

PROJEKTOWANIE I NOŚNOŚĆ GRANICZNA ELEMENTÓW POŁĄCZEŃ SWORZNIOWYCH

WŁODZIMIERZ Z O W C Z A K (WARSZAWA)

Proponuje się zastosowanie pól statycznie dopuszczalnych o ciągłej niejednorodności do projektowania i oceny nośności granicznej części maszyn. Omówiono budowę kilku takich pól. Przedstawiono możliwości wykorzystania ich przy projektowaniu elementów połączeń sworzniowych i przy ocenie nośności (na przykładzie ogniów łańcuchów). Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniami przy wykorzystaniu pól skokowo niejednorodnych.

WSTĘP

Istnieje szereg prac poświęconych konstruowaniu elementów maszyn i węzłów konstrukcyjnych metodą nośności granicznej (por. np. [1, 2 i 3]). Statycznie dopuszczalne pola naprężeń określające kształt projektowanych elementów są skokowo niejednorodne, tzn. składają się z pewnej liczby obszarów, w których panują jednorodne stany naprężenia.

Niniejsza praca ma uzasadnić celowość rozszerzenia klasy pól statycznie dopuszczalnych, używanych do projektowania przez wprowadzenie nowych pól z ciągłą niejednorodnością stanu naprężenia. Pola tego rodzaju pozwalają w wielu przypadkach na oszczędniejsze zaprojektowanie części maszyny lub konstrukcji, bądź lepsze oszacowanie nośności elementu już istniejącego. Kształty zewnętrzne otrzymane w wyniku projektowania mają mniej załamań, co prowadzi do bardziej równomiernego rozkładu naprężeń.

Poniżej omówiono budowę paru prostych kół o ciągłej niejednorodności i przedstawiono przykłady elementów zaprojektowanych na ich podstawie. W ostatnim punkcie pokazano przykłady szacowania nośności i porównano z rozwiązaniami przy użyciu pól skokowo niejednorodnych.

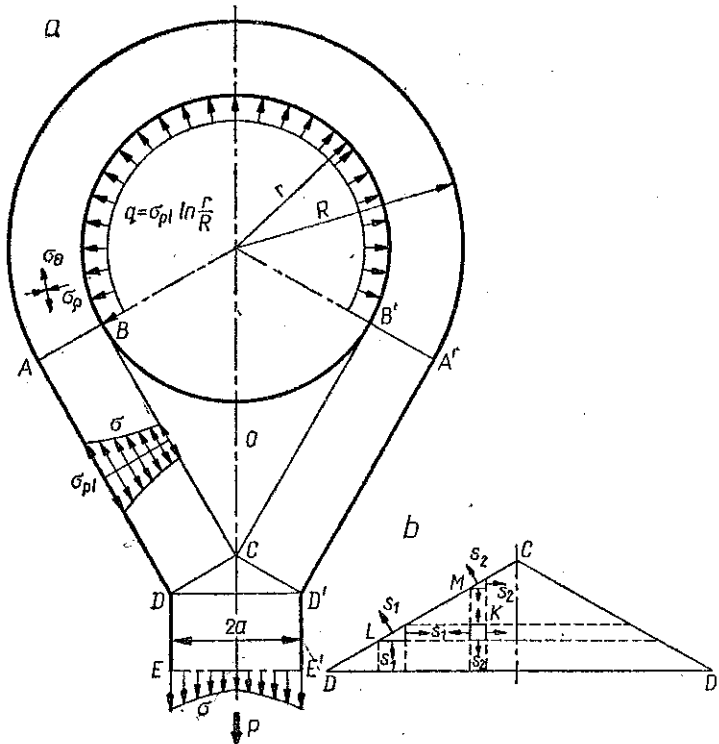
Przyjęto sztywno-idealnie plastyczny model materiału. Założono, że wszystkie elementy znajdują się w płaskim stanie naprężenia oraz że można się oprzeć na warunku plastyczności Treski, tzn. że ciało osiąga stan plastyczny, gdy spełniona jest któraś z następujących równości:

$$|\sigma_1| = \sigma_{pl}, \quad |\sigma_2| = \sigma_{pl} \quad \text{lub} \quad |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_{pl},$$

gdzie σ_1 i σ_2 są naprężeniami głównymi, a σ_{pl} — granicą plastyczności.

