

NIELINIOWE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI POWŁOKI O POSTACI WYCINKA STOŻKOWEGO W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM

JERZY MACIEJEWSKI (GORZÓW WIELKOPOLSKI)
i JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia utraty stateczności w obszarze sprężysto-plastycznym otwartej, swobodnie podpartej powłoki stożkowej, w ujęciu geometrycznie nieliniowym. Zakłada się, że na powłokę działa obciążenie dwuparametrowe w postaci równomiernego ciśnienia działającego na powierzchnię boczną oraz siły podłużnej skierowanej wzdłuż tworzącej. Sformułowane zagadnienie rozwiązano metodą energetyczną Ritz'a. Równania wyprowadzono opierając się na deformacyjnej teorii plastyczności Nádai'a-Hencky'ego, wykorzystując koncepcję wzrastającego obciążenia Shanleya. Iteracyjny algorytm obliczeniowy pozwala na przeanalizowanie ścieżek równowagi oraz wyznaczenie górnych i dolnych krytycznych dla powłok znajdujących się w sprężystym, sprężysto-plastycznym lub w całkowicie plastycznym przedkrytycznym stanie naprężeń. Wyniki obliczeń zilustrowano wykresami.

1. WSTĘP

W pracach [11, 12 i 14] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności poza granicą sprężystości powłoki w kształcie stożka ściętego w ujęciu geometrycznie liniowym. Rozważono podstawowe przypadki obciążeń obrotowo-symetrycznych, opierając się na związkach fizycznych obydwu teorii plastyczności, to jest teorii deformacyjnej i teorii plastycznego płynięcia (przyrostowej). Stosowano podejście wzrastającego obciążenia Shanleya, a w pracy [14] podano sposób linearyzacji równań stateczności, wyprowadzonych przy uwzględnieniu obciążenia materiału w momencie utraty stateczności (koncepcja Iliuszyna-Kármána). Praca [13] dotyczy analizy stateczności sprężysto-plastycznej powłoki trójwymiarowej. Do rozwiązania omawianych problemów zastosowano metodę ortogonalizacyjną Galerkin'a oraz iteracyjne procedury numeryczne.

Z prac ostatnich należy wymienić publikację RAMSEYA [8], gdzie autor rozważał powłokę stożkową ścisną osiowo; zastosował metodę małego parametru, przeprowadził również weryfikację doświadczalną uzyskanych wyników. J. CROLL [3] przedstawił kryteria dolnego oszacowania granicznego obciążenia krytycznych dla powłok cylindrycznych w ujęciu geometrycznie liniowym; porównał wyniki z danymi doświadczalnymi i podał szereg zaleceń dla praktyki projektowania, kładąc silny nacisk na wprowadzenie pól tolerancji początkowych niedokładności kształtu. Autorzy S. GELLIN [4] i L. H. N. LEE [6] zajmowali się również powłokami cylin-

drycznymi. W pracy [4] rozważono problem wpływu osiowo-symetrycznych imperfekcji o kształcie sinusoidalnym na obciążenia krytyczne w zakresie plastycznym dla długiej powłoki. Stwierdzono, że wpływ początkowych niedokładności kształtu na obciążenia krytyczne dla powłok uplastycznionych jest mniejszy, niż dla powłok sprężystych. LEE [6], opierając się na obydwóch podstawowych teoriach plastyczności i wykorzystując zasadę prac przygotowanych, określił wpływ początkowych imperfekcji na postać wyboczenia i wielkości obciążeń krytycznych. Wyniki zweryfikował doświadczalnie, dokonując badań modeli powłok wykonanych z duraluminium.

N. N. Stolarov rozważał panel sferyczną obciążoną ciśnieniem poprzecznym i siłą skupioną: do rozwiązania zastosował metodę różnic skończonych, wykorzystując deformacyjną teorię plastyczności. R. Kao rozwiązał również powłokę sferyczną wykazującą początkowe imperfekcje. Zakłada materiał o kinematycznym wzmocnieniu z uwzględnieniem efektu Bauschingera (teoria Pragera-Zieglera). Autor stwierdził, że zarówno początkowe imperfekcje, jak i odkształcenia plastyczne wywołują identyczny efekt zmniejszenia obciążenia krytycznego — gdy wielkość początkowych niedokładności kształtu wzrasta, wtedy wpływ odkształceń plastycznych staje się mniej istotny. Opracowano specjalną procedurę iteracyjną dla różnych charakterystyk materiałowych (liniowa, potęgowa, Ramberga-Osgooda).

Interesujący przegląd najnowszych prac dotyczących stateczności sprężysto-plastycznych złożonych powłok obrotowo-symetrycznych przedstawił D. BUSHNELL [1 i 2]. Z omówienia wynika, że ostatnio duży nacisk przy analizie stateczności powłok sprężysto-plastycznych kładzie się na bezpośrednie metody komputerowe oparte na MES; wiele prac poświęcono również badaniom doświadczalnym. Przegląd ważniejszych prac związanych tematycznie z niniejszym opracowaniem, a także odnośniki bibliograficzne, można również znaleźć w pracy [11].

W odróżnieniu od dotychczasowych, w niniejszej pracy zajmujemy się analizą stateczności otwartej powłoki o postaci wycinka stożkowego, poddanej działaniu sił podłużnych i poprzecznych. Zakładając swobodne podparcie brzegów oraz wykorzystując związki teorii nieliniowej, poza wyznaczeniem górnych i dolnych obciążeń krytycznych, analizuje się ścieżki równowagi oraz wyznacza obszary niestateczności. Założono materiał izotropowy, ściśliwy ze wzmocnieniem. Nie wprowadza się zasadniczych ograniczeń odnośnie do parametrów fizycznych czy też geometrycznych. Zakładamy, że obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Lova (w powłoce panuje płaski stan naprężenia, może być stosowana hipoteza niewydufzalnego odcinka normalnego) i rozważać będziemy aktywny proces obciążenia, tzn. że nie wystąpi zewnętrzne lub wewnętrzne odciążenie. Postawione zagadnienie rozwiązano metodą Ritz'a. Głównym celem obliczeń numerycznych jest analiza wpływu stosunku obciążenia poprzecznego do podłużnego, a także podstawowych parametrów geometrycznych i fizycznych na przebieg utraty stateczności.

