

## PASMO PŁYTOWE Z MATERIAŁU POPRZECZNIE IZOTROPOWEGO W UJĘCIU MECHANIKI CIAŁ Z WIĘZAMI

MARIA MARKS (WARSZAWA)

Rozwiązano zagadnienie pasma płytowego z materiału poprzecznie izotropowego, traktując je jako ciało z więzami, z narzuconymi ograniczeniami na funkcję przemieszczeń. Przyjęto przemieszczenia wg uogólnionej teorii Reissnera. Zbadano wpływ pięciu stałych konstytutywnych, charakteryzujących materiał poprzecznie izotropowy, na siły reakcyjne.

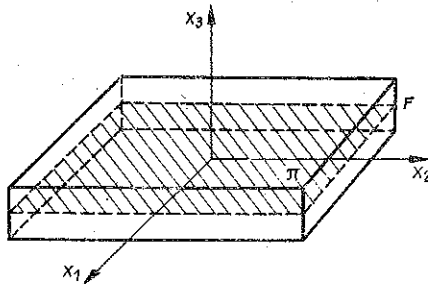
### WSTĘP

Podobnie jak w pracach [2 i 3] zagadnienie pasma płytowego z materiału poprzecznie izotropowego sformułowano jako szczególny przypadek mechaniki ciał z więzami [1, 5 i 6]. Funkcję przemieszczeń przyjęto wg uogólnionej teorii Reissnera. Po rozwiązaniu podstawowego układu równań wyznaczono siły reakcyjne i zbadano ich zależność od pięciu stałych konstytutywnych charakteryzujących materiał poprzecznie izotropowy. Wprowadzono kryterium oceny dokładności rozwiązań na podstawie wielkości sił reakcyjnych oraz wyznaczono obszary zmienności stałych konstytutywnych, w których rozwiązanie jest dokładniejsze niż w materiale izotropowym.

### 1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Pasmo płytowe z materiału poprzecznie izotropowego zajmuje obszar  $\Omega$ , który można przedstawić w postaci  $\Omega = F \times \pi$ , gdzie  $\pi$  jest powierzchnią środkową, a  $F$  przedziałem  $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$  (rys. 1). Założono, że pasmo płytowe podlega przemieszczeniom zgodnym z uogólnioną teorią Reissnera, zatem

$$(1.1) \quad u_m = \psi_m + d_m x_3, \quad m = 1, 2, 3,$$



Rys. 1

przy czym  $\psi_m$  i  $d_m$  są poszukiwanymi funkcjami zaleźnymi od współrzędnych  $x_K \in \pi$ ,  $K=1, 2$  oraz  $x_3 \in F$ . Przy tak przyjętej funkcji przemieszczeń równania równowagi w układzie współrzędnych kartezjańskich są następujące [1, 3, 5 i 6]:

$$(1.2) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK, K} dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m dx_3 + p_m^{(+)} - p_m^{(-)} = 0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK, K} x_3 dx_3 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{m3} dx_3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m x_3 dx_3 + (p_m^{(+)} + p_m^{(-)}) \frac{h}{2} = 0,$$

gdzie

$$p_m^{(+)} = p_m^{(+)}(x_K) \quad \text{przy} \quad x_3 = \frac{h}{2},$$

$$p_m^{(-)} = p_m^{(-)}(x_K) \quad \text{przy} \quad x_3 = -\frac{h}{2}.$$

Na brzegu o normalnej zewnętrznej  $n$  trzeba spełnić warunki brzegowe

$$(1.3) \quad \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK} dx_3 \right) n_K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m dx_3,$$

$$\left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mK} x_3 dx_3 \right) n_K = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m x_3 dx_3.$$