1. UCHO POŁĄCZENIA SWORZNIOWEGO

Rozpatrzmy pole statycznie dopuszczalne przedstawione na rys. 1a. Pole określa kształt elementu współpracującego ze sworzniem, obciążonego działającą pionowo w dół siłą P . Siła ta równoważona jest naciskami wywieranymi przez sworzień na brzeg otworu. Naciski rozłożone są równomiernie w strefie przekraczającej połowę obwodu.



Rys. 1

W obszarze $ABB'A'$ panuje osiowosymetryczny stan naprężenia. Naprężenia promieniowe i obwodowe dane są odpowiednio wzorami

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_{pl} \ln \frac{\rho}{R}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_{pl} \left(\ln \frac{\rho}{R} + 1 \right), \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza odległość od środka, a R — promień zewnętrzny. Różnica między naprężeniami jest stała i wynosi

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \sigma_{pl},$$

tak że cały obszar znajduje się w stanie plastycznym. Jest to znane rozwiązanie z wytrzymałości materiałów.

Na brzegu zewnętrznym obszaru dla $\rho=R$ panują naprężenia

$$\sigma_p=0, \quad \sigma_\theta=\sigma_{pl}.$$

Dla $\rho < R$ naprężenia obwodowe są rozciągające, a promieniowe ściskające ($\sigma_\theta > 0$, $\sigma_p < 0$). Naciski wywierane przez sworzeń wyrażają się wzorem

$$q = \sigma_{pl} \ln \frac{r}{R},$$

gdzie r oznacza promień otworu. Aby pole było statycznie dopuszczalne naciski nie mogą przekroczyć granicy plastyczności, czyli

$$q \geq -\sigma_{pl},$$

a stąd

$$r \geq \frac{R}{e}.$$

W dalszym ciągu będziemy omawiać część pola leżącą po lewej stronie osi symetrii. Granica AB obszaru naprężeń osiowo-symetrycznych jest linią nieciągłości. W obszarze $ABCD$ panuje stan niejednorodnego jednoosiowego rozciągania naprężeniami $\sigma = \sigma_\theta$ wzdłuż prostych równoległych do AD . Naprężenia te są największe na brzegu zewnętrznym i jedynie tam materiał jest na granicy plastyczności. Ze wzrostem odległości od AD maleją naprężenia σ tak, że reszta obszaru pozostaje w stanie sztywnym.

Również na linii CD występuje skok w naprężeniach. W punktach granicznych należących do obszaru CDD' panuje dwuosiowe równomierne rozciąganie naprężeniami σ (zmiennymi wzdłuż prostej CD). W całym obszarze CDD' kierunki naprężeń głównych są jednakowe. Naprężenie główne działające w jednym z dwu kierunków jest stałe przy poruszaniu się punktu wzdłuż tego kierunku. Tak więc naprężenia główne w punkcie K (rys. 1b) równe są naprężeniom w punktach L i M leżących na przecięciu odpowiednio prostej równoległej i prostopadłej do osi symetrii z odcinkiem CD . Materiał osiąga stan plastyczny jedynie w punktach granicznych leżących na linii DD' . Naprężenia w kierunku poziomym równe są tam σ_{pl} .

Linia DD' jest jednocześnie linią nieciągłości. Poniżej, w paśmie $DD'E'E$, panuje stan jednoosiowego rozciągania naprężeniami σ rozłożonymi analogicznie do rozkładu w obszarach $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

Jak z powyższego wynika, materiał w obszarze dolnej części pola, poza punktami leżącymi na liniach AD ($A'D'$), DD' i DE ($D'E'$), jest w stanie sztywnym. Można stąd wnosić, że jego nośność nie jest w pełni wykorzystana.