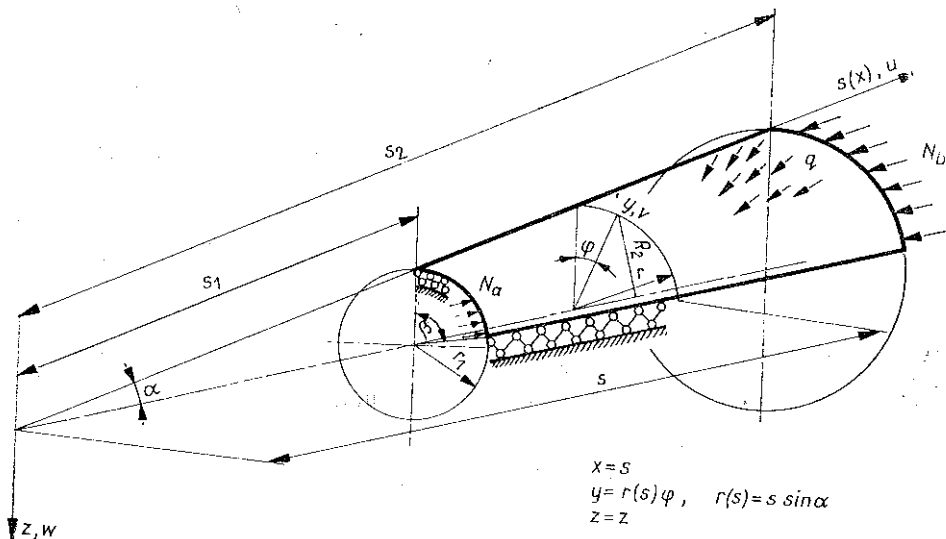
2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Przedmiotem analizy jest swobodnie podparta powłoka w kształcie wycinka stożka, obciążona ciśnieniem poprzecznym q i siłą wzdłużną N (rys. 1). Wariacje odkształceń powierzchni środkowej powłoki oraz wariacje krzywizn przyjmiemy w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_1 &= u_{,s} + \frac{1}{2} w_{,s}^2, \\ \delta \varepsilon_2 &= \frac{1}{s \sin \alpha} v_{,s\varphi} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi}^2 + A_0 \frac{u}{s}, \\ \delta \gamma_{12} &= \frac{1}{s \sin \alpha} u_{,\varphi} + v_{,s} + \frac{1}{s \sin \alpha} w_{,s} w_{,\varphi} - A_0 - \frac{v}{s}; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \delta \kappa_1 &= w_{,ss} \\ \delta \kappa_2 &= \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi\varphi} + \frac{\cos \alpha}{s^2 \sin^2 \alpha} v_{,\varphi}, \\ \delta \kappa_{12} &= \frac{1}{s \sin \alpha} w_{,s\varphi} - \frac{1}{s^2 \sin \alpha} w_{,\varphi} + \frac{1}{2s \operatorname{tg} \alpha} v_{,s} - \frac{1}{s^2 \operatorname{tg} \alpha} v - \\ &\quad - B_0 \left(\frac{1}{4s^2 \operatorname{tg} \alpha} v + \frac{1}{4s \operatorname{tg} \alpha} v_{,s} - \frac{\cos \alpha}{4s^2 \sin^2 \alpha} u_{,\varphi} \right). \end{aligned}$$

Postać tych związków jest prawie zgodna z postacią podaną przez Goldenwajzera, różnią się jedynie nieznacznie w wyrażeniu dla $\delta \varphi_{12}$. Niekiedy w różnych opracowaniach dotyczących teorii powłok podane są nieco inne wzory na zmiany krzywizn (np. wg Własowa). Jednakże różnice powinny leżeć w granicach dokładności po-



Rys. 1.

czątkowych założeń teorii powłok [7 i 10]. Celem zbadania jak wpływa na wyniki obliczeń uwzględnienie dodatkowych składników w wyrażeniach na $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\delta\kappa_{\alpha\beta}$, wprowadzono współczynniki A_0 i B_0 , które w obliczeniach numerycznych przyjmują wartości 0 lub 1.

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Lova wariacje odkształceń w powłoce są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \delta\varepsilon_s &= \delta\varepsilon_1 - z\delta\kappa_1, \\ \delta\varepsilon_\varphi &= \delta\varepsilon_2 - z\delta\kappa_2, \\ \delta\gamma_{s\varphi} &= \delta\gamma_{12} - 2z\delta\kappa_{12}. \end{aligned}$$

Dla przyjętego przypadku obciążenia siły wewnętrzne i naprężenia, odpowiadające błonowemu przedkrytycznemu stanowi naprężeń, wyrażają się wzorami [11 i 13]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} N_{10} &= \sigma_s h = \frac{1}{2} q \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{s_1^2}{s} - s \right) - Na \frac{s_1}{s}, \\ N_{20} &= \sigma_\varphi h = -qs \operatorname{tg} \alpha, \quad T_{10} = F_{20} = 0. \end{aligned}$$

Przy założeniu stałego stosunku obciążenia podłużnego do poprzecznego.

$$(2.5) \quad \kappa = \frac{Na}{qs_1},$$

zapewniamy proporcjonalny wzrost składowych tensora naprężenia przy zwiększaniu obciążenia zewnętrznego, co stanowi wymóg tzw. „prostego obciążenia” dla deformacyjnej teorii plastyczności, a naprężenia wzdłużne, obwodowe i intensywność naprężeń przyjmą odpowiednio wartości

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= -\frac{qs}{2h} k_s \operatorname{tg} \alpha, \quad \sigma_\varphi = -\frac{qs}{h} \operatorname{tg} \alpha, \quad \tau_{s\varphi} = 0, \\ \sigma_i &= (\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\tau_{s\varphi}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{qs}{2h} \sqrt{\Omega} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad k_s = 1 - \left(\frac{s_1}{s} \right)^2 \xi_N, \quad \xi_N = 1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} \kappa, \quad \Omega = k_s(k_s - 2) + 4 \quad (k_s \wedge \Omega > 0).$$

Bezwymiarowe wielkości wchodzące w skład elementów macierzy sztywności przyjmą postać

$$(2.8) \quad \bar{S}_s = \frac{\sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_\varphi}{\sigma_i} = (1 - k_s) / \sqrt{\Omega}, \quad \bar{S}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_s}{\sigma_i} = \frac{1}{2} (k_s - 4) / \sqrt{\Omega}.$$

Przyjmujemy liniową charakterystykę umocnienia materiału w zakresie plastycznym, dla której moduł styczny $E_k = \text{const}$, natomiast moduł sieczny

$$(2.9) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{qs \sqrt{\Omega}}}, & |\sigma_{PI}| < \sigma_i \leq |\sigma_m|, \\ E, & 0 \leq \sigma_i \leq |\sigma_{PI}|, \end{cases}$$

gdzie σ_m jest wytrzymałością doraźną, a $k_1 = \frac{2h}{\operatorname{tg} a} \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{p1}$. W opisie E_c (2.9) wykorzystano warunek plastyczności typu H-M-H. Według teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Nádaiá-Hencky'ego związki fizyczne napiszemy następująco:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{E_c} \sigma_s - \left(\frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_\varphi, \\ \varepsilon_\varphi &= - \left(\frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_s + \frac{1}{E_c} \sigma_\varphi, \\ \gamma_{s\varphi} &= \left(\frac{3}{E_c} - \frac{1-2\nu}{E} \right) \tau_{s\varphi}, \end{aligned}$$

Przyjmując $E_c = E$ uzyskujemy z (2.10) związki fizyczne dla ciała liniowo sprężystego. Siły i momenty w powłoce, jakie powstaną w wyniku utraty stateczności, uzyskamy przez całkowanie wzdłuż grubości powłoki wariacji naprężeń, które należy określić ze związków fizycznych (2.10):

$$(2.11) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} z dz.$$

Aby wyznaczyć $\delta \sigma_{\alpha\beta}$ należy dokonać wariacji wyrażeń (2.10), a następnie odwrócić je ze względu na wariacje naprężeń. Po podstawieniu do (2.11), uwzględniając (2.3) i dokonując całkowania otrzymujemy następujące wzory na wariacje sił i momentów:

$$(2.12) \quad \begin{Bmatrix} \delta N_1 \\ \delta N_2 \\ \delta T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \delta H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 00 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \kappa_1 \\ \delta \kappa_2 \\ \delta \kappa_{12} \end{Bmatrix}.$$

Elementy macierzy sztywności b_{ij} i c_{ij} mają postać

$$(2.13) \quad \begin{aligned} b_{11} &= -\frac{12}{h^2} c_{11} = \frac{h}{a} \left(k_2 \bar{S}_\varphi^2 + \frac{E_k}{E_c} \right), \\ b_{12} = b_{21} &= -\frac{12}{h^2} c_{12} = -\frac{12}{h^2} c_{21} = \frac{h}{a} \left[-k_2 \bar{S}_s \bar{S}_\varphi + \frac{1}{2} (k^0 - 2) \frac{E_k}{E_c} \right], \\ b_{22} &= -\frac{12}{h^2} c_{22} = \frac{h}{a} \left(k_2 \bar{S}_s^2 + \frac{E_k}{E_c} \right), \\ b_{33} &= -\frac{6}{h^2} c_{33} = \frac{h E_c}{k^0}. \end{aligned}$$

gdzie

$$a = \frac{1}{4E_c} \left[3 + \frac{1-2\nu}{E} E_k (k^0 - 1) \right] - \frac{1-2\nu}{E} k_2 \bar{S}_s \bar{S}_o, \quad k_2 = 1 - \frac{E_k}{E_c},$$

$$k^0 = 3 - \frac{1-2\nu}{E} E_c.$$

3. RÓWNANIE STATECZNOŚCI

Układ równań stateczności powłoki stożkowej wyrażony w przemieszczeniach nie posiada ścisłego rozwiązania. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia stateczności, na przykład metodą ortogonalizacyjną Galerkina, napotyka na trudności związane z pracochłonnymi obliczeniami. Warunek spełnienia kinematycznych i statycznych warunków brzegowych powoduje konieczność przyjmowania funkcji aproksymujących w skomplikowanej postaci. Z tego względu w niniejszej pracy zastosujemy metodę Ritza.