Po określeniu poszukiwanych funkcji  $\psi_m$  i  $d_m$  można wyznaczyć siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe z następujących zależności:

$$(1.4) \quad r_m = -(\rho b_m + \sigma_{mK, K} + \sigma_{m3, 3}) \quad \text{w } \Omega,$$

$$s_m = \sigma_{mK} n_K - p_m \quad \text{przy} \quad F \times \partial\pi,$$

$$s_m = \sigma_{m3} n_3 - p_m \quad \text{przy} \quad \partial F \times \pi.$$

Wyznaczone siły reakcyjne mogą służyć do oceny dokładności rozwiązań. W pracy [2] przedstawiono następującą koncepcję kryterium oceny dokładności rozwiązań. Stopień dokładności rozwiązania uzyskanego za pomocą teorii z więzami określany jest przez średnie i maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń w następujący sposób:

$$(1.5) \quad \eta_{ij} = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega}, \quad \theta_i = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega};$$

$$(1.6) \quad \kappa_{ij} = \frac{\max_{X \in \Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega},$$

$$\rho_i = \frac{\max_{X \in \Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega},$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:  $\sigma_{ij}^{(d)}$  oznacza składową naprężenia wyznaczoną wg klasycznej teorii sprężystości,  $\sigma_{ij}^{(p)}$  składową naprężenia wyznaczoną wg teorii z więzami,  $u_i^{(d)}$  składową przemieszczenia wyznaczoną wg klasycznej teorii sprężystości oraz  $u_i^{(p)}$  składową przemieszczenia wyznaczoną wg teorii z więzami.

W celu oszacowania rozwiązań uzyskiwanych wg teorii z więzami ( $r \neq 0$ ,  $s \neq 0$ ) należy wyznaczyć cztery następujące wielkości:

$$(1.7) \quad \gamma_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{\sigma_0}, \quad \delta_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}}{\sigma_0}, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie

$$(1.8) \quad g_1 = \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} dS_b,$$

$$g_2 = \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} |s_3| d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b,$$

$$f_1 = \beta_1 \sup_{X \in \Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \beta_2 \sup_{X \in \pi \times \partial F} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} + \beta_3 \sup_{X \in F \times \partial \pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2},$$

$$f_2 = \beta_1 \sup_{X \in \Omega} |r_3| + \beta_2 \sup_{X \in \pi \times \partial F} |s_3| + \beta_3 \sup_{X \in F \times \partial \pi} |s_3|.$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:  $S_b = \partial\pi \times F$ ,  $|\Omega|$ ,  $|\pi|$  i  $|S_b|$  oznaczają miary odpowiednich obszarów oraz  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\beta_3$  stałe dodatnie. Wielkości  $\gamma_{\alpha}$  i  $\delta_{\alpha}$  określają stosunki średnich i maksymalnych składowych poziomych i pionowych sił reakcyjnych do maksymalnego wyteżenia płyty  $\sigma_0$ . Znając  $\gamma_{\alpha}$  można na podstawie wzorów

$$(1.9) \quad \eta_{ij} = F_{ij}(\gamma_{\alpha}), \quad \theta_i = G_i(\gamma_{\alpha})$$

określić średnie błędy składowych naprężenia i przemieszczenia uzyskane z rozwiązania wg teorii z więzami. Funkcje  $F_{ij}(\gamma_{\alpha})$  i  $G_i(\gamma_{\alpha})$  można uzyskać na podstawie dostatecznie dużej liczby rozwiązanych przykładów przy założeniu różnych typów więzów i rozwiązań ścisłych. Porównując  $\delta_{\alpha}$  i  $\gamma_{\alpha}$  można ocenić maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń. Duża różnica między  $\delta_{\alpha}$  a  $\gamma_{\alpha}$  oznacza istnienie błędów lokalnych znacznie większych od średnich.

Związki konstytutywne charakteryzujące materiał posiadający płaszczyznę izotropii prostopadłą do osi  $x_3$ , zaczerpnięte z pracy [4], mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu'}{E'} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{E'} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2\mu'} \sigma_{13}, \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2\mu'} \sigma_{23}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

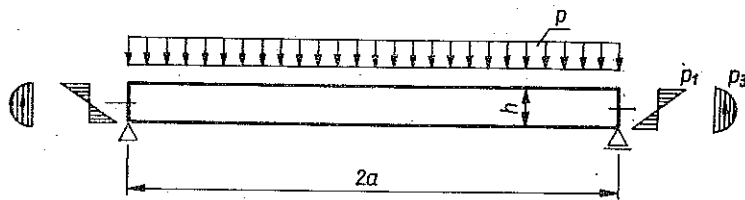
Przez  $E$  i  $E'$  oznaczono współczynniki sprężystości w płaszczyźnie izotropii i w kierunku prostopadłym do niej, przez  $\nu$  współczynnik Poissona charakteryzujący skrócenie w płaszczyźnie izotropii przy rozciąganiu w tej płaszczyźnie, przez  $\nu'$  współczynnik Poissona charakteryzujący skrócenie w płaszczyźnie izotropii przy rozciąganiu w kierunku normalnym do niej, przez  $\mu$ ,  $\mu'$  moduły odkształcenia postaciowego odpowiednio w płaszczyźnie izotropii i w płaszczyznach prostopadłych do niej.