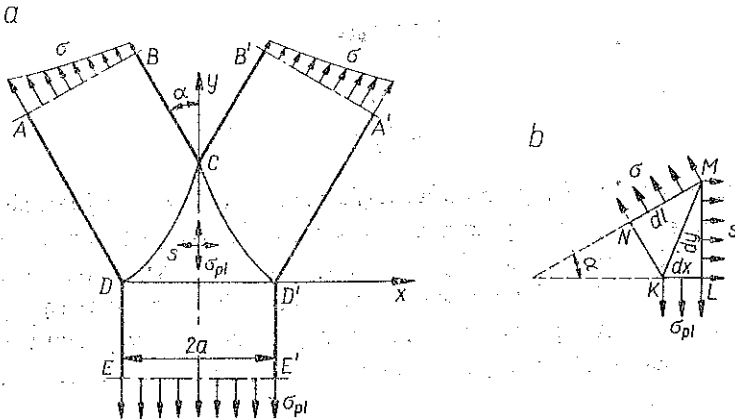
Konstrukcja dolnej części pola przeprowadzona w taki sposób, aby cały obszar był uplastyczniony, a element został ukształtowany oszczędniej, jest zadaniem złożonym rachunkowo. W następnym punkcie omówimy budowę prostszej pola, które, zastępując pole CDD' na rys. 1, umożliwi przenoszenie przez pasmo rozciągane $DD'E'E$ naprężeń równych σ_{pl} i dzięki temu zmniejszenie jego szerokości $2a$.

2. POLE ŁĄCZĄCE PASMA NIEJEDNORODNIE ROZCIĄGANE

Dane są dwa pasma $ABCD$ i $A'B'C'D'$ (rys. 2a) symetryczne względem osi pionowej i tworzące z nią kąt α . Obciążone są naprężeniami rozciągającymi σ działającymi wzdłuż prostych równoległych do brzegów AD i $A'D'$. Naprężenia te są zmienne

$$\sigma = \sigma(l),$$

gdzie l jest parametrem (o wymiarze długości) określającym położenie punktu na przekroju pasma.



Rys. 2

Załóżmy, że w obszarze CDD' panuje dwuosiowe nierównomierne rozciąganie. Naprężenia działające w kierunku osi y równe są granicy plastyczności σ_{pl} , naprężenia zaś s w kierunku osi x są zmienne i zależne od odległości punktu od linii DD' . Brzegi obszaru CDD' są liniami nieciągłości. Poniżej linii DD' rozciąga się obszar jednoosiowego rozciągania naprężeniami σ_{pl} . Szerokość $2a$ tego obszaru obliczyć można z warunku równowagi globalnej.

Rozważmy element $KLMN$ (rys. 2b) leżący na linii CD i wycięty w ten sposób, aby na jego brzegach działały jedynie naprężenia normalne. Długości boków KL , LM i MN wynoszą odpowiednio dx , dy i dl . Wielkości te związane są ze sobą wzorem

$$dx \cos \alpha + dy \sin \alpha = dl.$$

Równania równowagi elementu są następujące:

$$\sigma dl \sin \alpha = s dy, \quad \sigma dl \cos \alpha = \sigma_{pl} dx.$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dl} = \frac{\sigma}{\sigma_{pl}} \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{\sigma_{pl} - \sigma \cos^2 \alpha}{\sigma_{pl} \sin \alpha}, \quad s = \frac{\sigma \sin^2 \alpha}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_{pl}} \cos^2 \alpha}.$$

Dla danego rozkładu naprężeń $\sigma = \sigma(l)$ w paśmie $ABCD$ rozwiązanie (analityczne bądź numeryczne) któregoś z pierwszych dwu równań pozwala określić przebieg krzywej CD , a wzór (2.1)₃ — rozkład naprężeń s .

Przykładowo dla σ z omawianego w punkcie 1 przykładu:

$$\sigma = \sigma_{pl} \left(\ln \frac{l}{R} + 1 \right),$$

mamy

$$x(l) = l \left(\ln \frac{l}{R} \right) \cos \alpha + a$$

oraz

$$s = \sigma_{pl} \frac{\left(\ln \frac{l}{R} + 1 \right) \sin^2 \alpha}{1 - \left(\ln \frac{l}{R} + 1 \right) \cos^2 \alpha},$$

gdzie l jest parametrem odpowiadającym promieniowi ρ w obszarze naprężeń osiowo-symetrycznych, $2a$ jest zaś szerokością pasma $DD'E'E$ rozciąganych naprężeniami σ_{pl} .