Opierając się na zasadzie prac przygotowanych otrzymujemy następujące równanie określające zachowanie się powłoki:

$$(3.1) \quad \delta W = \delta(A+L) = 0,$$

gdzie A jest energią zgromadzoną w powłoce w trakcie jej odkształcania i wyrażoną przez stan odkształcenia; L jest pracą sił zewnętrznych. Równanie (3.1) oznacza, że ze wszystkich możliwych postaci przemieszczeń spełniających warunki brzegowe realizuje się taka postać, dla której pełna energia potencjalna układu W osiąga minimum. Warto tutaj zaznaczyć, że równanie (3.1), mające w istocie sens równań równowagi w ujęciu wariacyjnym, jest poprawne zarówno dla stanów przedkrytycznych, jak i pokrytycznych. Stąd też z zasady prac przygotowanych — praca na przemieszczeniach przygotowanych równa się zeru — przy dowolności wariacji δA_i wynika, że

$$\delta W = \sum_i^k W_{,A_i} \delta A_i = 0,$$

gdzie A_i są parametrami, które wprowadza się do funkcji aproksymujących przemieszczenia i dobiera tak, aby możliwie najdokładniej odtwarzały przebieg rzeczywistych przemieszczeń. Tak więc przy zupełnej dowolności wariacji A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) mamy

$$(3.2) \quad W_{,A_i} = 0.$$

Otrzymujemy zatem w ogólnym przypadku k równań i tyle samo niewiadomych A_1, A_2, \dots, A_k . Warunek równoczesności tych równań jest zarazem warunkiem określającym krytyczny układ obciążeń. Jeżeli równania są liniowe i jednorodne, to mamy do rozwiązania problem na wartości własne, z którego można obliczyć obciążenie krytyczne. W naszym przypadku otrzymuje się bardziej złożony układ

trzech równań nieliniowych i niejednorodnych. Zanim przejdziemy do rozwiązania układu równań (3.2) określimy pracę sił i momentów powstałych w wyniku utraty stateczności:

$$(3.3) \quad \delta A_{s\varphi} = \delta N_1 \delta \varepsilon_1 + \delta N_2 \delta \varepsilon_2 + \delta T \delta \gamma_{12} + \delta M_1 \delta \kappa_1 + \delta M_2 \delta \kappa_2 + 2\delta H \delta \kappa_{12}.$$

Wykorzystując (2.12) i (2.13) i dokonując całkowania po powierzchni powłoki, otrzymujemy

$$(3.4) \quad A = \frac{1}{2} \int_F \int \left[b_{11} \left(\delta \varepsilon_1^2 - \frac{h^2}{12} \delta \kappa_1^2 \right) + 2b_{12} \left(\delta \varepsilon_1 \delta \varepsilon_2 - \frac{h^2}{12} \delta \kappa_1 \delta \kappa_2 \right) + \right. \\ \left. + b_{22} \left(\delta \varepsilon_2^2 - \frac{h^2}{12} \delta \kappa_2^2 \right) + b_{33} \left(\delta \gamma_{12}^2 - \frac{h^2}{3} \delta \kappa_{12}^2 \right) \right] r \, ds \, d\varphi.$$

Potencjał sił zewnętrznych, równy pracy ze znakiem ujemnym, można w pewnym uproszczeniu napisać jako funkcję przemieszczenia w w postaci

$$(3.5) \quad L = - \int_F \int qwr \, ds \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_F \int N_a \frac{s_1}{s} w_{,s}^2 r \, ds \, d\varphi.$$

Energia sił zewnętrznych (3.4) po wstawieniu wariacji odkształceń (2.1) i zmian krzywizn (2.2) przyjmie postać

$$(3.6) \quad A = \frac{1}{2} \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta b_{11} \left(u_{,s}^2 + u_{,s} w_{,s}^2 + \frac{1}{4} w_{,s}^4 - \frac{h^2}{12} w_{,ss}^2 \right) s \, d\varphi \, ds + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta b_{12} \left[-\frac{h^2}{12} w_{,ss} (\sin \alpha w_{,s} + \frac{1}{s \sin \alpha} w_{,\varphi\varphi}) + A_0 \sin \alpha u_{,s} u - \cos \alpha w u_{,s} - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12} \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} w_{,ss} v_{,\varphi} + u_{,s} v_{,\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} w_{,\varphi}^2 u_{,s} + A_0 \sin \alpha w_{,s}^2 u \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} w_{,s}^2 v_{,\varphi} - \frac{1}{2} \cos \alpha w_{,s}^2 w + \frac{1}{4s \sin \alpha} w_{,s}^2 w_{,\varphi}^2 \right] d\varphi \, ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta b_{22} \left\{ -2A_0 \frac{\cos \alpha}{s} w u - 2 \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} v_{,\varphi} \left[w + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{s} w_{,s} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi\varphi} \right) \right] + 2A_0 \frac{1}{s} u v_{,\varphi} + \left[\frac{\cos^2 \alpha}{s \sin \alpha} w^2 - \frac{h^2}{12} s \sin \alpha \left(\frac{1}{s} w_{,s} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi\varphi} \right)^2 \right] + A_0 \frac{\sin \alpha}{s} u^2 + \frac{1}{s \sin \alpha} v_{,\varphi}^2 \left(1 - \frac{h^2}{12} \frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) + \\ \left. + A_0 \frac{1}{s^2 \sin \alpha} w_{,\varphi}^2 u + \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi}^2 v_{,\varphi} - \frac{\cos \alpha}{s^2 \sin^2 \alpha} w_{,\varphi}^2 w + \right. \\ \left. + \frac{1}{4s^3 \sin^3 \alpha} w_{,\varphi}^2 \right\} d\varphi \, ds + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta b_{33} \left\{ -B_0 \frac{h^2 \cos \alpha}{6 s^2 \sin^2 \alpha} \left(w_{,s\varphi} - \frac{1}{s} w_{,\varphi} \right) u_{,\varphi} - \right.$$

(3.6)

[cd.]

