

UOGÓLNIONY PRZEPIY W COUETTE'A PŁYNU MIKROPOLARNEGO DRUGIEGO RZĘDU W PŁASKIM KANALE

EDWARD WALICKI i JANUSZ ZACHWIEJA (BYDGOSZCZ)

Przedstawiono rozwiązanie równań opisujących ruch płynu mikropolarnego drugiego rzędu w płaskim, uogólnionym przepływie Couette'a. Dokonano analizy wpływu dodatkowych współczynników lepkości na kształt profili prędkości i mikrorotacji. Wyniki przedstawione zostały w postaci wykresów i tabel.

WSTĘP

Badania nad mechanicznymi i reologicznymi własnościami zawieszin, emulsji, płynnych kryształów a w szczególności krwi oraz płynów fizjologicznych dokonane m.in. przez KLINE'A, ALLENA, DE SILVE [1] i ARIMANA [2] wykazały, że odbiegają one znacznie od własności przewidywanych na podstawie newtonowskiego modelu płynu. Celem usunięcia odkrytych nieścisłości ERINGEN [3] wprowadził dla analizy różnych problemów przepływowych płynów z mikrostrukturą wewnętrzną model płynu mikropolarnego, dyskutując w pracy [4] ograniczenia dla współczynników lepkości.

Od tego czasu przeprowadzono wiele analiz teoretycznych przepływu tych płynów w układach o różnych kształtach. KLINE i SANDBERG [5] badali ustalone przepływy płynów mikropolarnych w prostych kanałach i rurach kołowych, rozpatrując jednocześnie zagadnienie istnienia względnej siły oddziaływania mikrostruktury na otaczający ją ośrodek oraz zjawisko migracji cząstek w strumieniu płynu. Przemieszczanie się cząstek spowodowane jest ich bezwładnością i występuje nawet wtedy, gdy efekt bezwładnościowy wydaje się nieistotny, jak o ma miejsce w przypadku deformacji cząstek. W zaobserwowanym przez SEGRÉ'A i SILBERBERGA [6] tzw. efekcie cylindrycznym cząstki, które były równomiernie rozmieszczone w ośrodku, podczas ustalonego przepływu w rurze o promieniu R wędrowały do położenia równowagi oddalonego o $0,6R$ od osi rury. Osiową migrację i istnienie położenia równowagi zaobserwowali również TAKANO, GOLDSMITH i MASON [7] w przepływie oscylacyjnym w rurze.

Ruch płynu mikropolarnego opisują dwa główne wektory: prędkości liniowej przepływu i mikrorotacji. AHMADI, KOH i GOLDSCHMIDT [8 i 9] dowiedli,

że w niektórych ośrodkach mikropolarnych ruch ten wyznaczają trzy wektory: prędkości przepływu oraz dwóch mikrorotacji. Poza wymienionymi parametrami oraz ogólną teorią AHMADIEGO [10 i 11] przedstawiającą model takiego ośrodka, do chwili obecnej nie ma szczegółowej analizy doświadczalnej, jak również brak jest rozwiązań równań ruchu w przypadku bardziej złożonych przepływów.

Celem pracy jest analiza uogólnionego przepływu Couette'a w płaskim kanale. W dalszych rozważaniach pojęciem zwykłych płynów mikropolarnych określane będą klasyczne płyny Eringena, natomiast ośrodki, w których mikroruch jest opisywany dwoma wektorami rotacji zostaną nazwane za Ahmadim płynami mikropolarnymi drugiego rzędu.

1. RÓWNANIA RUCHU

Równania ruchu nieściśliwego płynu mikropolarnego drugiego rzędu przyjmują postać [10 i 11]:

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \bar{V} = 0,$$

$$(1.2) \quad \rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{f} - \operatorname{grad} p + (\lambda_v + \mu_v) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{V}) + \kappa_v \operatorname{rot} \bar{v} - (\mu_v + \kappa_v) \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{V}),$$

$$(1.3) \quad \rho \left(j \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{d\bar{V}}{dt} \times \bar{i} \right) = \rho \bar{f}_1 - \gamma_v \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{v}) + (\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) \times \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{v}) + \kappa_v \operatorname{rot} \bar{V} - 2\kappa_v \bar{v} - \beta_0 \operatorname{rot} \bar{\mu},$$

$$(1.4) \quad \frac{3}{2} j \rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{f}_2 + 2(\beta_0 - \eta_v) \bar{\mu} + (\gamma_v - \beta_v) \operatorname{rot} \bar{v} + 3 [(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{\mu}) - \alpha_2 \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{\mu})],$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