Można pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in (0, \pi/2)$ i $\sigma \in [0, \sigma_{pl}]$ naprężenie s dane wzorem (2.1)₃ również należy do przedziału $[0, \sigma_{pl}]$. Pole jest więc statycznie dopuszczalne niezależnie od rozkładu σ .

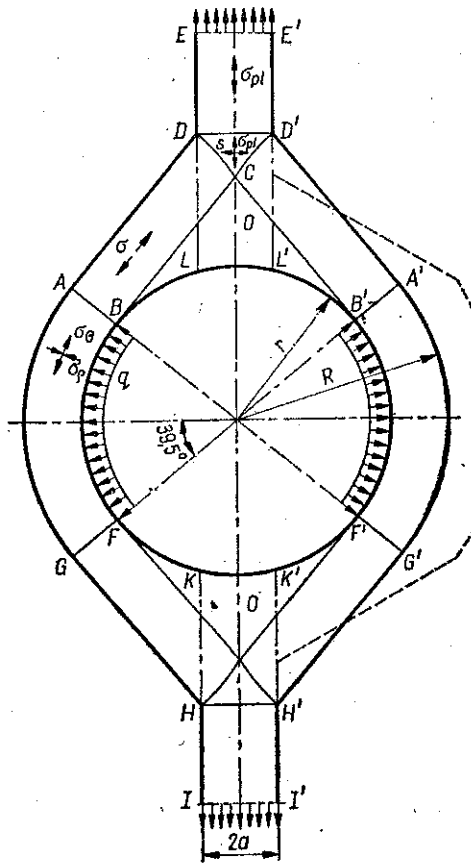
O kształcie zewnętrznym pola na rys. 2a decyduje szerokość i wzajemne położenie pasm rozciąganych. Powyżej podano konstrukcję pola CDD' łączącego te trzy pasma. Jednak z punktu widzenia projektowania zarówno przebieg linii CD jak i rozkład naprężeń s nie mają istotnego znaczenia, dlatego też w praktyce można te obliczenia pomijać.

3. PRZYKŁADY KSZTAŁTOWANIA

Omówione powyżej pole użyte być może przy konstrukcji różnego typu elementów. Można je wykorzystać do oszczędniejszego zaprojektowania ucha z rys. 1.

Inny przykład stanowi pręt rozciągany z otworem (rys. 3). Element ten musi być tak skonstruowany, aby siły rozciągające w pasmach $DEE'D'$ i $HII'H'$ przeniesione zostały na zewnątrz otworu o średnicy $2r$. W otworze znajduje się sztywny trzpień, który może przenosić naciski wywierane przez element rozciągany i pozwala przez to na korzystniejsze ukształtowanie tego elementu.

Pole statycznie dopuszczalne określające projektowany kształt jest symetryczne względem dwóch osi: pionowej i poziomej. Budowa każdej z części tego pola leżących powyżej i poniżej poziomej osi symetrii jest analogiczna do budowy dolnej części pola z rys. 1a. Jedynie pole CDD' na rys. 1a zastąpiono polem, które skonstruowano w poprzednim punkcie. Pasy rozciągane $DEE'D'$ i $HII'H'$ mają szerokość $2a$ i przenoszą naprężenia równe granicy plastyczności σ_{pl} .



Rys. 3

Szerokość stref na brzegu otworu, w których wywierane są naciski, może być wybrana dowolnie. Szerokość ta, określona przez kąt α , decyduje o kształcie i wielkości projektowanego elementu. Można więc postawić zadanie optymalizacyjne polegające na wyborze takiej wartości parametru α , aby zużycie materiału było najmniejsze. Jako kryterium przyjęć można wielkość S pola powierzchni obszaru na zewnątrz linii $DLBFKH$ i $D'L'B'F'K'H'$ określającą ilość materiału potrzebnego na przeniesienie siły rozciągającej na zewnątrz otworu.