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^3}{s} \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} \left(w_{,s\varphi} - \frac{1}{s} w_{,\varphi} \right) \times \left[\left(v_{,s} - \frac{2}{s} v \right) - \frac{1}{2} B_0 \left(v_{,s} + \frac{1}{s} v \right) \right] + \\
& + u_{,\varphi} \left\{ 2 \left(v_{,s} - A_0 \frac{1}{s} v \right) - B_0 \frac{h^2}{24} \frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \times \left[2 \left(v_{,s} - \frac{2}{s} v \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(v_{,s} + \frac{1}{s} v \right) \right] \right\} - \frac{h^2}{3} \frac{1}{s \sin \alpha} \left(w_{,s\varphi} - \frac{1}{s} w_{,\varphi} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{s \sin \alpha} \left(1 - B_0 \frac{h^2}{48} \frac{1}{s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) u_{,\varphi}^2 + \left\{ s \sin \alpha \left(v_{,s} - A_0 \frac{1}{s} v \right)^2 - \right. \\
& - \frac{h^2}{48} \frac{\cos^2 \alpha}{s \sin \alpha} \left[2 \left(v_{,s} - \frac{2}{s} v \right) - B_0 \left(v_{,s} + \frac{1}{s} v \right) \right]^2 \left. \right\} + \frac{2}{s \sin \alpha} w_{,s} w_{,\varphi} u_{,\varphi} + \\
& + 2 w_{,s} w_{,\varphi} \left(v_{,s} - A_0 \frac{1}{s} v \right) + \frac{1}{s \sin \alpha} w_{,s}^2 w_{,\varphi}^2 \left. \right\} d\varphi ds.
\end{aligned}$$

Potencjał sił zewnętrznych (3.5) napiszemy w postaci

$$(3.7) \quad L = -q \sin \alpha \int_{s_2}^{s_1} \int_0^\beta w s d\varphi ds - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta w_{,s}^2 d\varphi ds.$$

W celu rozwiązania zagadnienia przyjmujemy następujące funkcje aproksymujące przemieszczenia:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} w(s, \varphi) &= A_1 r^2(s) \sin k\psi \sin p\varphi, \\ u(s, \varphi) &= A_2 r^2(s) \cos k\psi \sin p\varphi, \\ v(s, \varphi) &= A_3 r^2(s) \sin k\psi \cos p\varphi, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = \frac{m\pi}{l}, \quad p = \frac{n\pi}{\beta}, \quad \psi = s - s_1, \quad l = s_2 - s_1.$$

Funkcje przemieszczeń (3.8) spełniają kinematyczne warunki swobodnego podparcia brzegów powłoki:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} w \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} &= 0, & w \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=\beta}} &= 0, & u \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=\beta}} &= 0, & v \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} &= 0. \end{aligned}$$

Podstawienie (3.8) do (3.6) i (3.7) prowadzi do następującego wzoru na energię potencjalną powłoki:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} W = A + L = & -\frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg} \alpha \sin^5 \alpha \tilde{D}_1 A_1 A_2 + \frac{1}{2} \beta \frac{h^2}{12} \operatorname{ctg} \alpha \frac{p}{\sin \alpha} \times \\ & \times \sin^5 \alpha \tilde{D}_2 A_1 A_3 - \frac{1}{2} \beta p \sin^4 \alpha \tilde{D}_3 A_2 A_3 - \beta \frac{h^2}{48} \sin^5 \alpha \tilde{D}_4 A_1^2 + \\ & + \frac{1}{4} \beta \sin^5 \alpha \tilde{D}_5 A_2^2 + \frac{1}{4} \beta \sin^5 \alpha \tilde{D}_6 A_3^2 + \frac{1}{2} \beta P \sin^7 \alpha \tilde{D}_7 A_1^2 A_2 - \\ & - \frac{1}{2} \beta \frac{p}{\sin \alpha} P_b \sin^7 \alpha (\tilde{D}_9 - 2\tilde{D}_8) A_1^2 A_3 - \frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg} \alpha P_b \sin^7 \alpha \tilde{D}_9 A_1^3 + \\ & + \frac{1}{64} \beta \sin^9 \alpha \tilde{D}_{10} A_1^4 - \frac{1}{2} q \beta \sin^3 \alpha E_3 A_1 - \frac{1}{4} N_a \beta \sin^5 \alpha E_4 A_1^2. \end{aligned}$$

D_i w powyższym równaniu ($i=1, 2, 3, \dots, 10$) są całkami, które obliczymy na drodze numerycznej (ponieważ $b_{ij}=b_{ij}(s, q, N_a)$), wyrażają się one wzorami

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_1 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left[W_s (C_s b_{12} + A_0 \cos k\psi b_{22}) + B_0 \frac{h^2}{12} \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} S_{cs} \cos k\psi b_{33} \right] ds, \\
 \tilde{D}_2 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left\{ \sin k\psi \left[T_{sc} b_{12} + \left(\frac{12}{h^2} W_s + P_{sc} \right) b_{22} \right] - B_{sc} S_{cs} b_{33} \right\} ds, \\
 \tilde{D}_3 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left[W_s (C_s b_{12} + A_0 \cos k\psi b_{22}) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(s A_{sc} - B_0 \frac{h^2}{48} \operatorname{ctg}^2 \alpha B_{sc} \right) \cos k\psi b_{33} \right] ds, \\
 \tilde{D}_4 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left[T_{sc} (T_{sc} b_{11} + 2P_{sc} b_{12}) + \left(P_{sc}^2 - \frac{12}{h^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha W_s \sin k\psi \right) b_{22} + \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} S_{sc}^2 b_{33} \right] ds, \\
 \tilde{D}_5 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left\{ s^2 (C_s b_{11} + 2A_0 \cos k\psi b_{12}) C_s + \right. \\
 (3.11) \quad &\quad \left. + \left[A_0 s^2 b_{22} + \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \left(s^2 - B_0 \frac{h^2}{48} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) b_{33} \right] \cos^2 k\psi \right\} ds, \\
 \tilde{D}_6 &= \int_{s_1}^{s_2} s \left[\frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \left(s^2 - \frac{h^2}{12} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \sin^2 k\psi b_{22} + \left(A_{sc}^2 - \frac{h^2}{48} \operatorname{ctg}^2 \alpha B_{sc}^2 \right) b_{33} \right] ds, \\
 \tilde{D}_7 &= \int_{s_1}^{s_2} s^2 \left\{ 2S_{sc} \left[S_{sc} (C_s b_{11} + A_0 \cos k\psi b_{12}) + \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} s \sin k\psi \cos k\psi b_{33} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} (C_s b_{12} + A_0 \cos k\psi b_{22}) W_s \sin k\psi \right\} ds, \\
 \tilde{D}_8 &= \int_{s_1}^{s_2} W_s S_{sc} A_{sc} b_{33} ds, \\
 \tilde{D}_9 &= \int_{s_1}^{s_2} W_s \left(2S_{ck} b_{12} + \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} W_s \sin k\psi b_{22} \right) ds, \\
 \tilde{D}_{10} &= \int_{s_1}^{s_2} s \left\{ S_{ck} \left[3S_{ck} b_{11} + 2 \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} (b_{12} + 2b_{33}) W_s \sin k\psi \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{p^4}{\sin^4 \alpha} W_s^2 \sin^2 k\psi b_{22} \right\} ds,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$S_c = 2 \sin k\psi + ks \cos k\psi,$$

$$P_{sc} = S_c - \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \sin k\psi,$$

$$C_s = 2 \cos k\psi - ks \sin k\psi,$$

$$S_{sc} = s S_c,$$

$$\begin{aligned} A_{sc} &= s(S_c - A_0 \sin k\psi), & S_{ck} &= S_{sc}^2, \\ B_{sc} &= (2 - B_0) S_c - (4 + B_0) \sin k\psi, & W_s &= s^2 \sin k\psi, \\ T_{sc} &= (2 - k^2 s^2) \sin k\psi + 4ks \cos k\psi, & S_{cs} &= S_c - \sin k\psi. \end{aligned}$$