- \bar{V} wektor prędkości przepływu,
- ρ gęstość,
- p ciśnienie,
- \bar{v} wektor mikrorotacji pierwszego rzędu,
- $\bar{\mu}$ wektor mikrorotacji drugiego rzędu,
- \bar{f} wektor sił masowych jednostkowych,
- \bar{f}_1 wektor jednostkowych momentów masowych pierwszego rzędu,
- \bar{f}_2 wektor jednostkowych momentów masowych drugiego rzędu,
- \bar{i} wektor mikrobezładności,
- j gęstość mikrobezładności,
- λ_v współczynnik lepkości objętościowej,
- κ_v współczynnik lepkości sprzężenia,
- μ_v współczynnik lepkości ścinania,
- $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ współczynnik lepkości obrotowych,
- $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \eta_v$ dodatkowe współczynniki lepkości.

Z równań i wzorów termodynamicznych wynikają następujące ograniczenia dla współczynników lepkości [10]:

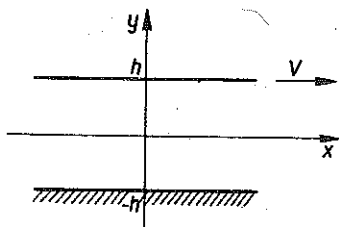
$$(1.5) \quad \begin{aligned} 3\lambda_v + 2\mu_v + \kappa_v &\geq 0, & 2\mu_v + \kappa_v &\geq 0, & \kappa_v &\geq 0, \\ 3\alpha_v + 2\gamma_v &\geq 0, & -\gamma_v &\leq \beta_v \leq \gamma_v, & \gamma_v &\geq 0, \\ 3\alpha_0 + 2\alpha_2 &\geq 0, & -\alpha_2 &\leq \alpha_1 \leq \alpha_2, & \alpha_2 &\geq 0, \\ \eta_v + \beta_0 &\geq 0, & 8\gamma_v(\beta_0 + \eta_v) &\geq (\beta_0 + \gamma_v - \beta_v)^2. \end{aligned}$$

2. KONFIGURACJA PRZEPLYWU

Równania (1.1)–(1.4) zostaną użyte do zbadania przepływu płynu mikropolarnego drugiego rzędu w płaskim kanale (rys. 1).

W przyjętym układzie współrzędnych wektory \bar{V} , \bar{v} , $\bar{\mu}$ mają następujące składowe:

$$(2.1) \quad \bar{V} \approx v_x(y), \quad \bar{v} \approx v_z(y), \quad \bar{\mu} \approx \mu_x(y).$$



Rys. 1

Równania ruchu (1.2)–(1.4) przy pominięciu sił i momentów masowych oraz uwzględnieniu równania (1.1) sprowadzają się do układu następującego:

$$(2.2) \quad -\frac{dp}{dx} + (\mu_v + \kappa_v) \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \kappa_v \frac{dv_z}{dy} = 0,$$

$$(2.3) \quad \gamma_v \frac{d^2 v_z}{dy^2} - \kappa_v \left(\frac{dv_x}{dy} + 2v_z \right) + \beta_0 \frac{d\mu_x}{dy} = 0,$$

$$(2.4) \quad 2(\beta_0 - \eta_v) \mu_x + (\gamma_v - \beta_v) \frac{dv_z}{dy} + 3\alpha_2 \frac{d^2 \mu_x}{dy^2} = 0.$$

Rozwiązania równań (2.2)–(2.4) powinny spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_x &= V \text{ dla } y = h, & v_x &= 0 \text{ dla } y = -h; \\ v_z &= \mu_x = 0 \text{ dla } y = \pm h. \end{aligned}$$

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RUCHU

W wyniku rozwiązania równań (2.2)–(2.4) przy warunkach brzegowych (2.5) otrzymujemy układ funkcji opisujących pole przepływu:

$$(3.1) \quad v_x = -\frac{1}{2\mu_v + \kappa_v} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2) + \frac{\kappa_v}{\mu_v + \kappa_v} \left[\frac{A}{\varphi} (\cos h\varphi h - \cos h\varphi y) + \right.$$

$$(3.1) \quad + \frac{B}{\psi} (\cos h\psi h - \cos h\psi y) \left] + \frac{V}{2} \frac{\kappa_v}{\mu_v + \kappa_v} \left[\frac{C}{\varphi} \sin h\varphi y + \frac{D}{\psi} \sin h\psi y \right] + \right. \\ \left. + 2 (C \cos h\varphi h + D \cos h\psi h) y, \right. \\ \text{[cd.]}$$