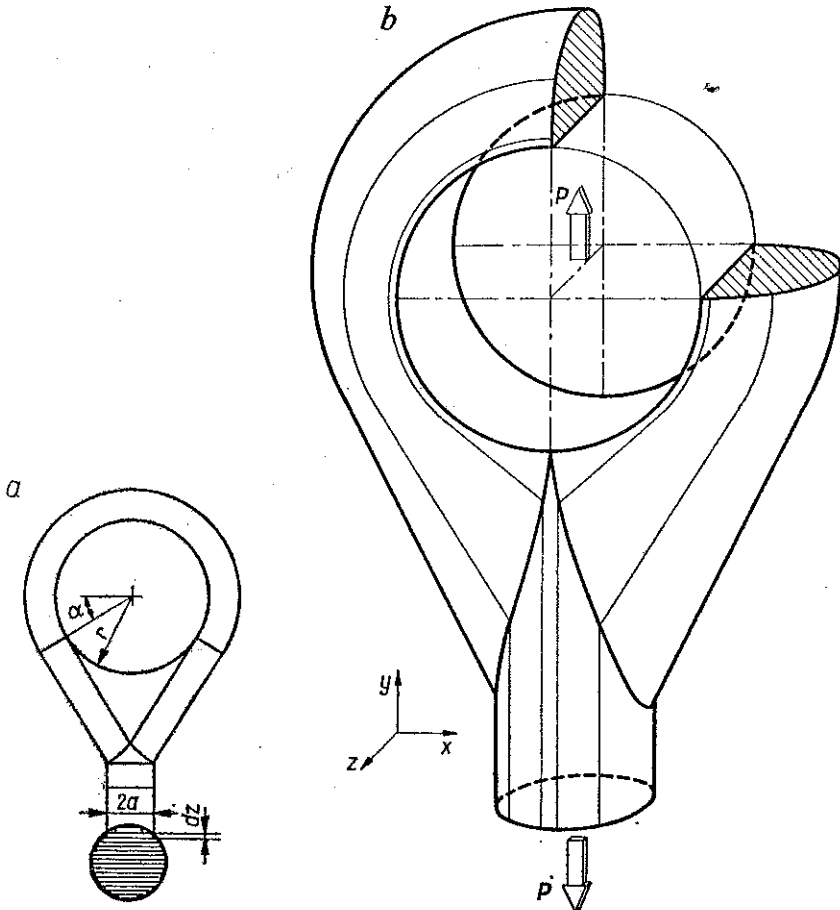
Okazuje się, że optymalna wielkość α nie jest stała i zależy od stosunku a/r podstawowych wymiarów elementu. Stosunek ten wyraża relację pomiędzy siłą rozciągającą a średnicą otworu. Optymalne wielkości kąta α odpowiadające różnym wartościom parametru a/r podane są w poniższej tabelicy 1. Na rys. 3 przedstawiony jest przypadek $a/r=0,25$.

Tablica 1

a/r	0,1	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
α [°]	49,1	39,5	37,5	34,1	31,7	29,7	26,9

Zadanie zaprojektowania pręta rozciąganego z otworem, wewnątrz którego znajduje się sztywny trzpień, zostało poprzednio rozwiązane w monografii [2] przy użyciu skokowo niejednorodnych pól statycznie dopuszczalnych. Zarys otrzymanego w wyniku kształtu podany jest linią przerywaną na rys. 3. Pole S jest w tym przypadku o 44% większe niż dla elementu ukształtowanego przy użyciu pól o ciągłej niejednorodności.

W podobny sposób konstruować można bardziej złożone elementy maszyn. Rozważmy następujące zadanie: dany jest pręt o przekroju okrągłym, poddany sile rozciągającej wywołującej w nim naprężenia σ_{pi} . Należy zaprojektować ucho na końcu pręta, służące do przeniesienia siły na sworzeń.