W równaniu (3.10) występują ponadto współczynniki E_4 i E_5 , określone wzorami

$$(3.12) \quad \begin{aligned} E_4 &= \frac{s_1}{60k^2} \{k^2 [6k^2 (s_2^5 - s_1^5) + 10 (s_2^3 - s_1^3)] - 15l\}, \\ E_5 &= \frac{6}{k^3} P [3_1 (k^2 s_1^2 - 6) - s_2 C (k^2 s_2^2 - 6)], \end{aligned}$$

gdzie

$$C = (-1)^m, \quad P_b = \frac{1}{3p\beta} [1 - (-1)^n].$$

Obliczając pochodne cząstkowe energii W względem parametrów A_i , tj. $W_{,A_1} = 0$, $W_{,A_2} = 0$, $W_{,A_3} = 0$ (wg (3.2)), otrzymujemy następujący układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (d_{11} + d_{11}) A_1 + d_{12} A_2 + d_{13} A_3 &= e_{11} A_1^2 + e_{13} A_1 A_2 + e_{14} A_1 A_3 + e_{15} + e_{12} A_1^3, \\ d_{21} A_1 + d_{22} A_2 + d_{23} A_3 &= e_{21} A_1^2, \\ d_{31} A_1 + d_{32} A_2 + d_{33} A_3 &= e_{31} A_1^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\frac{1}{2} N_a \beta \sin^5 \alpha E_4, & d_{33} &= \frac{1}{2} \beta \sin^5 \alpha \tilde{D}_6, \\ d_{11} &= -2\beta \frac{h^2}{48} \sin^5 \alpha \tilde{D}_4, & e_{11} &= \frac{3}{2} P_b \beta \operatorname{ctg} \alpha \sin^7 \alpha \tilde{D}_9, \\ d_{12} = d_{21} &= -\frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg} \alpha \sin^5 \alpha \tilde{D}_1, & e_{12} &= \frac{1}{16} \beta \sin^9 \alpha \tilde{D}_{10}, \\ d_{13} = d_{31} &= \frac{1}{2} \beta \frac{h^2}{12} \operatorname{ctg} \alpha \frac{p}{\sin \alpha} \sin^5 \alpha \tilde{D}_2, & e_{13} &= 2e_{21} = -P_b \beta \sin^7 \alpha \tilde{D}_7, \\ d_{22} &= \frac{1}{2} \beta \sin^5 \alpha \tilde{D}_5, & e_{14} &= 2e_{31} = P_b \beta \frac{p}{\sin \alpha} \sin^7 \alpha \tilde{D}_8, \\ d_{23} = d_{32} &= -\frac{1}{2} \beta \frac{p}{\sin \alpha} \sin^5 \alpha \tilde{D}_3, & e_{15} &= -\frac{1}{2} q\beta \sin^3 \alpha E_5, \end{aligned}$$

$$D_8 = \tilde{D}_9 - 2\tilde{D}_8.$$

Rozwiązując powyższy układ trzech nieliniowych równań algebraicznych względem parametru funkcji ugięcia A_1 , otrzymujemy kryterium stateczności w postaci

$$(3.14) \quad \frac{\sin^4 \alpha \tilde{E}_1 A_1^3 + \sin^2 \alpha \tilde{E}_2 A_1^2 + \tilde{E}_3 A_1}{q \frac{E_6}{\sin^2 \alpha} + N_a E_4 A_1} = 1.$$

Pozostałe współczynniki równania stateczności (3.14) są następujące:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_1 &= -\frac{1}{8} \tilde{D}_{10} + 2P_b^2 \left(\tilde{D}_7 U_b - \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \tilde{D}_8 V_b \right), \\ \tilde{E}_2 &= p_b \operatorname{ctg} \alpha \left[3\tilde{D}_9 - 2\tilde{D}_7 U_a - \tilde{D}_1 U_b + \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \left(2\tilde{D}_8 V_a + \frac{h^2}{12} \tilde{D}_2 V_b \right) \right], \\ \tilde{E}_3 &= \frac{h^2}{12} \tilde{D}_4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\tilde{D}_1 U_a - \frac{h^2}{12} \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \tilde{D}_2 V_a \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} U_a &= W_a \left(\tilde{D}_1 \tilde{D}_6 - \frac{h^2}{12} \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \tilde{D}_2 \tilde{D}_3 \right), & V_a &= W_a \left(\tilde{D}_1 \tilde{D}_3 - \frac{h^2}{12} \tilde{D}_2 \tilde{D}_5 \right), \\ U_b &= W_a \left(\tilde{D}_6 \tilde{D}_7 - \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \tilde{D}_3 \tilde{D}_8 \right), & V_b &= W_a (\tilde{D}_3 \tilde{D}_7 - \tilde{D}_5 \tilde{D}_8), \\ W_a &= \left(\tilde{D}_5 \tilde{D}_6 - \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \tilde{D}_3^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

W obliczeniach numerycznych parametr A_1 zastępujemy nową zmienną A_m , uzależnioną od bezwymiarowego ugięcia w następujący sposób:

$$(3.16) \quad A_m = A_1 \sin^2 \alpha = \frac{\bar{w}h}{(w_s)_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w_{\max}}{h}.$$

Uwzględniając (3.16) i (2.5) w równaniu stateczności (3.14), przekształcimy je do postaci wykorzystywanej w obliczeniach numerycznych:

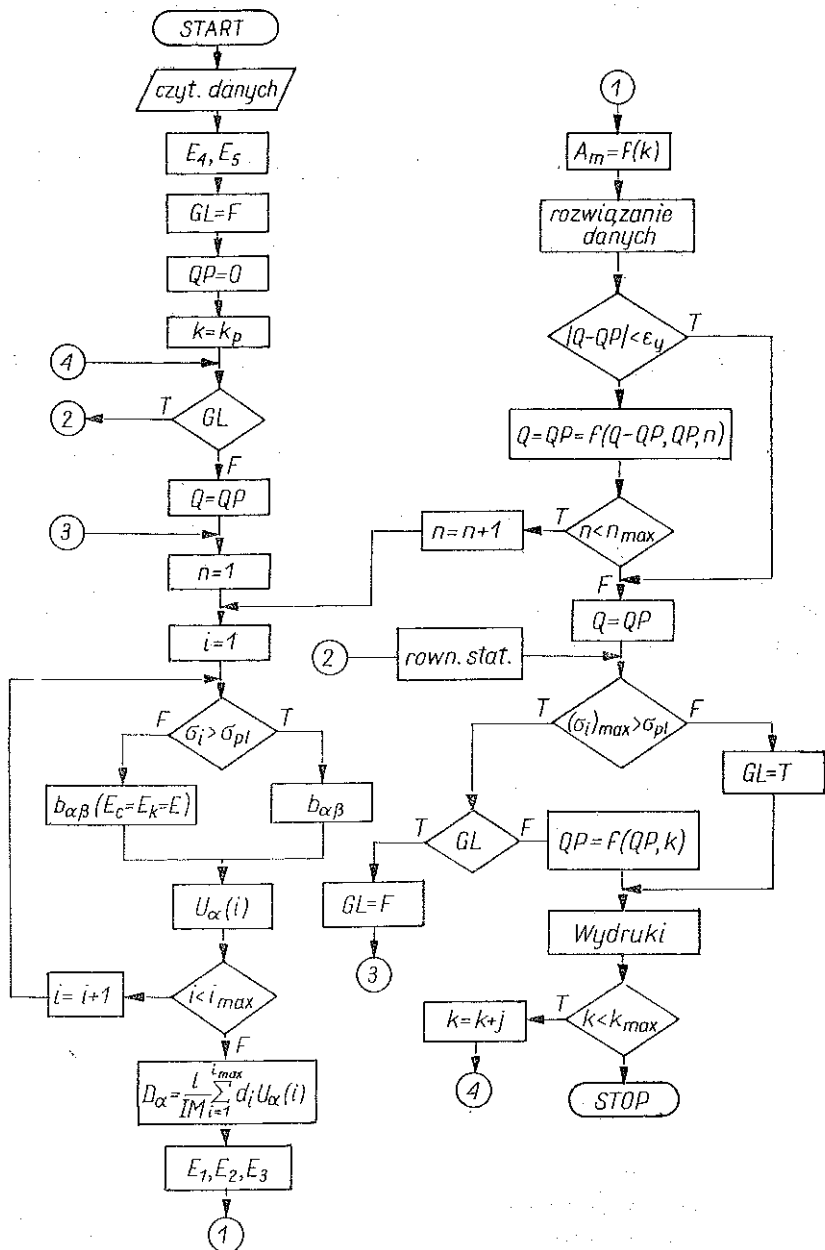
$$(3.17) \quad q = -\frac{\tilde{E}_1 A_m^3 + \tilde{E}_2 A_m^2 + \tilde{E}_3 A_m}{E_5 + \tilde{E}_4 A_m}, \quad N_a = q \varkappa s_1,$$