$$(3.2) \quad v_z = A \sin h\varphi y + B \sin h\psi y - \frac{1}{2\mu_v + \kappa_v} \frac{dp}{dx} y - \\ - C (\cos h\varphi h - \cos h\psi y) - D (\cos h\psi h - \cos h\psi y),$$

$$(3.3) \quad \mu_x = -\frac{\gamma_v}{\beta_0} \left[\frac{A}{\varphi} (a^2 - \varphi^2) (\cos h\varphi h - \cos h\varphi y) + \frac{B}{\psi} (a^2 - \psi^2) \times \right. \\ \times (\cos h\psi h - \cos h\psi y) + \frac{C}{\varphi} (a^2 - \varphi^2) (\sin h\varphi h - \sin h\varphi y) + \\ \left. + \frac{D}{\psi} (a^2 - \psi^2) (\sin h\psi h - \sin h\psi y) \right],$$

gdzie

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2\mu_v + \kappa_v} \frac{dp}{dx} h - B \sin h\psi h \right)}{\sin h\varphi h}, \\ B = \frac{-\frac{1}{2\mu_v + \kappa_v} \frac{dp}{dx} \left[\psi h (a^2 - \varphi^2) \cos h\varphi h - \frac{d^2 a}{b} \sin h\varphi h \right]}{\varphi (a^2 - \psi^2) \sin h\varphi h \cos h\psi h - \psi (a^2 - \varphi^2) \cos h\varphi h \sin h\psi h}, \\ C = \frac{\frac{V}{4h} \varphi (a^2 - \psi^2) \sin h\psi h}{\varphi (a^2 - \psi^2) \cos h\varphi h \sin h\psi h - \psi (a^2 - \varphi^2) \sin h\varphi h \times \\ \times \cos h\psi h - \frac{1}{2h} \frac{\kappa_v}{\mu_v + \kappa_v} (\varphi^2 - \psi^2) \sin h}, \\ D = -\frac{\frac{V}{4h} \psi (a^2 - \varphi^2) \sin h\varphi h}{\varphi (a^2 - \psi^2) \sin h\psi h \cos h\varphi h - \psi (a^2 - \varphi^2) \sin h\varphi h \times \\ \times \cos h\psi h - \frac{1}{2h} \frac{\kappa_v}{\mu_v + \kappa_v} (\varphi^2 - \psi^2) \sin h\varphi h \sin h\psi h}, \\ \varphi^2 = \frac{1}{2} \{a^2 + b^2 - d^2 + [(a^2 + b^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2]^{\frac{1}{2}}\}, \\ \psi^2 = \frac{1}{2} \{a^2 + b^2 - d^2 - [(a^2 + b^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2]^{\frac{1}{2}}\}, \\ a^2 = \frac{\kappa_v (2\mu_v + \kappa_v)}{\gamma_v (\mu_v + \kappa_v)}, \quad b^2 = \frac{2 (\eta_v - \beta_0)}{3\alpha_2}, \quad d^2 = \frac{\beta_0 (\beta_v - \gamma_v)}{3\alpha_2 \gamma_v}.$$

4. DYSKUSJA WYNIKÓW

W celu rozważenia wpływu wartości współczynników lepkości na kształt profili prędkości i mikrorotacji wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(4.1) \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h},$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_x}{U}, \quad \bar{v}_z = \frac{v_z \cdot h}{U}, \quad \bar{\mu}_x = \frac{\mu_x h^2}{U},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}.$$

Liczby podobieństwa wyrażają odpowiednie stosunki wielkości charakterystycznych dla rozważanego przepływu do stałych materiałowych. Tak więc mamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\rho h U}{\mu} && \text{newtonowska liczba Reynoldsa,} \\ \text{Rem} &= \frac{\rho h U}{\mu_v + \kappa_v} && \text{mikropolarna liczba Reynoldsa,} \\ \text{Rint} &= \frac{\rho h U}{\kappa_v} && \text{liczby Reynoldsa oddziaływania pomiędzy prędkością przepływu i mikrorotacją,} \\ \text{Rw} &= \frac{\rho h^3 U}{\gamma_v} && \text{mikrorotacyjna liczba Reynoldsa,} \\ \left. \begin{aligned} \text{Lp1} &= \frac{3\rho h^3 U}{4(\eta_v - \beta_0)} \\ \text{Lp2} &= \frac{3\rho h^3 U}{2(\gamma_v - \beta_v)} \\ \text{Lp3} &= \frac{\rho h^5 U}{2\alpha_2} \\ \text{LP4} &= \frac{\rho h^3 U}{\beta_0} \end{aligned} \right\} && \text{dodatkowe liczby podobieństwa,} \end{aligned}$$

gdzie U jest pewną charakterystyczną prędkością równą średniej prędkości przepływu płynu newtonowskiego o tej samej liczbie Reynoldsa.