Rys. 4

Jedno z możliwych rozwiązań pokazane jest na rys. 4. Rozciągany pręt dzielimy równoległymi do jego osi i do siebie nawzajem płaszczyznami na paski o infinitezymalnej grubości. Dla każdego z pasków konstruujemy pole statycznie dopuszczalne, którego zarys pokazano na rys. 4a. Pola te różnią się szerokością $2a$ paska

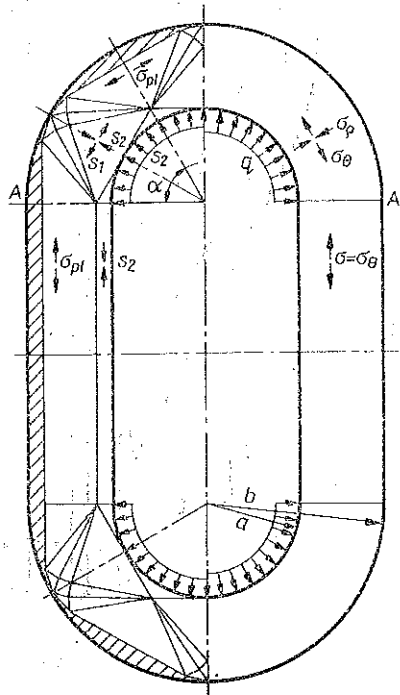
rozciąganego, natomiast promień otworu $2r$ jest dla wszystkich jednakowy. Kąt α określający szerokość strefy obciążonej na brzegu otworu dobieramy optymalnie ze względu na pole powierzchni, jest więc on również zmienny. Całe ucho składa się z szeregu takich warstw «sklejonych» ze sobą płaszczyznami wolnymi od obciążeń (prostopadłymi do osi z : przyjmujemy, że wszystkie warstwy są w płaskim stanie naprężenia). Na rys. 4b pokazany jest widok elementu w perspektywie.

Podobne pole zbudować można również dla innych, bardziej złożonych przekrojów pręta (np. owalnego, dwuteowego).

4. SZACOWANIE NOŚNOŚCI OGNIW ŁAŃCUCHÓW

Przedstawione wyżej niejednorodne pola statycznie dopuszczalne stosować można również do szacowania nośności gotowych elementów konstrukcyjnych. Przykładem służyć może ocena nośności ogniw łańcuchów.

Rozważmy ogniwo o kształcie pokazanym na rys. 5. Obciążone jest ono naciskami wywieranymi przez sworznie, rozłożonymi równomiernie na krzywoliniowych częściach otworu.

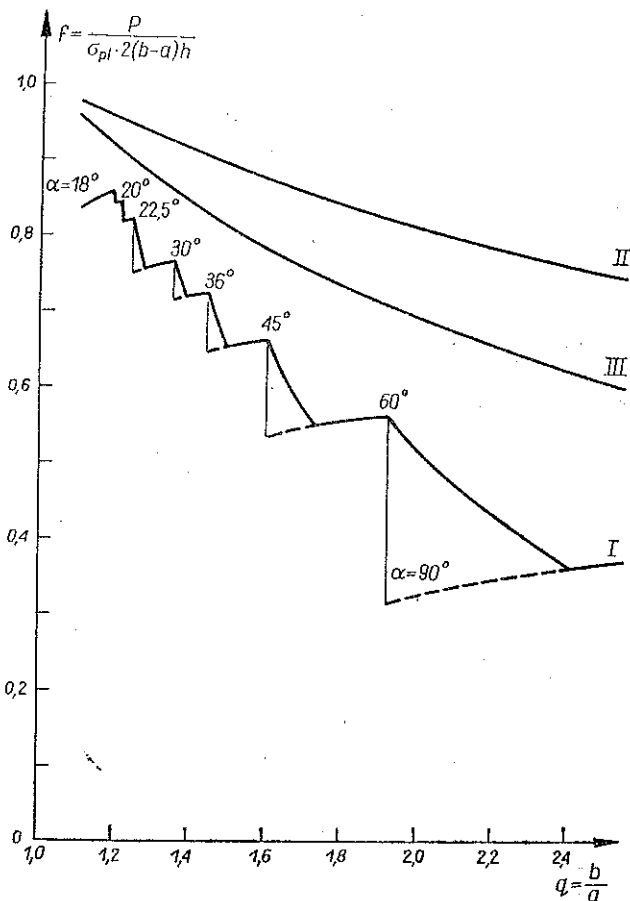


Rys. 5

Skokowo niejednorodne pole naprężeń, służące do oceny nośności tego elementu pokazane zostało z lewej strony rys. 5. Pole to pochodzi z pracy [3] i tam też omówione są szczegóły jego budowy. W zależności od przyjętej wartości kąta α , część pola powyżej osi AA' składać się może z 2, 3 lub większej ilości powtarzających

się elementów (wielokrotność kąta α musi być równa π). Dla każdego α elementy te są statycznie dopuszczalne, jedynie w pewnym zakresie stosunków b/a ich charakterystycznych wymiarów.