gdzie

$$\tilde{E}_4 = \varkappa s_1 E_4.$$

4. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

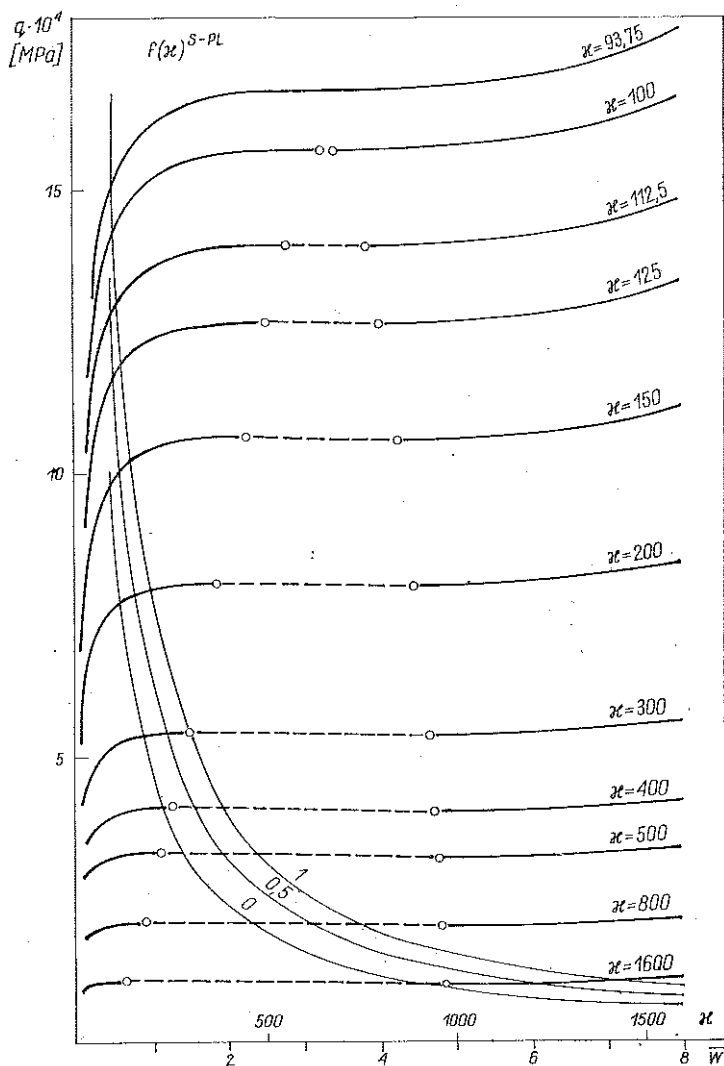
Celem obliczeń numerycznych jest przeanalizowanie ścieżek równowagi powłoki przy dowolnej kombinacji obciążenia poprzecznego w stosunku do podłużnego oraz zbadanie wpływu podstawowych parametrów fizycznych i geometrycznych na wielkość obciążeń krytycznych i przebieg utraty stateczności. Opierając się na równaniach stateczności (3.17), opracowano algorytm rozwiązania zagadnienia. Należy tutaj zwrócić uwagę, że równanie sprężysto-plastycznej stateczności powłoki jest funkcją uwikłaną (elementy macierzy sztywności $b_{\alpha\beta}$ oraz funkcje podcałkowe U_α zależą od obciążenia q), dlatego też funkcji $q=f(\bar{w})$ bezpośrednio obliczyć nie można. Jako punkt startowy dla analizy powłoki częściowo czy też całkowicie uplastycznionej, na każdym kroku obliczeniowym ścieżki równowagi przyjmowano pewną



Rys. 2.

wartość obciążenia początkowego q_p (QP), bazując na wartości q_{p-1} . Umożliwiło to obliczenie współczynników sztywności $b_{\alpha\beta}$ i otrzymanie równania stateczności o znanych współczynnikach

$$(4.1) \quad q = f(QP),$$



Rys. 3.

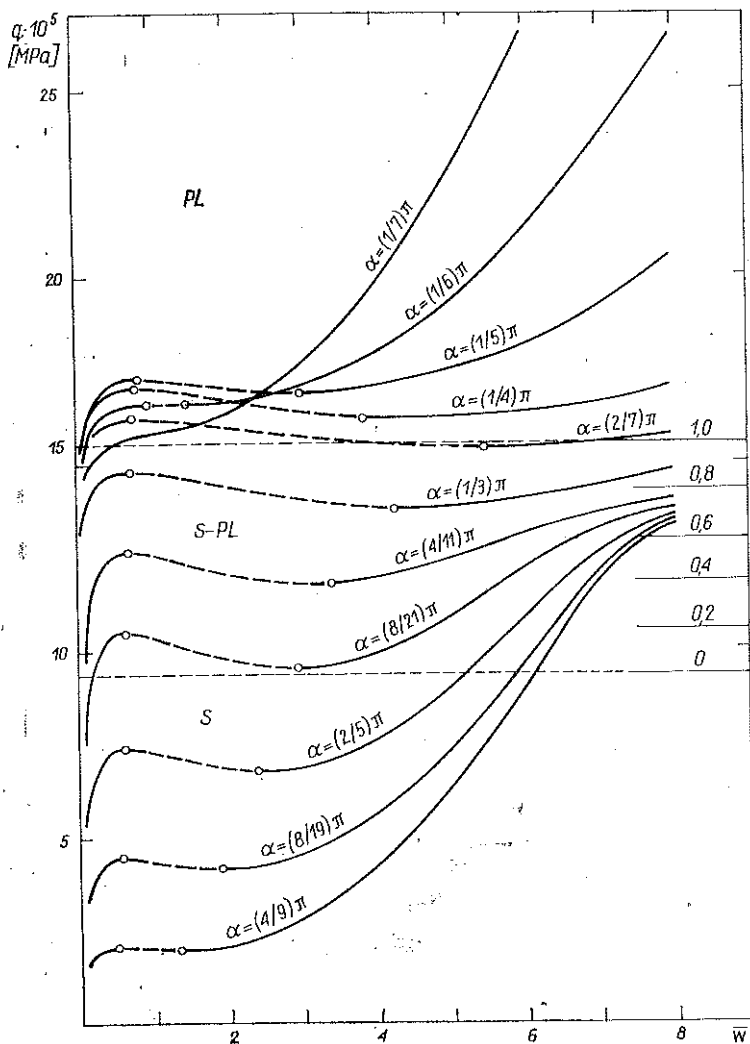
gdzie ugięcie \bar{w} występuje w roli parametru. Ostatecznie jako QP przyjmujemy taką wartość, dla której spełniony jest warunek

$$(4.2) \quad |Q - QP| < \varepsilon_q,$$

gdzie ε_q jest założonym parametrem dokładności obliczeń. Przy poszukiwaniu obciążenia początkowego spełniającego warunek (4.2) stosowano interpolację liniową. Uproszczony algorytm obliczeń przedstawiono na rys. 2, gdzie IM oznacza liczbę przedziałów całkowania, d_i — współczynnik całkowania zależny od przyjętej metody (stosowano metodę Simpsona).