Dla przeanalizowania wpływu warunków Couette'a i Poiseuille'a na przepływ uogólniony wprowadzono wielkości bezwymiarowe α i β pozwalające charakterystyczną prędkość wyrazić w sposób następujący:

$$(4.3) \quad v_{sr} = U = \frac{V}{2\beta}, \quad v_{sr} = U = -\frac{1}{3\mu\alpha} \frac{dp}{dx} h^2,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{dp}{dx} / \left(\frac{dp}{dx} \right)_m, \quad \beta = V/V_m.$$

Zależności te są poprawne wobec przyjęcia stałego wydatku cieczy, co czyni $\alpha + \beta = 1$. Wielkości $\left(\frac{dp}{dx} \right)_m$ i V_m są odpowiednio gradientem ciśnienia w przepływie Poiseuille'a oraz prędkością ścianki kanału w przepływie Couette'a.

Rozwiązania (3.1)–(3.3) w postaci bezwymiarowej mają formę

$$(4.4) \quad \bar{v}_x = \frac{3\alpha}{2} \left\{ 1 - \bar{y}^2 - \frac{\text{Rem}}{\text{Rint}} \left[\frac{\bar{A}}{\bar{\varphi}} (\cos h\bar{\varphi} - \cos h\bar{\varphi}\bar{y}) + \frac{\bar{B}}{\bar{\psi}} (\cos h\bar{\psi} - \cos h\bar{\psi}\bar{y}) \right] \right\} + \beta \left[1 - \frac{\text{Rem}}{\text{Rint}} \left(\frac{\bar{C}}{\bar{\varphi}} \sin h\bar{\varphi}\bar{y} + \frac{\bar{D}}{\bar{\psi}} \sin h\bar{\psi}\bar{y} \right) + 2 (\bar{C} \cos h\bar{\varphi} + \bar{D} \cos h\bar{\psi}) \bar{y} \right],$$

$$(4.5) \quad \bar{v}_z = \frac{3\alpha}{2} [\bar{y} - \bar{A} \sin h\bar{\varphi}\bar{y} - \bar{B} \sin h\bar{\psi}\bar{y}] - \beta [\bar{C} (\cos h\bar{\varphi} - \cos h\bar{\varphi}\bar{y}) + \bar{D} (\cos h\bar{\psi} - \cos h\bar{\psi}\bar{y})],$$

$$(4.6) \quad \bar{\mu}_x = -\frac{3\alpha}{2} \frac{\text{Lp4}}{\text{Rw}} \left[\frac{\bar{A}}{\bar{\varphi}} (\bar{a}^2 - \bar{\varphi}^2) (\cos h\bar{\varphi} - \cos h\bar{\varphi}\bar{y}) + \frac{\bar{B}}{\bar{\psi}} (\bar{a}^2 - \bar{\psi}^2) (\cos \bar{\psi} - \cos h\bar{\psi}\bar{y}) \right] + \beta \frac{\text{Lp4}}{\text{Rw}} \left[\frac{\bar{C}}{\bar{\varphi}} (\bar{a}^2 - \bar{\varphi}^2) \times (\sin h\bar{\varphi} - \sin h\bar{\varphi}\bar{y}) + \frac{\bar{D}}{\bar{\psi}} (\bar{a}^2 - \bar{\psi}^2) (\sin h\bar{\psi} - \sin h\bar{\psi}\bar{y}) \right],$$

gdzie

$$\bar{A} = \frac{A}{h} \frac{dp}{dx}, \quad \bar{B} = \frac{B}{h} \frac{dp}{dx}, \quad \bar{C} = \frac{Ch}{V}, \quad \bar{D} = \frac{Dh}{V},$$

$$\bar{\varphi}^2 = \varphi^2 h^2 = \frac{1}{2} \{ \bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{d}^2 - [(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{d}^2) - 4\bar{a}^2 \bar{b}^2]^{\frac{1}{2}} \},$$

$$(4.7) \quad \bar{\psi}^2 = \psi^2 h^2 = \frac{1}{2} \{ \bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{d}^2 - [(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{d}^2)^2 - 4\bar{a}^2 \bar{b}^2]^{\frac{1}{2}} \},$$

$$\bar{a}^2 = \frac{\text{Rw}}{\text{Rint}} \left(2 - \frac{\text{Rem}}{\text{Rint}} \right), \quad \bar{b}^2 = \frac{\text{Lp3}}{\text{Lp1}}, \quad \bar{d}^2 = \frac{\text{Rw Lp3}}{\text{Lp2 Lp4}}.$$