Wynikające z przyjętego pola dolne oszacowanie nośności ogniwa dla różnych wartości stosunku b/a przedstawia krzywa I na rys. 6. Dla każdej wielkości b/a wybierano taki kąt α , dla którego oszacowanie to jest najwyższe.



Rys. 6

Dla orientacji pokazano też górną ocenę nośności ogniwa (krzywa II). Obydwie krzywe pochodzą z opracowania [4].

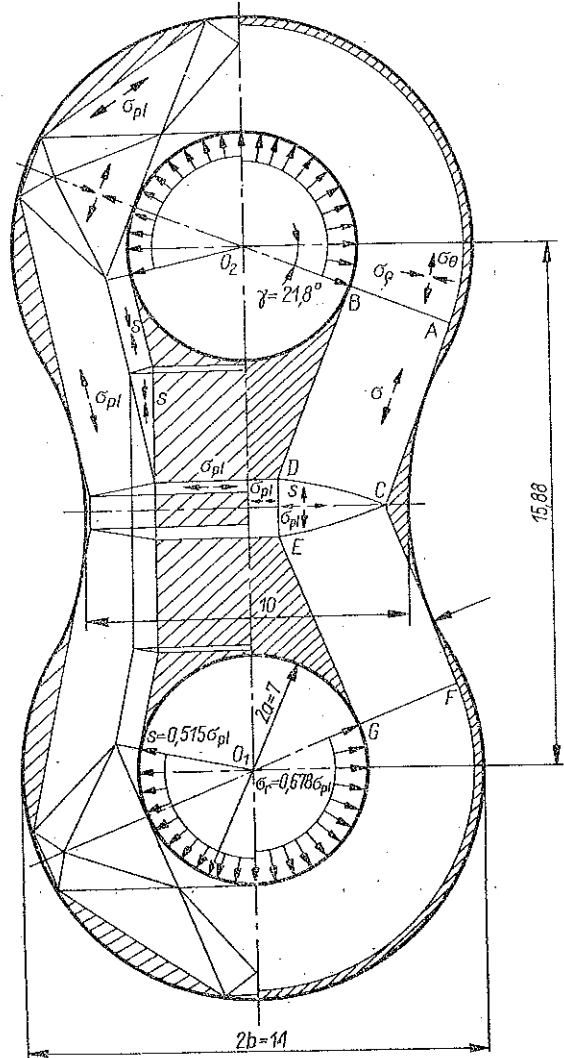
Znacznie lepsze dolne oszacowania uzyskać można przyjmując pole statycznie dopuszczalne pokazane z prawej strony rys. 5. W obszarze powyżej prostej AA' panuje osiowosymetryczny stan naprężenia opisany wzorami (1.1), poniżej zaś tej prostej mamy niejednorodne rozciąganie naprężeniami $\sigma = \sigma_\theta$.

Dolna ocena nośności wyraża się w tym przypadku wzorem

$$P^- = \sigma_{pl} \cdot 2ah \ln \frac{b}{a},$$

gdzie h jest grubością płytki. Na rys. 6 oszacowanie to przedstawia krzywa III. Jak widać, krzywa ta leży znacznie bliżej górnej oceny nośności ogniwa aniżeli oszacowanie I.

Podobne wyniki uzyskać można przy szacowaniu nośności ogniwa o bardziej złożonym kształcie pokazanego na rys. 7 (przyjmujemy, że wymiary jego są stałe).