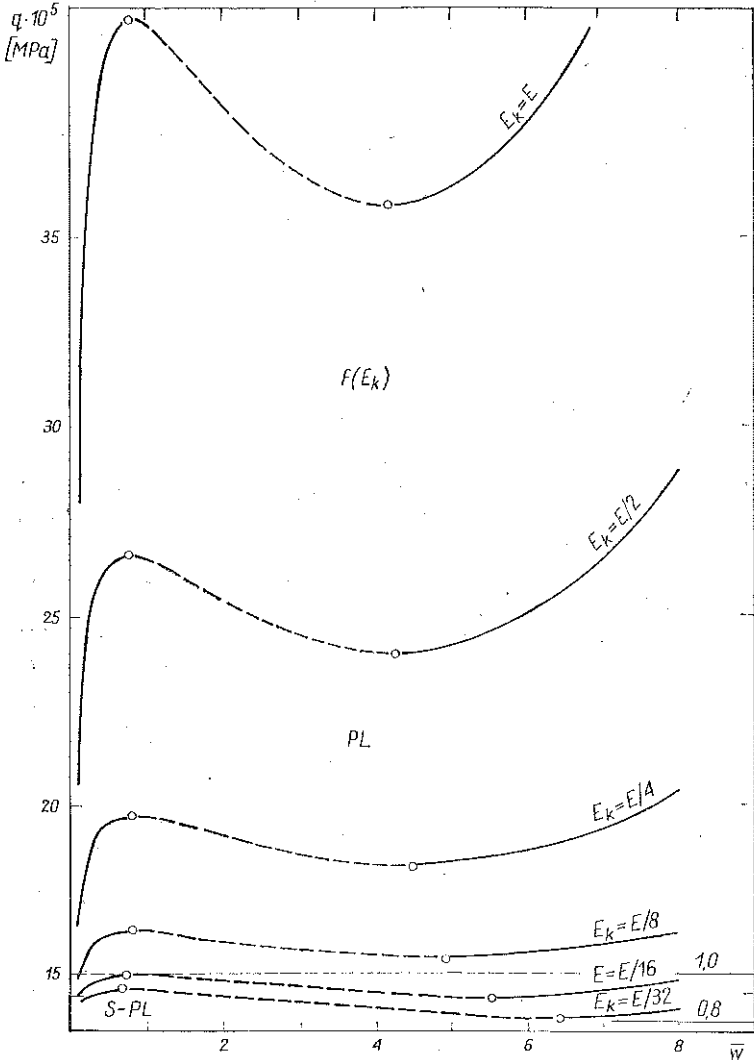
Jeśli którykolwiek z wymienionych parametrów dla celów analizy ulegnie zmianie, to zostanie zaznaczone to na odpowiednim wykresie. Podstawę analizy stanowi zbadanie zależności obciążenia (poprzecznego) od względnego ugięcia powłoki odniesionego do jej grubości. Obszar niestateczny (zakrytyczny) zaznaczono na wykresach linią przerywaną. Początek tego obszaru jest określony przez górne obciążenie krytyczne q_+ , natomiast jego koniec — przez dolne obciążenie krytyczne q_- . Liniami cienkimi zaznaczono krzywe uplastycznienia powłoki. Liczby przy tych liniach oznaczają stopień uplastycznienia powłoki, licząc wzdłuż tworzącej.

Istotny wpływ na przebieg utraty stateczności powłoki ma stosunek obciążenia podłużnego do poprzecznego α . Na rys. 3 przedstawiono rodzinę krzywych obra-



Rys. 5.

zujących przebieg utraty stateczności $q(\bar{w})$, przy różnych wartościach współczynnika κ . Poniżej pewnej wartości tego współczynnika (dla której $q_+^* = q_-^*$) ścieżka równowagi wykazuje jedynie przegięcie bez charakterystycznego „przeskoku” po osiągnięciu górnego obciążenia krytycznego. Przy wzroście stosunku obciążeń

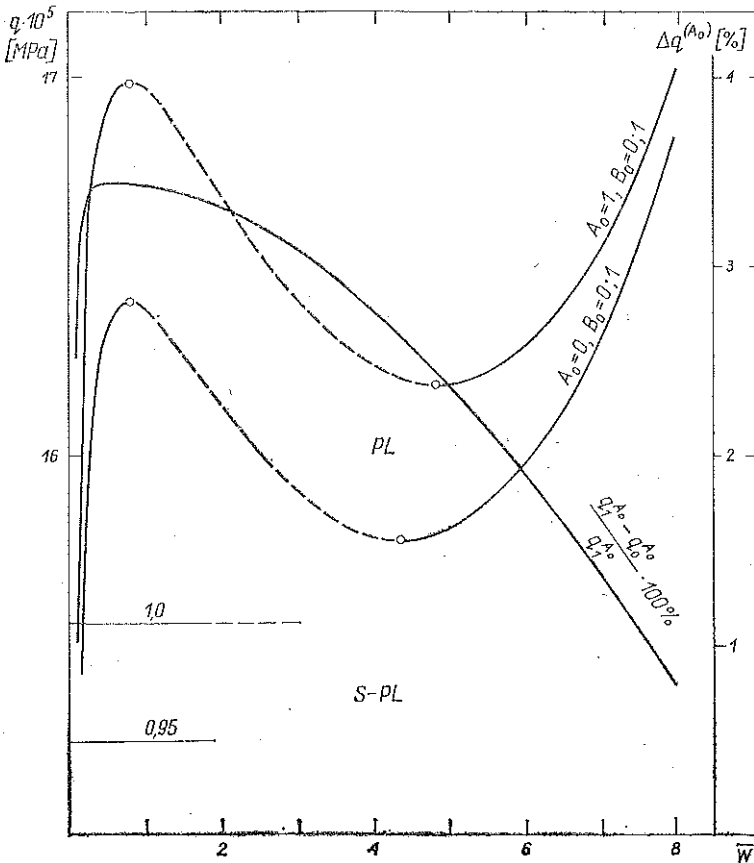


Rys. 6.

(zewnętrznych) — większy udział siły wzdłużnej, ponad wartość graniczną $\kappa=100$, obserwujemy wyraźne rozszerzenie obszaru niestatecznego, przy jednoczesnym spadku obciążeń krytycznych. Jednocześnie początek przeskoku następuje przy coraz mniejszych ugięciach. Przy dalszym wzroście stosunku obciążeń ($\kappa \rightarrow \infty$) następuje zbliżanie się krzywych $N_a(\bar{w})$ do krzywej granicznej, odpowiadającej przypadkowi

obciążenia powłoki wyłącznie siłą wzdłużną. Powyżej $\kappa=10\ 000$ ścieżki równowagi nie odbiegają istotnie od krzywej granicznej, co przedstawiono na rys. 4. Jak wynika z wykresów na rys. 3 i 4, utrata stateczności następuje po jej całkowitym uplastycznieniu.

Analiza postaci wyboczenia powłoki związana ze zmianą kąta nachylenia tworzącej α została przedstawiona na rys. 5. Początkowo przy wzroście kąta α następuje jedynie wzrost obciążenia, gdzie ma miejsce przegięcie na ścieżce równowagi $q=q(\bar{w})$. Po przekroczeniu wartości granicznej pojawia się, a następnie ulega rozszerzeniu, obszar niestateczny. Utrata stateczności następuje tutaj przy malejących



Rys. 7.

ugięciach. Dalszy przyrost kąta α prowadzi do spadku obciążeń krytycznych i utraty stateczności w stanie sprężysto-plastycznym (S-PL), a nawet, przy dużych kątach nachylenia tworzącej, powłoka traci stateczność w stanie czysto sprężystym (S), a wartość podstawowych parametrów charakteryzujących proces utraty stateczności, jak q_+^* , q_-^* , \bar{w} , maleje.