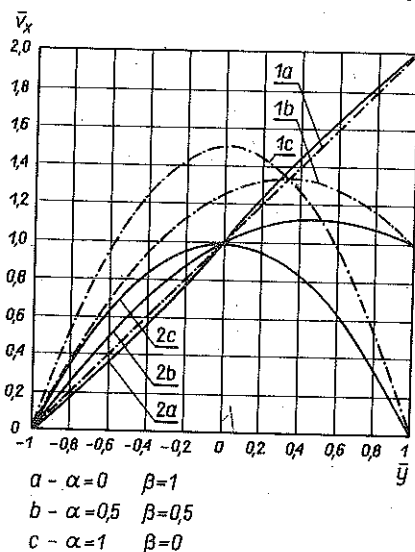
Z warunków (1.5) wynikają relacje pomiędzy liczbami podobieństwa

$$(4.8) \quad \frac{1}{\text{Lp1}} \geq \frac{\text{Rw}}{6} \left(\frac{3}{2\text{Lp2}} - \frac{1}{\text{Lp4}} \right)^2 + \frac{8}{3\text{Lp4}}, \quad \frac{1}{\text{Lp2}} \leq \frac{4}{3\text{Rw}}.$$

Jak dotąd brak jest szczegółowych analiz doświadczalnych pozwalających na określenie dopuszczalnych wartości dodatkowych liczb podobieństwa $Lp1$, $Lp2$, $Lp3$ i $Lp4$. Zostały one podobnie jak wartości liczb kryterialnych Re , $Rint$ i Rw przyjęte na podstawie wyników prac ALLENA i KLINE'A [12] oraz ARIMANA, TURKA i SYLVESTRA [13], dotyczących lepkości płynów mikropolarnych pierwszego rzędu. Dodatkowe liczby podobieństwa spełniają naturalnie ograniczenia (4.8).

Profile bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu, wyznaczone z zależności (4.6) przedstawiono graficznie na rys. 3-6. Analiza formuł (4.4)-(4.6) oraz prezentowanych wykresów prowadzi do następujących wniosków:

1. W porównaniu z profilami bezwymiarowej prędkości przepływu newtonowskiego, profil bezwymiarowej prędkości liniowej płynu mikropolarnego



| Re | Rem | $Rint$ | Rw | $Lp1$ | $Lp2$ | $Lp3$ | $Lp4$ |
|------|--------|--------|------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

Rys. 2. Profile liniowej prędkości przepływu płynu newtonowskiego (1) i płynu, mikropolarnego drugiego rzędu (2)

Tablica 1. Liczby podobieństwa użyte do określenia kształtu profili prędkości i mikrorotacji pierwszego rzędu

| Numer kolumny | Liczby podobieństwa | | | | | | | |
|---------------|---------------------|--------|--------|------|-------|-------|-------|-------|
| | Re | Rem | $Rint$ | Rw | $Lp1$ | $Lp2$ | $Lp3$ | $Lp4$ |
| 1 | 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 2 | 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,02 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 3 | 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,15 | 0,1 | 0,1 |
| 4 | 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 0,15 | 0,1 |
| 5 | 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 0,1 | 0,15 |

Tablica 2. Wpływ dodatkowych liczb podobieństwa na profil liniowej prędkości przepływu płynu mikropolarnego drugiego rzędu

