszczalności,

χ współczynnik ściśliwości próbki izolowanej,

- δ współczynnik rozszerzalności objętościowej,
 γ współczynnik zawartości cieczy,
 E uogólniony moduł ściśliwości,
 ν współczynnik Poissona,
 f porowatość.

W projektowanym systemie dowolne z wyżej wymienionych parametrów materiałowych możemy rozważać jako funkcje temperatury τ . Temperaturę w poszczególnych punktach ośrodka można wyznaczać z rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego dla przebiegu ustalonego:

$$(2.4) \quad \nabla^2 \tau = 0$$

lub dla stanów nieustalonych

$$(2.5) \quad a \nabla^2 \tau = \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

gdzie a jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, a t określa czas.

2.2. Warunki graniczne

Dla układu równań (2.1) warunki brzegowe formułujemy na konturze obejmującym prostokątną siatkę (rys. 1) o dowolnej liczbie węzłów, na którą dzielimy obszar całkowania. Na górnej części brzegu I+II zakładamy działanie obciążenia równomiernie rozłożonego lub obciążenia stępem sztywnym. Dolna część brzegu IV+V może być traktowana jako ograniczenie «warstwy» lub też, (przy założeniu dostatecznej głębokości) można na nim stawiać warunki tak jak dla półpłaszczyzny.

Boczna część konturu III+V może być traktowana jako ograniczenie typu «warstwy» lub przy ustawieniu jej w odpowiedniej odległości może być traktowana jako nieograniczona część badanego obszaru. Odcinek I+IV stanowi oś symetrii. Tak więc wykorzystane w pracy warunki brzegowe mogą przyjmować postać następujących wzorów:

$$(2.6) \quad \sigma_y = q(t) = \text{const},$$

gdzie $q(t)$ jest równomiernie rozłożonym obciążeniem zewnętrznym;

$$(2.7) \quad \int_0^a \sigma_y dx = \frac{P}{2}, \quad v_{0,j} = \frac{1}{E} \int_0^{B_1} (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy = \text{const},$$

w którym P jest siłą zewnętrzną działającą na stempel, a $v_{0,j}$ jest pionowym przemieszczeniem konturu I+II podczas obciążenia stępem;

$$(2.8) \quad \sigma = 0$$

w przypadku brzegu przepuszczalnego dla cieczy;

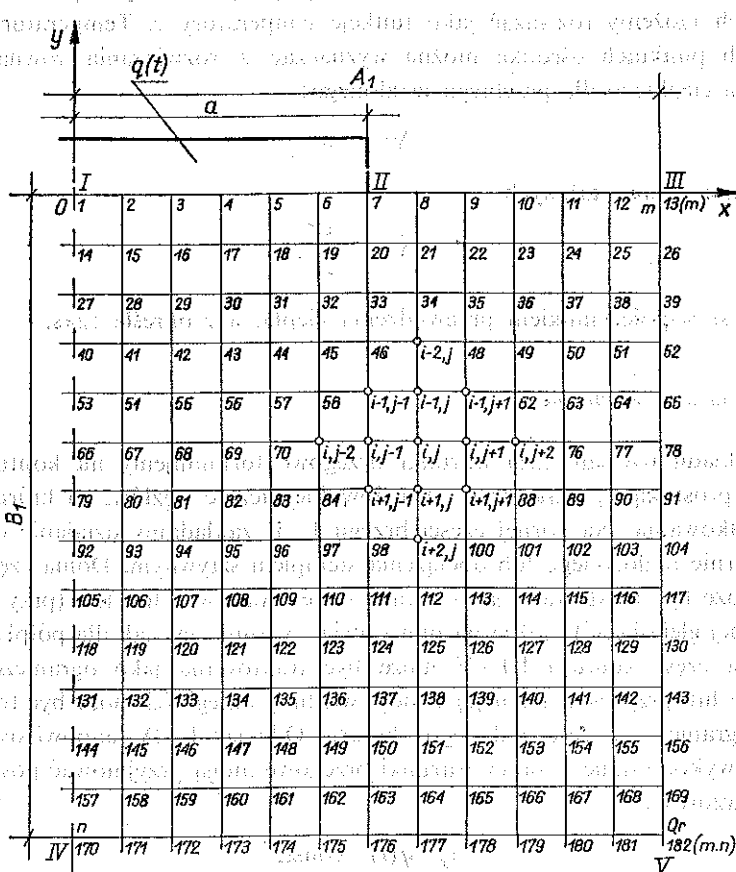
$$(2.9) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$$

w przypadku brzegu nieprzepuszczalnego dla cieczy;

$$(2.10) \quad \sigma_x=0 \quad \text{ i } \quad \sigma_y=0$$

stanowią warunki dla półpłaszczyzny oraz pionowej części konturu III+V;

$$(2.11) \quad \tau_{xy}=0$$



Oś symetrii

Rys. 1.

na części brzegu II—III;

$$(2.12) \quad v_{n,j}=0 \quad \text{ oraz } \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0$$

przedstawiać mogą warunki dla części brzegu IV—V w przypadku w którym stanowi ona ograniczenie warstwy.