Przyjęto, że pasmo płytowe z materiału poprzecznie izotropowego jest nieskończonej długości w kierunku  $x_2$  oraz że obciążone jest następującymi siłami (rys. 2)

$$\begin{aligned}
 b_m &= 0, \quad \text{w } \Omega, \\
 p_k^{(+)} &= 0, \quad p_3^{(+)} = -p \quad \text{przy } x_3 = \frac{h}{2}, \\
 p_m^{(-)} &= 0 \quad \text{przy } x_3 = -\frac{h}{2};
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \begin{cases} \left( \frac{12M}{h^3} + \frac{3p}{5h} \right) x_3 - \frac{4p}{h^3} x_3^3 & \text{przy } x_1 = a, \\ -\left( \frac{12M}{h^3} + \frac{3p}{5h} \right) x_3 + \frac{4p}{h^3} x_3^3 & \text{przy } x_1 = -a, \end{cases} \\
 p_2 &= 0, \\
 p_3 &= p \frac{a}{h} \left( \frac{3}{2} - 6 \frac{x_3^2}{h^2} \right) \quad \text{przy } x_1 = \pm a,
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

gdzie przez  $M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2\tilde{p}}{h} x_3^2 dx_3$  oznaczono moment zginający przyłożony do krawędzi płyty  $x_1 = a$ .



■ Rys. 2

## 2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Zgodnie z przyjętymi założeniami związki konstytutywne (1.10) względem składowych naprężenia mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \mathcal{A}_1 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right) + \mathcal{A}_3 d_3, \\
 \sigma_{22} &= \mathcal{A}_2 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right) + \mathcal{A}_3 d_3, \\
 \sigma_{33} &= \mathcal{A}_3 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial d_1}{\partial x_1} x_3 \right) + \mathcal{A}_4 d_3, \\
 \sigma_{13} &= \mu' \left( d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial d_3}{\partial x_1} x_3 \right), \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= \frac{E [E' - (v')^2 E]}{(1 + \nu) [(1 - \nu) E' - 2 (v')^2 E]}, \\
 \mathcal{A}_2 &= \frac{E [\nu E' + (v')^2 E]}{(1 + \nu) [(1 - \nu) E' - 2 (v')^2 E]}, \\
 \mathcal{A}_3 &= \frac{\nu' E E'}{(1 - \nu) E' - 2 (v')^2 E}, \\
 \mathcal{A}_4 &= \frac{(1 - \nu) (E')^2}{(1 - \nu) E' - 2 (v')^2 E}.
 \end{aligned}$$

Równania równowagi (1.2) po uwzględnieniu (2.1) sprowadzają się do układu równań

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial d_3}{\partial x_1} &= 0, \\
 \mu' \frac{\partial}{\partial x_1} \left( d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) h - p &= 0, \\
 \mathcal{A}_1 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} - \mu' \left( d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) &= 0, \\
 \mu' \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2} - \mathcal{A}_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \mathcal{A}_4 d_3 - \frac{p}{2} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Całkując obie strony wzoru (2.2)<sub>2</sub> i uwzględniając otrzymany wynik w (2.2)<sub>3</sub> otrzymano równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 d_1}{\partial x_1^2} - \frac{12}{\mathcal{A}_1 h^3} (px_1 + K_1) = 0,$$

z którego wyznaczono

$$d_1 = \frac{2}{\mathcal{A}_1 h^3} (px_1 + 3K_1) x_1^2 + K_2 x_1 + K_3,$$

gdzie  $K_1, K_2, K_3$  są stałymi.