| α | Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | 0,1772 | 0,1770 | 0,1774 | 0,1771 | 0,1774 |
| | -0,6 | 0,3701 | 0,3697 | 0,3704 | 0,3699 | 0,3704 |
| | -0,4 | 0,5741 | 0,5738 | 0,5744 | 0,5739 | 0,5744 |
| | -0,2 | 0,7853 | 0,7851 | 0,7855 | 0,7852 | 0,7855 |
| | 0,0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 0,2 | 1,2147 | 1,2149 | 1,2145 | 1,2148 | 1,2145 |
| | 0,4 | 1,4259 | 1,4263 | 1,4256 | 1,4261 | 1,4256 |
| | 0,6 | 1,6299 | 1,6303 | 1,6296 | 1,6301 | 1,6296 |
| | 1,0 | 1,8228 | 1,8230 | 1,8226 | 1,8229 | 1,8226 |
| 0,5 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | 0,2615 | 0,2614 | 0,2615 | 0,2614 | 0,2615 |
| | -0,6 | 0,4980 | 0,4978 | 0,4980 | 0,4979 | 0,4980 |
| | -0,4 | 0,7030 | 0,7031 | 0,7030 | 0,7030 | 0,7030 |
| | -0,2 | 0,8716 | 0,8718 | 0,8714 | 0,8717 | 0,8714 |
| | 0,0 | 1,0001 | 1,0005 | 0,9998 | 1,0003 | 0,9998 |
| | 0,2 | 1,0863 | 1,0867 | 1,0859 | 1,0865 | 1,0859 |
| | 0,4 | 1,1289 | 1,1293 | 1,1286 | 1,1291 | 1,1286 |
| | 0,6 | 1,1279 | 1,1282 | 1,1278 | 1,1281 | 1,1278 |
| | 1,0 | 1,0843 | 1,0844 | 1,0841 | 1,0843 | 1,0841 |
| 1,0 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | 0,3457 | 0,3458 | 0,3457 | 0,3458 | 0,3457 |
| | -0,6 | 0,6259 | 0,6262 | 0,6257 | 0,6260 | 0,6257 |
| | -0,4 | 0,8319 | 0,8324 | 0,8315 | 0,8321 | 0,8315 |
| | -0,2 | 0,9578 | 0,9585 | 0,9573 | 0,958 | 0,9573 |
| | 0,0 | 1,0002 | 1,0009 | 0,9996 | 1,0005 | 0,9996 |
| | 0,2 | 0,9578 | 0,9585 | 0,9573 | 0,9581 | 0,9573 |
| | 0,4 | 0,8319 | 0,8324 | 0,8315 | 0,8321 | 0,8315 |
| | 0,6 | 0,6259 | 0,6262 | 0,6257 | 0,6260 | 0,6257 |
| | 1,0 | 0,3457 | 0,3458 | 0,3457 | 0,3458 | 0,3457 |
| | 1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

drugiego rzędu w przepływie Poiseuille'a jest bardziej płaski, natomiast w przepływie Couette'a odbiega od charakterystycznego, prostoliniowego kształtu (rys. 2),

2. Zmiany dodatkowych liczb podobieństwa wpłynęły w nieznaczny sposób na zmianę bezwymiarowej prędkości przepływu i mikrorotacji pierwszego rzędu (tab. 1-3).

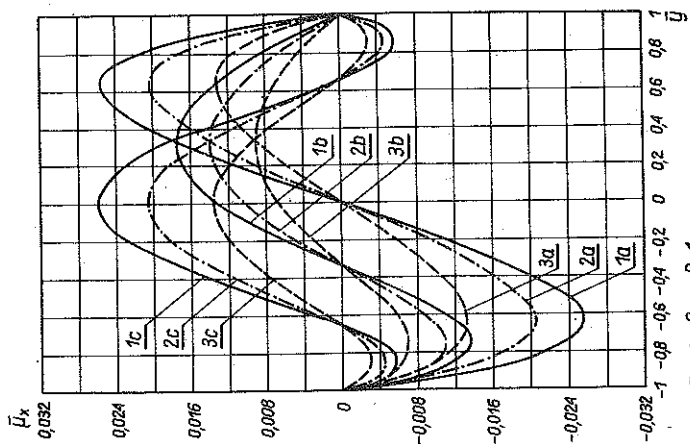
3. Wzrost dodatkowej liczby podobieństwa Lp_1 spowodował zwiększenie bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu w przepływie Poiseuille'a i jej wartości bezwzględnej w przepływie Couette'a (rys. 3). W przypadku liczby

Tablica 3. Wpływ dodatkowych liczb podobieństwa na profil mikrorotacji pierwszego rzędu