Dla układu równań (2.4) przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(2.13) \quad \tau = \tau_w = \text{const}$$

na konturze I—II temperatura;

$$(2.14) \quad \tau = \tau_x = f(t),$$

na konturze II—III, gdzie $f(t)$ jest empirycznie wyznaczoną funkcją określającą średniodobowy rozkład temperatury w okresie jednego roku.

Na konturze III—V wartości brzegowe uzyskujemy na podstawie rozwiązania przypadku jednowymiarowego, a na konturze IV—V przyjmujemy stałe wartości $\tau = \tau_y = \text{const}$.

Rozwiązanie układu równań (2.1) oraz równania (2.5) jest uzależnione od odpowiedniego postawienia warunków początkowych dla czasu wyjściowego t_0 . Dla równania różniczkowego (2.5) początkowy rozkład temperatury możemy otrzymać w wyniku rozwiązania równania (2.4). Dla układu równań konsolidacji przyjmujemy jako stan wyjściowy zerowe wartości funkcji σ i F lub też możemy w ogólnym przypadku uzyskiwać je na podstawie rozwiązań równań różniczkowych filtracji

$$(2.15) \quad \nabla^2 \sigma = 0$$

oraz biharmonicznego równania tarczy sprężystej

$$(2.16) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0.$$

2.3. Projekt systemu

Numeryczne sposoby rozwiązywania skomplikowanych zagadnień konsolidacji pozwalają nam uniknąć szeregu trudności natury matematycznej, na które natykamy przy próbach uzyskiwania rozwiązań ścisłych. Z drugiej jednak strony numeryczne rozwiązanie wybranego przykładu liczbowego nie upoważnia nas w zasadzie do wyciągania bardziej ogólnych wniosków jakościowych. Zwykle konieczne jest wykonanie znacznej liczby obliczeń numerycznych. Algorytm obliczeniowy powinien więc być w pełni zautomatyzowany oraz dostosowany do specyfiki pracy komputera, którego koszty eksploatacyjne utrzymują się ciągle jeszcze na wysokim poziomie. Racjonalne sformułowanie problemu dla komputera powinno uwzględnić zastosowanie rozwiązań systemowych wg z góry założonego projektu. W naszym przypadku, zakładając zastosowanie metody różnic skończonych oraz użycie komputera ODRA-1204, przewidujemy następujący projekt systemu:

1) samoczynne generowanie układów równań algebraicznych wg metody różnic skończonych, przy założeniu niejednorodnych właściwości gruntu i uwzględnieniu wpływu zjawisk towarzyszących (jak np. temperatury);

2) uwzględnienie wszystkich możliwych z punktu widzenia praktyki kombinacji warunków brzegowych przedstawionych w punkcie (2.2);

3) dowolne ustawienie warunków początkowych uzyskiwanych z rozwiązań równań (2.4), (2.15) lub (2.16);

4) dowolny podział siatki geometrycznej (oczka kwadratowe) przez odpowiedni wybór kroku czasowego, przy czym odbywać się to będzie automatycznie i będzie określone przez z góry założony dopuszczalny błąd obliczeń oraz warunek stabilności;

5) trzy warianty zapamiętywania macierzy oraz trzy metody rozwiązywania układów równań algebraicznych;

6) połączenie wszystkich procedur w jeden pakiet programowy; zorganizowanie sprawnego systemu jego eksploatacji.