Po podstawieniu  $d_1$  do równania (2.2)<sub>2</sub> i dwukrotnym scałkowaniu otrzymano

$$\psi_3 = -\frac{1}{2\mathcal{A}_1 h^3} (px_1 + 4K_1) x_1^3 + \frac{p}{2\mu' h} x_1^2 - \frac{1}{2} K_2 x_1^2 - K_3 x_1 + \frac{1}{\mu' h} K_1 x_1 + K_4.$$

Całkując zaś obie strony równania (2.2)<sub>1</sub> i podstawiając do (2.2)<sub>4</sub> wyrażenie  $\partial\psi_1/\partial x_1$  otrzymano następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 d_3}{\partial x_1^2} + \frac{12}{\mu' h^2} \left[ \frac{(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_1} \right] d_3 = \frac{12}{\mu' h^2} \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} N_1 + \frac{6p}{\mu' h^2},$$

którego rozwiązanie ma postać

$$d_3 = D_1 e^{\delta x_1} + D_2 e^{-\delta x_1} + \frac{12\mathcal{A}_3 N_1 + 6p\mathcal{A}_1}{12 [(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1]},$$

gdzie

$$\delta = \sqrt{\frac{12 [\mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1 - (\mathcal{A}_3)^2]}{\mu' \mathcal{A}_1 h^2}};$$

symbole  $D_1, D_2, N_1$  oznaczają stałe.

Znając funkcję  $d_3$  można wyznaczyć niewiadomą  $\psi_1$ , która ma postać

$$\psi_1 = -\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \frac{1}{\delta} (D_1 e^{\delta x_1} - D_2 e^{-\delta x_1}) - \frac{\mathcal{A}_3 [12\mathcal{A}_3 N_1 + 6p\mathcal{A}_1]}{12\mathcal{A}_1 [(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1]} x_1 + \frac{N_1}{\mathcal{A}_1} x_1 + N_2.$$

Przemieszczenie  $u_1$  musi być antysymetryczne przy każdym  $x_3 \in (-h/2, h/2)$ , co jest równoważne z antysymetrią funkcji  $\psi_1$  i  $d_1$ . Funkcje  $\psi_1$  i  $d_1$  spełniają ten warunek, jeśli

$$D_1 = D_2, \quad N_2 = 0, \quad K_1 = K_3 = 0.$$

Na powierzchni  $x_1 = a$  o normalnej  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$  oraz na powierzchni  $x_1 = -a$  o normalnej  $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$  powinny być spełnione warunki brzegowe (1.3), przy czym  $\mathbf{p}$  określone jest zależnością (1.12). Warunki te po uwzględnieniu antysymetrii funkcji sprowadzają się do następujących równań:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \left[ \mathcal{A}_1 \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + \mathcal{A}_3 d_3 \right]_{x_1=a} &= 0, \\ \left[ \mu' \left( d_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) h \right]_{x_1=a} &= pa, \\ \left[ \mathcal{A}_1 \frac{h^3}{12} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} \right]_{x_1=a} &= M, \\ \left( \frac{\partial d_3}{\partial x_1} \right)_{x_1=a} &= 0. \end{aligned}$$

Warunek (2.3)<sub>2</sub> spełniony jest tożsamościowo, natomiast z pozostałych warunków wynikają relacje:

$$N_1=0, \quad K_2 = \frac{6}{\mathcal{A}_1 h^3} (2M - pa^2), \quad D_1=0.$$

Po uwzględnieniu wyznaczonych stałych i wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych  $\xi_1 = \frac{x_1}{a}$ ,  $\xi_3 = \frac{x_3}{h}$  składowe przemieszczenia (1.1) mają postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\mathcal{A}_3 pa}{2 [(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1]} \xi_1 + \frac{2}{\mathcal{A}_1} \left[ pa \frac{a}{h} \xi_1^2 + \frac{6M}{h} - 3pa \frac{a}{h} \right] \frac{a}{h} \xi_1 \xi_3, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= \left[ -\frac{pa}{2\mathcal{A}_1} \left( \frac{a}{h} \right)^2 (5 + \xi_1^4 - 6\xi_1^2) - \frac{pa}{2\mu'} (1 - \xi_1^2) + \frac{6M}{\mathcal{A}_1 h} \frac{a}{h} (1 - \xi_1^2) \right] \frac{a}{h} + \\ &\quad + \frac{\mathcal{A}_1}{2 [(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1]} \frac{h}{a} \xi_3, \end{aligned}$$

a składowe stanu naprężenia są następujące:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -6 \left[ p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \frac{2M}{h^2} \right] \xi_3, \\ \sigma_{22} &= \frac{p\mathcal{A}_3 (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)}{2 [(\mathcal{A}_3)^2 - \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1]} - 6 \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} \left[ p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \frac{2M}{h^2} \right] \xi_3, \\ \sigma_{33} &= -\frac{p}{2} - 6 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \frac{2M}{h^2} \right] \xi_3, \\ \sigma_{13} &= p \frac{a}{h} \xi_1, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0. \end{aligned}$$

Siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe występujące na powierzchniach  $\xi_1=1$ ,  $\xi_1=-1$ ,  $\xi_3=\frac{1}{2}$ ,  $\xi_3=-\frac{1}{2}$  wyznaczono ze wzorów (1.4) po uwzględnieniu działających obciążeń (1.11) i (1.12). Zatem siły reakcyjne objętościowe mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{12p}{h} \frac{a}{h} \xi_1 \xi_3, \\ r_2 &= 0, \\ r_3 &= -\frac{1}{h} \left\{ p - 2 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Siły reakcyjne powierzchniowe są następujące:  
na powierzchni  $\xi_1 = 1$

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{3}{5} p \xi_3 + 4p \xi_3^3, \\ s_3 &= -\frac{p}{2} \frac{a}{h} (1 - 12\xi_3^2); \end{aligned}$$

na powierzchni  $\xi_1 = -1$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{5} p \xi_3 - 4p \xi_3^3, \\ s_3 &= -\frac{p}{2} \frac{a}{h} (1 - 12\xi_3^2); \end{aligned}$$

na powierzchni  $\xi_3 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_1 &= p \frac{a}{h} \xi_1, \\ s_3 &= \frac{1}{2} \left\{ p - 2 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}; \end{aligned}$$

na powierzchni  $\xi_3 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_1 &= -p \frac{a}{h} \xi_1, \\ s_3 &= \frac{1}{2} \left\{ p - 2 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 (1 - \xi_1^2) - \tilde{p} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Stosunek  $\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_1$  zależy od stałych materiałowych w następujący sposób:

$$\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} = \frac{E' - (\nu')^2 E}{\nu' (1 + \nu) E'}$$

Na podstawie wzoru (1.8) obliczono wielkości  $f_\alpha$  i  $g_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) przy założeniu że,  $p \neq 0$ ,  $\mathcal{A}_3 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= h \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} |r_1| + \sup_{\mathbf{X} \in \pi \times \partial F} |s_1| + \frac{h}{a} \sup_{\mathbf{X} \in F \times \partial \pi} |s_1| = 7p \frac{a}{h} + 0,2p \frac{h}{a}, \\ f_2 &= h \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} |r_3| + \sup_{\mathbf{X} \in \pi \times \partial F} |s_3| + \frac{h}{a} \sup_{\mathbf{X} \in F \times \partial \pi} |s_3|; \end{aligned}$$



jeżeli

$$p + \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p} > 0,$$

to

$$f_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2} p + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right] & \text{przy } \frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1}{3\mathcal{A}_3} + \frac{2\tilde{p}}{3p}}, \\ \frac{5}{2} p + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p} & \text{przy } \frac{a}{h} < \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1}{3\mathcal{A}_3} + \frac{2\tilde{p}}{3p}}; \end{cases}$$

jeżeli

$$p + \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p} < 0,$$

to

$$f_2 = -\frac{1}{2} p + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right],$$

$$g_1 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_1| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left( \int_{\pi \times \left( \frac{h}{2} \right)} |s_1| d\pi + \int_{\pi \times \left( -\frac{h}{2} \right)} |s_1| d\pi \right) + \\ + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_1| dS_b = 2p \frac{a}{h} + \frac{13}{200} p \frac{h}{a},$$

$$g_2 = \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left( \int_{\pi \times \left( \frac{h}{2} \right)} |s_3| d\pi + \int_{\pi \times \left( -\frac{h}{2} \right)} |s_3| d\pi \right) + \frac{h}{a} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b;$$

jeżeli

$$\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p} > 0,$$

to

$$g_2 = \begin{cases} \frac{(27+4\sqrt{3})}{18} p - \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 2p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right] & \text{przy } \frac{h}{a} > \sqrt{\frac{3}{\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p}}}, \\ -3 \left\{ p - \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( 1 - \frac{\xi_1^2}{3} \right) - \tilde{p} \right] \right\} \xi_1 + \frac{(27+4\sqrt{3})}{18} p - \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \times \\ \times \left[ 2p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right] & \text{przy } 0 < \frac{h}{a} < \sqrt{\frac{3}{\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p}}}, \end{cases}$$

gdzie

$$\xi_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2};$$

jeżeli

$$\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p} < 0,$$

to

$$g_2 = \frac{(-27 + 4\sqrt{3})p}{18} + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[ 2p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p} \right].$$