| α | Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | -0,1202 | -0,1201 | -0,1201 | -0,1204 | -0,1201 |
| | -0,6 | -0,2090 | -0,2097 | -0,2081 | -0,2098 | -0,2081 |
| | -0,4 | -0,2697 | -0,2713 | -0,2680 | -0,2709 | -0,2680 |
| | -0,2 | -0,3050 | -0,3074 | -0,3027 | -0,3065 | -0,3027 |
| | 0,0 | -0,3166 | -0,3192 | -0,3141 | -0,3181 | -0,3141 |
| | 0,2 | -0,3050 | -0,3074 | -0,3027 | -0,3065 | -0,3027 |
| | 0,4 | -0,2697 | -0,2713 | -0,2680 | -0,2709 | -0,2680 |
| | 0,6 | -0,2090 | -0,2097 | -0,2081 | -0,2098 | -0,2081 |
| 0,5 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | -0,1091 | -0,1095 | -0,1087 | -0,1093 | -0,1087 |
| | -0,6 | -0,1690 | -0,1700 | -0,1679 | -0,1697 | -0,1679 |
| | -0,4 | -0,1907 | -0,1923 | -0,1893 | -0,1917 | -0,1893 |
| | -0,2 | -0,1843 | -0,1859 | -0,1827 | -0,1852 | -0,1827 |
| | 0,0 | -0,1583 | -0,1596 | -0,1570 | -0,1591 | -0,1570 |
| | 0,2 | -0,1208 | -0,1215 | -0,1200 | -0,1213 | -0,1200 |
| | 0,4 | -0,0790 | -0,0791 | -0,0787 | -0,0792 | -0,0787 |
| | 0,6 | -0,0400 | -0,0396 | -0,0402 | -0,0401 | -0,0402 |
| 1,0 | -1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | -0,8 | -0,0979 | -0,0989 | -0,0973 | -0,0983 | -0,0973 |
| | -0,6 | -0,1289 | -0,1304 | -0,1278 | -0,1297 | -0,1278 |
| | -0,4 | -0,1117 | -0,1132 | -0,1106 | -0,1125 | -0,1106 |
| | -0,2 | -0,0635 | -0,0644 | -0,0627 | -0,0639 | -0,0627 |
| | 0,0 | 0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | 0,2 | 0,0635 | 0,0644 | 0,0627 | 0,0639 | 0,0627 |
| | 0,4 | 0,1117 | 0,1132 | 0,1106 | 0,1125 | 0,1106 |
| | 0,6 | 0,1289 | 0,1304 | 0,1278 | 0,1297 | 0,1278 |
| 0,8 | 0,0979 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0983 | 0,0973 | |
| 1,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | |

Lp3, większym jej wartościom odpowiadają większe wartości bezwzględne bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu w obu rodzajach przepływów (rys. 5).

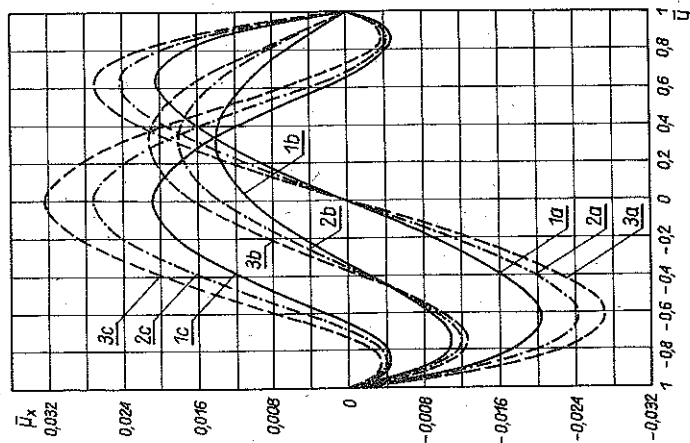
4. Większym liczbom podobieństwa Lp2 i Lp4 odpowiadają mniejsze wartości bezwzględne bezwymiarowej mikrorotacji drugiego rzędu w przepływie Couette'a i Poiseuille'a (rys. 4 i rys. 6). Relacje te zachodzą dla prawie wszystkich punktów płaszczyzny przepływu.



a - $\alpha=0$ $\beta=1$
 b - $\alpha=0,5$ $\beta=0,5$
 c - $\alpha=1$ $\beta=0$

| Re | Rem | Rint | Rw | Lp1 | Lp2 | Lp3 | Lp4 |
|-----|--------|--------|-----|------|------------------------------|-----|-----|
| 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 1, 0,08 2, 0,1 3, 0,15 | 0,1 | 0,1 |

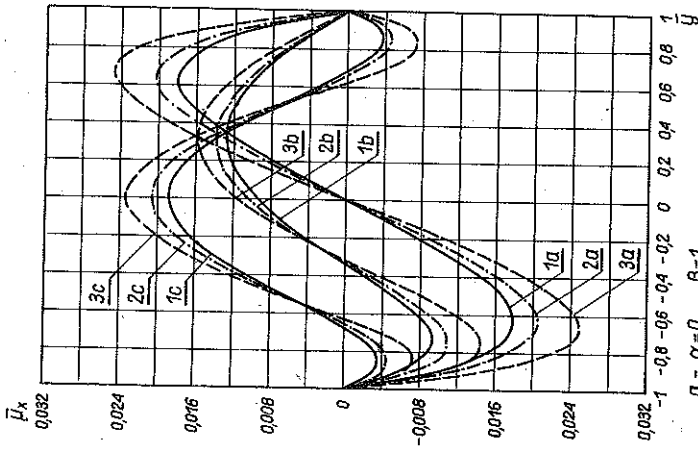
Rys. 4. Wpływ liczby podobieństwa Lp2 na kształt profilu mikrorotacji drugiego rzędu



a - $\alpha=0$ $\beta=1$
 b - $\alpha=0,5$ $\beta=0,5$
 c - $\alpha=1$ $\beta=0$

| Re | Rem | Rint | Rw | Lp1 | Lp2 | Lp3 | Lp4 |
|-----|--------|--------|-----|--------------------------------|-----|-----|-----|
| 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 1, 0,01 2, 0,015 3, 0,02 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