3. PAKIET PROGRAMOWY

3.1. Zastosowanie metody różnic skończonych

W układzie (2.1) zastępujemy pochodne funkcji σ_i F względem współrzędnych geometrycznych i czasu przez odpowiednie wzory różnicowe (por. [10]) oraz po wprowadzeniu stałych

$$(3.1) \quad \begin{aligned} c_1 &= -\frac{2N(Q+R)Q^2}{RA+2NR-Q^2}, \\ c_2 &= \frac{2(RN+RA-Q^2)\Delta t}{b(Q+R)}, \\ c_3 &= \frac{2(2Q+A+N+R)\Delta^2}{Q+R}, \end{aligned}$$

$$c(\tau)_{i,j} = (F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 4F_{i,j} + F_{i+1,j} - c_3\sigma_{i,j})_{t-1},$$

gdzie i, j są wskaźnikami centralnego węzła trzynastopunktowej siatki (rys. 1), otrzymujemy układ równań różnicowych

$$(3.2) \quad \begin{aligned} R_1 = 20F_{i,j} - 8(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) + \\ + 2(F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1}) + \\ + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} + F_{i-2,j} + F_{i+2,j} + c_1\sigma_{i,j-1} + \\ + c_1\sigma_{i,j+1} - 4c_1\sigma_{i,j} + c_1\sigma_{i-1,j} + c_1\sigma_{i+1,j} = 0, \end{aligned}$$

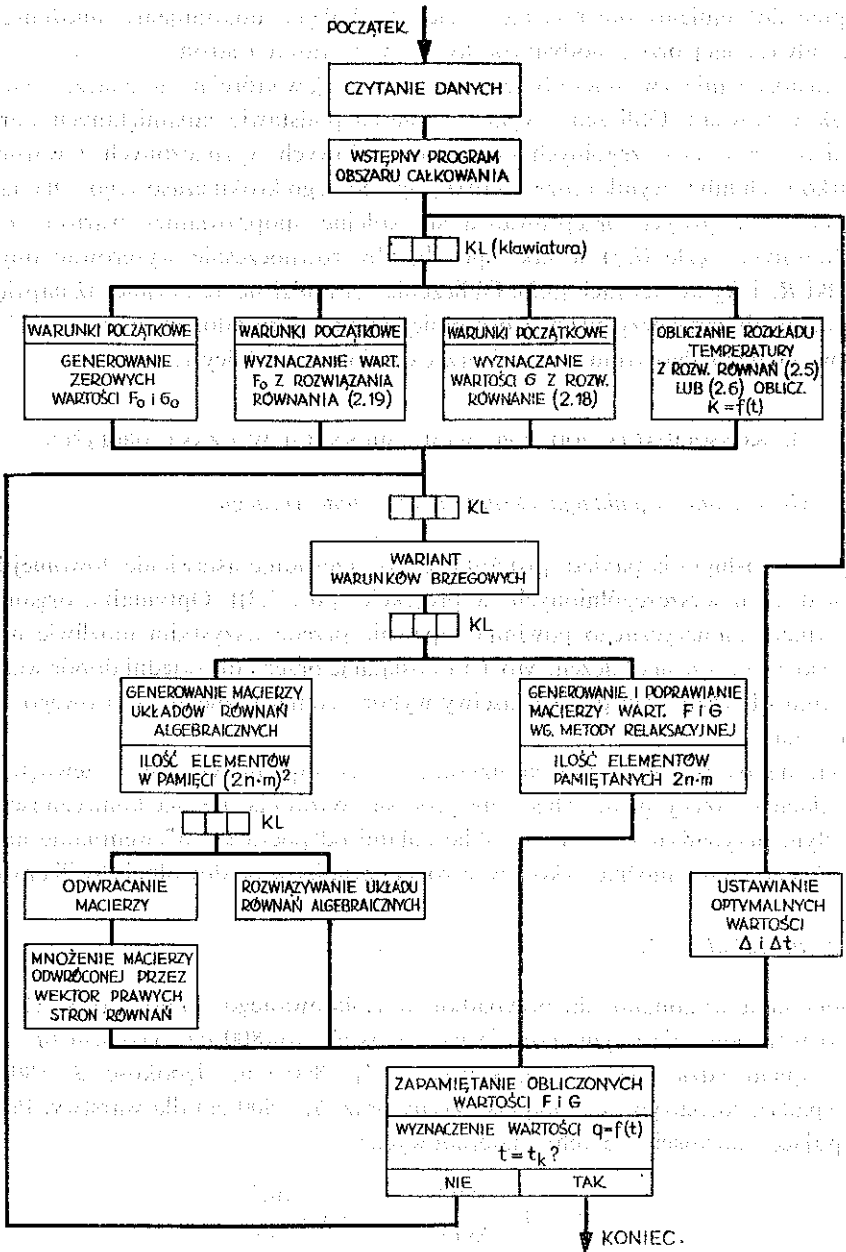
$$R_2 = F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 4F_{i,j} + F_{i-1,j} + F_{i+1,j} + c_2\sigma_{i,j+1} + \\ + c_2\sigma_{i,j-1} - (4c_2 + c_3)\sigma_{i,j} + c_2\sigma_{i-1,j} + c_2\sigma_{i+1,j} - c(\tau)_{i,j} = 0.$$

Analogiczne przekształcenia przeprowadzamy dla równań (2.4), (2.15) oraz (2.16) z tym zastrzeżeniem, że w tym przypadku każdemu węzłowi (i, j) siatki kwadratowej przyporządkowujemy „gwiazdę” pięciopunktową.