Na kolejnym wykresie (rys. 6) przedstawiona została analiza wpływu modułu stycznego E_k na przebieg wyboczenia powłoki. Jak wynika z założeń, w pracy przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału. Zmiana modułu stycznego wywiera istotny wpływ na przebieg utraty stateczności. Krzywa $q(\bar{w})$ przedstawiona w górnej części wykresu na rys. 6 odpowiada przyjęciu $E_k = E$, co oznacza, że materiał zachowuje własności sprężyste nawet po przekroczeniu przyjętej w obliczeniach granicy plastyczności. W miarę zmniejszania modułu stycznego obserwujemy spadek obciążeń krytycznych oraz rozszerzenie obszaru niestateczności, co szczególnie widać przy utracie stateczności w stanie częściowego uplastycznienia powłoki.

Rys. 7 przedstawia wyniki obliczeń mających na celu zbadanie wpływu uwzględnienia w związkach geometrycznych wyrazów małych, które w niektórych opracowaniach są pomijane. Pominięcie wyrazów w nawiasach we wzorze na krzywiznę $\delta\kappa_{12}$ (2.2), tj. przyjęcie $B_0 = 0$, nie daje zauważalnych zmian (różnice sięgają poniżej 0,01%). Natomiast istotny wpływ na wartości q_+^* i q_-^* wywiera zachowanie lub przyjęcie wyrazów małego rzędu w wyrażeniach na odkształcenia (2.1). Uwzględnienie wpływu przemieszczenia u dla $\delta\varepsilon_2$ i przemieszczenia v dla $\delta\gamma_{12}$, tj. przyjęcie $A_0 = 1$, powoduje nieznaczne rozszerzenie się obszaru niestatecznego oraz kilkuprocentowy wzrost obciążeń krytycznych.

Oprócz wyników przedstawionych na wykresach zrealizowano również obliczenia mające na celu zbadanie wpływu na obciążenia krytyczne szeregu innych parametrów materiałowych i geometrycznych. Stwierdzono, że wzrost kąta rozwartości powłoki β prowadzi do rozszerzenia obszaru niestatecznego, przy równoczesnym wzroście obciążeń krytycznych. Dla małych wartości β powłoka jest stateczna. Zbadano również wpływ zmiany długości tworzącej powłoki (s_1 i s_2) oraz współczynnika ściśliwości ν . Przyjęcie $\nu = 0,5$ (materiał nieściśliwy) nie wpływa istotnie na przebieg zjawiska utraty stateczności i wielkość obciążeń krytycznych.

Przeprowadzona analiza i obliczenia numeryczne mogą posłużyć do doboru przy projektowaniu powłoki stożkowej takich parametrów geometrycznych, aby uniknąć stanów zakrytycznych niestatecznych. Nadmienić należy również, że poprawność wyprowadzonych związków zbadano przez sprowadzenie podstawowych zależności do rozwiązania sprężystego, które przyjmuje znaną postać rozwiązań podanych w literaturze (por. [10]). Pomimo, że niniejsze rozwiązanie dotyczy materiału o liniowym umocnieniu, nie ma żadnych formalnych trudności uwzględnienia innych rodzajów charakterystyk (np. potęgowa, Ylinena, itp.).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. BUSHNELL, BOSOR 5 — *Program for buckling of elastic plastic complex shells of revolution including large deflections and creep*, Computer and Structures, 6, 221-239, 1976.
2. D. BUSHNELL, *Plastic buckling of various shells*, J. Pressure Vessel Technology, 104, May, 1982.
3. J. G. A. CROLL, *Elasto-plastic buckling of pressure and axial loaded cylinders*, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 73, 633-652, 1982.
4. S. GELLIN, *Effect of an axisymmetric imperfection on the plastic buckling of an axially compressed cylindrical shell*, Transaction of ASME, J. Appl. Mech., 46, 1, 1979.

5. R. KAO, *Large deformation elastic plastic buckling analysis of spherical caps with initial imperfections*, Computer and Structures, **11**, 609-619, 1980.
6. L. H. N. LEE, *Inelastic buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to axial compression*, Int. J. Aeron Sci., **29**, 5, 1962.
7. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1977.
8. H. RAMSEY, *Plastic buckling of a conical shell under axial compression*, Int. J. Mech. Sci., **19**, 5, 1977.
9. Н. Н. Столаров, Г. М. Петровский, *Устойчивость и большие прогибы длинных упруго-пластических панелей переменной жесткости и кривизны*, Прикладная Мех., **4**, 3, 1980
10. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
11. J. ZIELNICA, *Stan krytyczny sprężysto-plastycznej powłoki w kształcie stożka ściętego*, Rozpr. Inżyn., **28**, 3, 401-421, 1980.
12. J. ZIELNICA, M. KWIEK, *Wyboczenie cienkiej powłoki przy obciążeniach obrotowo symetrycznych poza granicą sprężystości*, Mech. Teor. Stos. **19**, 2, 1981.
13. J. ZIELNICA, *Elastic-plastic buckling of sandwich conical shells under axial compression and external pressure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **29**, 11-12, 1981.
14. J. ZIELNICA, *Linearyzacja równań sprężysto plastycznej stateczności powłoki stożkowej według koncepcji Iliuszyna-Kármána*, Zesz. Nauk. WSI Opolo, II Konf., Konstrukcje Powłokowe-Teoria i Zastosowania, 299-304, 1982.
15. M. OSTWALD, *Nieliniowe zagadnienie stateczności trójwymiarowej powłoki walcowej przy obciążeniach złożonych*, Rozpr. Inżyn., **29**, 2, 1981.
16. R. STRUK, *Non-linear stability problem of an open conical sandwich shell under external pressure and compression*, Int. J. Non-Linear Mech., 1984 (in press).

Резюме

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧКИ ВИДА КОНИЧЕСКОГО СЕКТОРА В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Представлено решение проблемы потери устойчивости в упруго-пластической области открытой свободно подпертой конической оболочки в геометрически нелинейном подходе. Предполагается, что на оболочку действует двухпараметрическая нагрузка в виде равномерного давления, действующего на боковую поверхность, а также продольной силы направленной вдоль образующей. Поставленная проблема решена энергетическим методом Ритца. Уравнения выведены, опираясь на деформационную теорию пластичности Надае-Генки, используя концепцию возрастающей нагрузки Шанлея. Итерационный расчетный алгоритм позволяет проанализировать дорожки равновесия, а также определить верхние и нижние критические нагрузки для оболочек, находящихся в упругом, упруго-пластическом или в полностью пластическом докритических напряженных состояниях. Результаты расчетов иллюстрированы диаграммами.

SUMMARY

NONLINEAR STABILITY PROBLEM OF AN ELASTIC-PLASTIC OPEN CONICAL SHELL

The paper presents a nonlinear solution of the open conical shell in elastic-plastic region. It is assumed that the shell is simply supported at the edges, and loaded by transverse uniform pressure and longitudinal forces. The stability problem is solved by the Ritz method of the minimum energy

in the shell. The equations were derived by means of the deformation plasticity theory, making use of the Shanley approach. An iterative numerical procedure allows for analyzing the load paths, and for calculating the upper and lower critical loads for shells in elastic, elastic-plastic, and pure plastic pre-buckling state of stresses. The result of calculations are presented on diagrams.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1983 r.