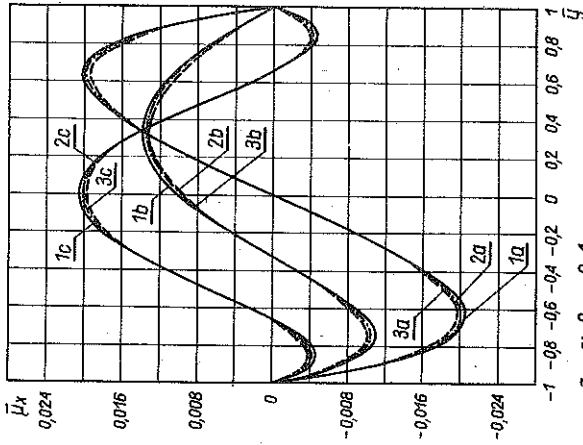
Rys. 3. Wpływ liczby podobieństwa Lp1 na kształt profilu mikrorotacji drugiego rzędu



- $a - \alpha = 0 \quad \beta = 1$
 $b - \alpha = 0,5 \quad \beta = 0,5$
 $c - \alpha = 1 \quad \beta = 0$

| Re | Rem | Rint | Rw | Lp1 | Lp2 | Lp3 | Lp4 |
|-----|--------|--------|-----|------|-----|-------------|---------------------|
| 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 1 2 3 | 0,08 0,1 0,15 |

Rys. 5. Wpływ liczby podobieństwa Lp3 na kształt profilu mikrotrotacji drugiego rzędu



- $a - \alpha = 0 \quad \beta = 1$
 $b - \alpha = 0,5 \quad \beta = 0,5$
 $c - \alpha = 1 \quad \beta = 0$

| Re | Rem | Rint | Rw | Lp1 | Lp2 | Lp3 | Lp4 |
|-----|--------|--------|-----|------|-----|-----|-------------|
| 0,1 | 0,0625 | 0,0833 | 0,1 | 0,01 | 0,1 | 0,1 | 1 2 3 |

Rys. 6. Wpływ liczby podobieństwa Lp4 na kształt profilu mikrotrotacji drugiego rzędu

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. A. KLINE, S. J. ALLEN, C. N. DE SILVA, *Biorheology*, **5**, 111, 1968.
2. T. ARIMAN, *J. Biomechanics*, **4**, 185, 1971.
3. A. C. ERINGEN, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 205, 1964.
4. A. C. ERINGEN, *J. Math.*, **16**, 1, 1966.
5. K. A. KLINE, T. K. SANDBERG, *Acta Mechanica*, **26**, 201, 1977.
6. G. SEGRÉ, A. SILBERBERG, *J. Fluid Mech.*, **14**, 115, 1962.
7. M. TAKANO, H. L. GOLDSMITH, S. G. MASON, *J. Colloid Interface Sci.*, **27**, 253, 1968.
8. G. AHMADI, S. L. KOH, V. W. GOLDSCHMIDT, *Recent Adv. Engng. Sci.*, Part 2, **5**, 9, 1970.
9. G. AHMADI, S. L. KOH, V. W. GOLDSCHMIDT, *Iranian J. Sci. and Techn.*, **1**, 233, 1971.
10. G. AHMADI, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech.*, **6**, 15, 1977.
11. G. AHMADI, *Rheol. Acta*, **14**, 710, 1975.
12. S. J. ALLEN, K. A. KLINE, *Trans. Soc. Rheol.*, **12**, 4457, 1968.
13. M. A. TURK, N. D. SYLVESTER, T. ARIMAN, *Trans. Soc. Rheol.*, **17**, 1, 1973.

РЕЗЮМЕ

ОБОБЩЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ
ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Представлено решение уравнений описывающих движение микрополярной жидкости второго порядка в плоском, обобщенном течении Куэтта. Проведен анализ влияния дополнительных коэффициентов вязкости на форму профилей скорости и микроротации. Результаты представлены в виде графиков и таблиц.

SUMMARY

GENERALIZED COUETTE FLOW OF SECOND ORDER MICROPOLAR
FLUID IN A PLANE CHANNEL

The paper deals with the solution of equations describing the motion of second order micropolar fluid in a plane, generalized Couette's flow. Analysis presented of the effect of additional coefficients of viscosity on the form of profiles of velocity and microrotation. The results are illustrated on diagrams and tables.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 kwietnia 1981 r.