3.2. Algorytm obliczeń

Zasadniczą funkcją algorytmu jest automatyczne generowanie i rozwiązywanie układów równań algebraicznych. Przewidziano zastosowanie w pakiecie programowym i wykonanie w zależności od stanu klawiatury na pulpicie operatora, trzech wariantów realizacji tego zagadnienia.

Tablica 1. Schemat blokowy algorytmu



1. Sprowadzenie zadania do rozwiązania dla każdego kroku czasowego Δt układu równań algebraicznych, których ilość jest ustalona przez przyjęcie geometrycznego kroku siatki kwadratowej A , przy czym liczba równań musi odpowiadać podwójnej ilości węzłów siatki, w których obliczamy zmienne σ i F .

2. Przy stałym kroku Δt oraz przy założeniu niezmienności w czasie parametrów gruntu, współczynniki lewej strony układu równań obliczane są tylko jeden raz, następnie dokonujemy odwrócenia macierzy i kolejno dokonujemy mnożenia macierzy odwróconej przez modyfikowany wektor prawych stron.

3. Zastosowanie tzw. «metody relaksacyjnej» [11], w której nie wyznacza się współczynników równań. Obliczenia wykonuje się na podstawie zapamiętanych wartości funkcji σ i F w poszczególnych punktach węzłowych wyznaczonych z warunków początkowych lub w wyniku rozwiązania poprzedniego kroku czasowego. Dla danych warunków brzegowych przeprowadza się kolejne «poprawianie» wartości σ i F w obliczonym węźle (i, j) w taki sposób, aby równocześnie wyzerować obydwie odchyłki R_1 i R_2 we wzorach (3.2). Obliczenia prowadzi się iteracyjnie, aż największa odchyłka w obszarze przyjmie wartość mniejszą od z góry założonego błędu. Schemat blokowy pełnego algorytmu obliczeń przedstawiono na tablicy 1.

4. KONSOLIDACJA POD WPŁYWEM ZMIENNYCH W CZASIE OBCIĄŻEŃ

4.1. Optymalna organizacja eksperymentu numerycznego

System obsługi dla pakietu programowego przewiduje ustawienie dowolnej kombinacji działań wyszczególnionych, w projekcie (por. 2.3)). Optymalna organizacja eksperymentu numerycznego powinna zapewnić przede wszystkim możliwie maksymalne skrócenie czasu obliczeń. Można to osiągnąć przez odpowiedni dobór wariantu algorytmu obliczeń oraz przez właściwy wybór geometrycznego i czasowego kroku całkowania.

Znaczne oszczędności można uzyskać przez zapamiętywanie w zewnętrznych pamięciach maszyny pełnej «historii» procesu. Wówczas nie ma konieczności, aby w każdym przypadku startować z obliczeniami od początku, a ewentualne modyfikacje eksperymentu można wykonywać, rozpoczynając je od dowolnej chwili czasowej.

4.2. Przykład liczbowy

Obliczenia wykonano dla przypadku konsolidowanego podłoża (rys. 1) obciążonego równomiernie i symetrycznie na szerokości $a=800$ cm nasypem ($q=\text{const}$) lub stemplem, gdzie siła $P=2qa$. Szerokość $A_1=800$ cm, głębokość $B_1=800$ cm, w przypadku rozpatrywania półpłaszczyzny oraz $B_1=400$ cm dla warstwy. Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych:

$$k=10^{-4} \frac{\text{cm}^4}{\text{kG s}}, \quad \chi=0,03 \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}},$$