Jako wytyczenie  $\sigma_0$  przyjęto maksymalne naprężenie  $\sigma_{11}$ , czyli  $\sigma_{11}$  przy  $\xi_1 = 0$  i  $\xi_3 = -\frac{1}{2}$ :

$$\sigma_0 = 3p \left( \frac{a}{h} \right)^2 - \tilde{p}.$$

Wówczas

$$(2.8) \quad \delta_1 = \frac{p \left[ 7 + 0,2 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{h}{a}}{3p - \tilde{p} \left( \frac{h}{a} \right)^2}, \quad \gamma_1 = \frac{p \left[ 2 + \frac{13}{200} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{h}{a}}{3p - \tilde{p} \left( \frac{h}{a} \right)^2}.$$

Jeżeli

$$p + \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p} > 0,$$

to

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{\frac{p}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^2}{3p - \tilde{p} \left( \frac{h}{a} \right)^2} + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} & \text{przy } \frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1}{3\mathcal{A}_3} + \frac{2\tilde{p}}{3p}}, \\ \frac{\frac{5}{2} p \left( \frac{h}{a} \right)^2 + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p}}{3p - \tilde{p} \left( \frac{h}{a} \right)^2} & \text{przy } \frac{a}{h} < \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1}{3\mathcal{A}_3} + \frac{2\tilde{p}}{3p}}; \end{cases}$$

jeżeli

$$p + \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \tilde{p} < 0,$$

to

$$\delta_2 = \frac{-\frac{p}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2} + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1},$$

jeżeli

$$\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p} > 0,$$

to

$$\gamma_2 = \left\{ \frac{\frac{(27+4\sqrt{3})p}{18} \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right. \\ \left. - 3 \left\{ \frac{p \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{2\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[3p \left(1 - \frac{1}{3} \xi_1^2\right) - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right\} \xi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\frac{27+4\sqrt{3}}{18} p \left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right\}$$

przy  $\frac{h}{a} > \sqrt{\frac{3}{\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p}}}$ ,

przy  $0 < \frac{h}{a} < \sqrt{\frac{3}{\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p}}}$ ;

jeżeli

$$\frac{\mathcal{A}_1}{2\mathcal{A}_3} + \frac{\tilde{p}}{p} < 0,$$

to

$$\gamma_2 = \frac{\frac{(-27+4\sqrt{3})p}{18} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{3\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} \left[2p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]}{3p - \tilde{p} \left(\frac{h}{a}\right)^2}.$$

Jeżeli powierzchnia górna  $\xi_3=1/2$  pasma płytowego jest nieobciążona ( $p=0$ ), a jedynie na brzegach  $\xi_1=\pm 1$  działa obciążenie momentowe, to wielkości  $f_x$  i  $g_x$  określone wzorem (1.8) mają następującą postać:

$$f_1=g_1=0, \quad f_2=g_2=3 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} |\bar{p}|.$$

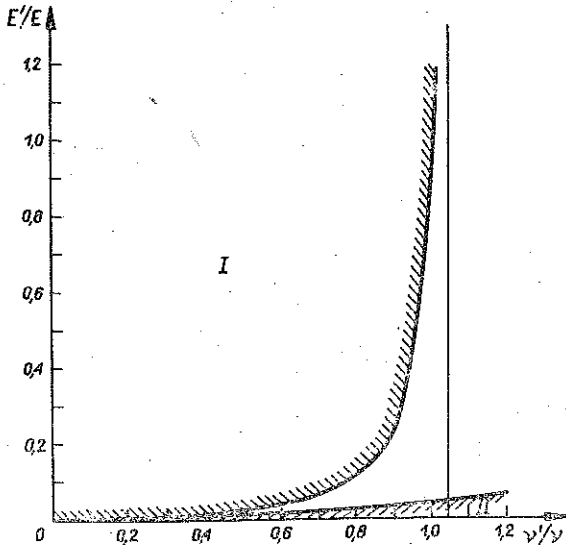
Przy tak przyjętym obciążeniu można tak dobrać stałe materiałowe, że wszystkie siły reakcyjne zarówno objętościowe jak i powierzchniowe znikają. Efekt znikania sił reakcyjnych otrzymujemy w przypadku, gdy  $\nu' \rightarrow 0$  lub  $E' \rightarrow 0$ , bo wtedy  $\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_1 \rightarrow 0$ . Przy tak dobranym obciążeniu stałych materiałowych uzyskane rozwiązanie jest ścisłym rozwiązaniem klasycznej teorii sprężystości.

Siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe określone wzorami (2.6) i (2.7) (z wyjątkiem sił reakcyjnych  $r_3$  i  $s_3$  występujących na powierzchniach  $\xi_3=1/2$  i  $\xi_3=-1/2$ ) pokrywają się z odpowiednimi siłami reakcyjnymi w paśmie płytowym z materiału izotropowego [3]. Różnice występują natomiast w wielkościach  $\delta_2$  i  $\gamma_2$  określonych wzorami (2.8). Można zatem dobrać tak stałe materiałowe  $E'$  i  $\nu'$ , aby w przypadku pasma płytowego z materiału poprzecznie izotropowego  $\delta_2$  i  $\gamma_2$  były mniejsze niż w przypadku pasma z materiału izotropowego. W przykładzie analogicznym do podanego w pracy [3] warunek ten będzie spełniony, jeśli

$$\frac{(1+\nu) \nu' E'}{E' - (\nu')^2 E} - \frac{\nu}{1-\nu} < 0.$$

Z warunku tego wynikają następujące nierówności:

$$\frac{E'}{E} > \frac{\nu^2 \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2}{1 - (1-\nu^2) \frac{\nu'}{\nu}} \quad \text{i} \quad \frac{\nu'}{\nu} < \frac{1}{1-\nu^2}$$



Rys. 3

lub

$$0 \leq \frac{E'}{E} < (\nu')^2.$$

Przyjmując  $\nu=0,2$  [3] wyznaczono obszary I i II (rys. 3), w których spełnione są powyższe nierówności. Zatem w obszarach tych wielkości charakteryzujące średnie i maksymalne wartości pionowych składowych sił reakcyjnych w materiale poprzecznie izotropowym są mniejsze niż w materiale izotropowym.

Dokładniejsze rozwiązania pasma płytowego z materiału poprzecznie izotropowego można uzyskać nie tylko dobierając stałe materiałowe, ale również przyjmując jako funkcję przemieszczeń wyrazy zależne od wyższego stopnia zmiennej pionowej (tak samo jak w pracy [3]).

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. GUTKOWSKI, W. NOWACKI, Cz. WOŹNIAK, *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum 1975.
2. M. MARKS, *Płyty w ujęciu mechaniki ciał z więzami*, Rozpr. Inżyn., 28, 1, 1980.
3. M. MARKS, *Analiza pasma płytowego jako ciała z więzami*, Arch. Mech. 31, 2, 1979.
4. A. C. T. ЛЕХНИЦКИЙ, *Теория упругости анизотропного тела*, Москва 1950.
5. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of the constrained and discretized material continua*, wykłady w Udine 1973.
6. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, part. I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn., 3, 4, 1973.

#### Резюме

#### ПЛИТОЧНАЯ ПОЛОСА ИЗ ПОПЕРЕЧНО ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА В ПОДХОДЕ МЕХАНИКИ ТЕЛ СО СВЯЗЯМИ

Решена задача плиточной полосы из поперечно изотропного материала, трактуя ее как тело со связями, с ограничениями наложенными на функцию перемещений. Перемещения приняты согласно обобщенной теории Рейсснера. Исследовано влияние пяти определяющих постоянных, характеризующих поперечно изотропный материал, на силы реакции.

#### SUMMARY

#### PLATE STRIP MADE OF TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIAL IN THE APPROACH OF MECHANICS OF BODIES WITH CONSTRAINTS

The problem of a plate strip made of transversely isotropic material is solved, the plate being treated as a body with constraints imposed upon the displacement functions. The displacements are assumed according to the generalized Reissner theory. The influence of the five constitutive constants characterizing transversely isotropic materials on the reactions is analyzed.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 sierpnia 1978 r.