Rys. 7

Zadanie to rozwiązano wcześniej w monografii [1]. W dany kształt wpisano pole statycznie dopuszczalne widoczne z lewej strony rys. 7. Otrzymane na tej podstawie dolne oszacowanie siły niszczącej wynosi, po podstawieniu wymiarów,

$$(4.1) \quad P^- = 0,5 \cdot 2(b-a) h \sigma_{pl} = 3,5 h \sigma_{pl},$$

(h oznacza grubość płytki).

Górna ocena, wynika z przyjęcia określonego mechanizmu zniszczenia ogniwa, (por. [1]), równa jest

$$P^+ = 0,75 \cdot 2(b-a) h \sigma_{pl} = 5,25 h \sigma_{pl}.$$

Rozważmy teraz pole przedstawione z prawej strony rys. 7. Składa się ono z dwóch pól osiowosymetrycznych połączonych pasmami poddanymi jednoosiowemu niejednorodnemu rozciąganiu naprężeniami $\sigma = \sigma_\theta$. Pasma te nachylone są do osi pionowej pod kątem γ . Celem zrównoważenia przenoszonych przez nie sił rozciągających wprowadzić trzeba w środkowej części ogniwa dodatkowy pas rozciągany poziomo działającymi naprężeniami σ_{pl} . Pole CDE jest typu opisanego w punkcie 2. Podana na rysunki wartość $\gamma = 21,8^\circ$ została dobrana tak, aby zapewnić najwyższą ocenę nośności.

Wynikające z przedstawionego schematu obciążenia dolnego oszacowanie siły niszczącej wynosi

$$P^- = -\sigma_{pl} \cdot 2ah (\cos \alpha) \ln \frac{a}{R} = 4,405 h \sigma_{pl},$$

(gdzie $R = |AO_1| = |FO_2|$); jest więc znacznie bliższe górnej ocenie tej siły niż oszacowanie (4.1).

5. UWAGI KOŃCOWE

Wymienione we wstępie założenie, że rozważane elementy znajdują się w płaskim stanie naprężenia jest ograniczeniem dotyczącym budowy pól. Nie stanowi to ograniczenia w zastosowaniach, gdyż pola statycznie dopuszczalne dla płaskiego stanu naprężenia pozostają takimi również dla płaskiego stanu odkształcenia i dla elementów o skończonej grubości.

W przedstawionych przykładach pola o ciągłej niejednorodności stanu odkształcenia okazały się efektywniejsze od pól skokowo niejednorodnych. Uzyskano lepsze oszacowania, a budowa proponowanych pól jest prostsza od dotychczasowej. Jednak dalsze prace powinny, zdaniem autora, iść w kierunku budowy pól bardziej złożonych (ew. o mniejszym stopniu symetrii), co jeszcze poprawiłoby oszacowania i umożliwiłoby rozszerzenie możliwości zastosowań np. na przypadki, gdy dane obciążenie jest zmienne w sposób ciągły.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. DIETRICH, J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1970.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
3. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *On plastic design of complex machine parts*, Int. J. Mech. Sci., **18**, 365-373, 1976.
4. J. SZLAGOWSKI, *Optymalizacja elementów maszyn i konstrukcji stalowych metodą statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń*, praca naukowo-badawcza dla IPPT PAN, 1974.

Резюме

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРЕДЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ
ЭЛЕМЕНТОВ ШКВОРНЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Предлагается применение статически допустимых полей с непрерывной неоднородностью для проектирования и оценки предельной несущей способности машинных частей. Обсуждено строение нескольких таких полей. Представлены возможности использования их при проектировании элементов шкворневых соединений и при оценке несущей способности (на примере звеньев цепей). Полученные результаты сравнены с решениями при использовании полей скачкообразно неоднородных.

SUMMARY

DESIGN AND LOAD CARRYING CAPACITY OF PIN JOINT ELEMENTS

Application of statically admissible fields with continuous nonhomogeneity is proposed as a tool for designing and estimation of the load carrying capacity of machine parts. Construction of several fields of this kind is discussed. Possibilities of their application to designing the elements of pin joints and estimating their carrying capacity are presented (on the example of chain links). The results are compared with those obtained by means of jump-nonhomogenous fields.

INSTYTUT MECHANIZACJI BUDOWNICTWA, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 września 1979 r.