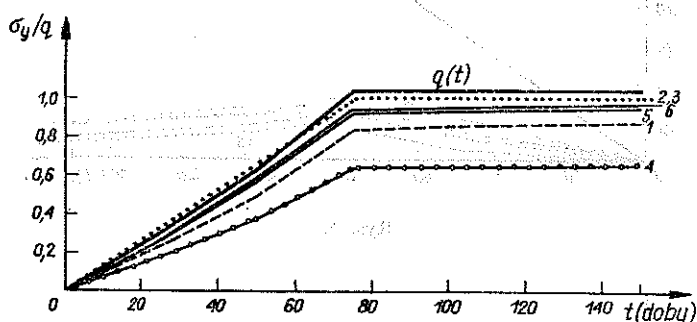
$$\sigma=0,005 \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}}, \quad \gamma=0,01 \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}},$$

$$E=100 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}, \quad \nu=0,3, \quad f=0,35,$$

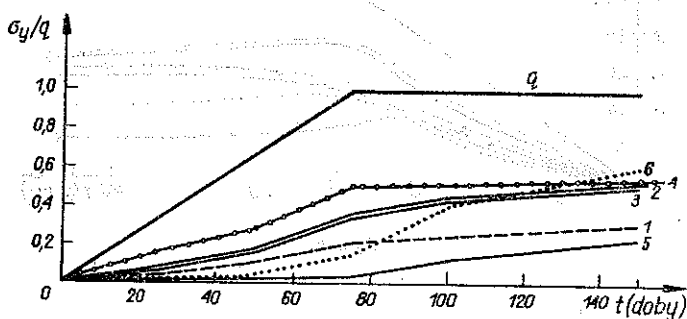
które mogą ulegać pewnym zmianom w procesie obliczeniowym w przypadku uwzględnienia wpływu temperatury wyznaczonej na podstawie równania (2.5) i które wyznaczają c_1 , c_2 i c_3 w równaniach różnicowych (3.2)

$$c_1 = 5,75 \cdot 10^3, \quad c_2 = 3 \cdot 10^3, \quad c_3 = 23,75 \cdot 10^3.$$

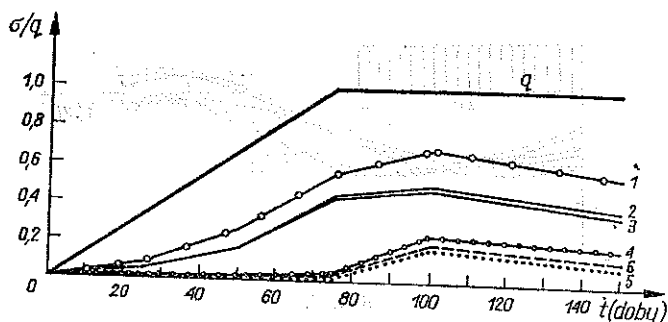
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 2-7. Na wszystkich tych wykresach numery krzywych oznaczają odpowiednio: 1) obciążenie nasypem, półplaszczyz-



Rys. 2.



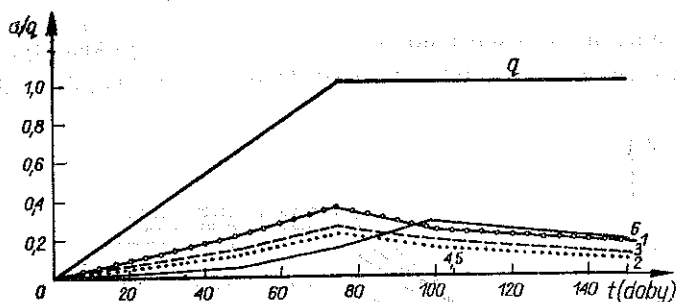
Rys. 3.



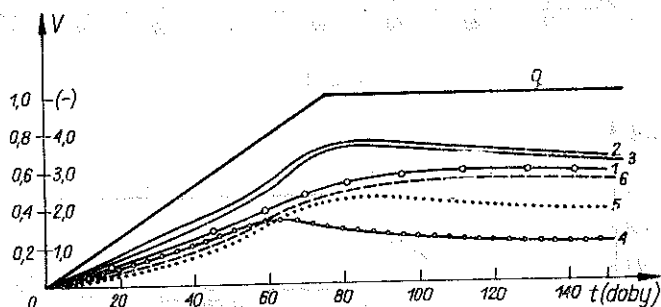
Rys. 4.

na, brzegi przepuszczalne; 2) obciążenie stępem, półplaszczyna, brzegi przepuszczalne; 3) obciążenie stępem, półplaszczyna, dolny brzeg jest nieprzepuszczalny;

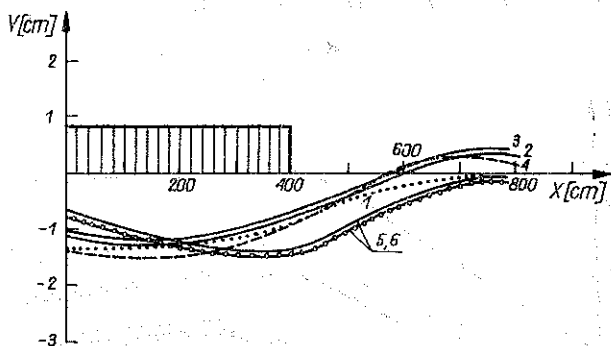
4) obciążenie nasypem, warstwa, brzegi przepuszczalne; 5) obciążenie stępem, warstwa, brzegi przepuszczalne; 6) obciążenie stępem, warstwa, dolny brzeg nieprzepuszczalny.



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.

Przy założonej charakterystyce $q(t)$ rys. 2 i 3 przedstawiają przebieg w czasie wartości naprężeń pionowych σ_v dla 27 i 79 punktu w konsolidowanym podłożu (rys. 1). Rysunki 4 i 5 przedstawiają rozkład w czasie ciśnień porowych cieczy dla punktów podłoża 27 i 29. Na rysunku 6 przedstawiono zależne od czasu osiadanie

punktu 1 podłoża. Rozkład osiadania na głębokości 0,5 m. wzdłuż górnego konturu dla czasu $t=25$ (dni) przedstawia (rys. 7).

Przedstawione rozwiązania liczbowe mają zasadniczo służyć jako testy mechanicznych procedur na elektroniczną maszynę cyfrową.

Zamieszczone na rys. 2-7 wykresy pozwalają ponadto na wyciągnięcie pewnych wniosków dotyczących wpływu sposobu obciążenia ośrodka na przebieg procesu konsolidacji. Charakterystyczne są również różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi dla obciążenia stępem oraz obciążen równomiernie rozłożonych. Widoczny też jest wpływ typu przyjętych warunków brzegowych na ciśnienie porowe cieczy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. H. BIOT, *General theory of three dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12**, 155-164, 1941.
2. W. DERSKI, *O zastosowaniu dualnych równań całkowych w teorii konsolidacji*, III Symp. pośw. reologii, Wrocław 1966.
3. W. DERSKI, *O zagadnieniach teorii konsolidacji*, Arch. Hydrotech., **12**, 1, 1966.
4. Z. SOB CZYŃSKA, *Osiadanie półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem obciążenia skupionego*, Rozpr. Inż., **14**, 3, 1966.
5. Z. SOB CZYŃSKA, *Płaskie zagadnienie teorii konsolidacji*, Arch. Hydrotech., **15**, 1, 1968.
6. J. DOMSKI, G. SZEFER, *Konsolidacja półpłaszczyzny sprężystej obciążonej „stępem”*, Arch. Hydrotechn., **21**, 2, 1974.
7. J. DOMSKI, J. WILK, *Konsolidacja warstwy sprężystej pod wpływem liniowo zmiennego obciążenia zewnętrznego*, Rozpr. Inż., **23**, 4, 1975.
8. W. DERSKI, *Wstęp do matematycznej teorii konsolidacji*, Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, **11**, Mechan., 1964.
9. J. GASZYŃSKI, G. SZEFER, *Consolidation of viscoelastic halfspace under axially symmetrical loading*, Studia Geotechn., 1974, Wrocław 1974.
10. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.
11. D. N. DE G. A. ALLEN, *Relaxation methods*, McGraw Hill, New York 1954.

Резюме

СИСТЕМНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ КОНСОЛИДАЦИИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В работе представлена система программ решения систем дифференциальных уравнений в частных производных консолидации с учетом влияния температуры. Смешанная начально-краевая задача решена оптимально для многих вариантов. Применен метод конечных разностей с особенным учетом предложенного авторами релаксационного метода. Численные примеры служат для иллюстрации и проверки алгоритмов.

SUMMARY

SYSTEM SOLUTIONS OF PLANE PROBLEMS OF CONSOLIDATION BY FINITE DIFFERENCE METHOD

This paper is concerned with the system of programmes of integration of partial differential equations of consolidation with influence of temperature. The mixed initial-boundary value problem is solved optimally for many variants. The finite difference technique with taking into account the method of relaxation proposed by the authors is applied. For a illustration and verification of the algorithms presented the numerical examples were computed.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
i
UNIwersytet GDANSKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1975 r.

0000001

INSTITUT MECHANIKI I WYBORYCH MATERIAŁÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1975 r.