

## WPLYW CHARAKTERYSTYK MATERIAŁOWYCH NA NOŚNOŚĆ ROZDZIELCZĄ NIEOGRANICZONEJ TARCZY Z KOŁOWĄ SZTYWNĄ INKLUZJĄ

KRZYSZTOF SZUWALSKI (KRAKÓW)

W pracy zajęto się nieograniczoną płaską tarczą z kołową sztywną inkluzją, poddaną równomiernemu rozciąganiu w nieskończoności. Przy założeniu, że tarcza jest wykonana z asymptotycznie idealnie plastycznego materiału, dla różnych charakterystyk  $\sigma = f(\epsilon)$  zbadano możliwość uzyskania rozwiązania problemu nośności granicznej, związanego z wystąpieniem mechanizmu zniszczenia plastycznego. Dla przypadków, gdy problem ten nie ma rozwiązania określono odpowiednią nośność rozdzielczą — obciążenie przy którym występuje kres ciągłego rozwiązania. Rozważono najczęściej stosowane prawa asymptotycznie idealnej plastyczności podane przez W. Pragera i A. Ylinena oraz prawo potęgowe zaproponowane przez K. SZUWALSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [1]. Zastosowano rozwinięcia w szeregi potęgowe oraz obliczenia numeryczne. Sformułowano ogólny warunek, który musi być spełniony przez prawo asymptotycznie idealnej plastyczności, aby nie utworzył się mechanizm zniszczenia plastycznego i aby wystąpiła nośność rozdzielcza.

### 1. WSTĘP

Typowe zagadnienie teorii plastyczności polega na przejściu od zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem na poziomie punktu ciała do zależności pomiędzy obciążeniem zewnętrznym a pewnym charakterystycznym przemieszczeniem na poziomie całego ciała  $P = f(u)$ .

W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem, dla jakich zależności w punkcie (charakterystyk materiałowych) funkcja  $P$  będzie określona dla dowolnych wartości przemieszczeń (o nieograniczonej dziedzinie), a kiedy będzie określona tylko dla wartości z pewnego przedziału  $\langle 0, \hat{u} \rangle$ . W pierwszym przypadku układ będzie osiągał swoją nośność graniczną: nieograniczony wzrost przemieszczeń jest związany z utworzeniem się pewnego mechanizmu zniszczenia plastycznego. W przypadku drugim będziemy mieli do czynienia z nośnością rozdzielczą układu.

Pojęcie nośności rozdzielczej zostało wprowadzone przez K. SZUWALSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [1] i zdefiniowane jako obciążenie zewnętrzne, przy

którym pojawia się kres rozwiązania ciągłego lub wykazującego dopuszczalne nieciągłości. Kres taki, w świetle przyjętych założeń musi spowodować efekt dekohezji — rozdzielenia układu na dwie części i może wystąpić pomimo założenia braku takiego kresu na poziomie punktu ciała. Jest on konsekwencją lokalnego zmierzania do nieskończoności odkształcenia podłużnego  $\epsilon$ , czyli pochodnej funkcji przemieszczenia.

Dalsze badania na gruncie teorii odkształceń skończonych [2] oraz w przypadku obciążeń termicznych [3] były prowadzone przez tych samych autorów. Okazuje się, że w teorii plastyczności nieciągłość przemieszczeń może prowadzić do zniszczenia; efektu tego nie da się opisać jej równaniami. Na fakt ten zwrócił już wcześniej uwagę W. PRAGER [4].

W pracy [1] wykazano, że dla płaskiej tarczy ze sztywną inkluzją, poddanej równomiernemu rozciąganiu może wystąpić zjawisko dekohezji, jeśli tarcza ta jest wykonana z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Ponieważ model takiego ciała zawiera pewne osobliwości, przeto w niniejszej pracy zajmiemy się przypadkiem tarczy wykonanej z dowolnego materiału plastycznego charakteryzowanego jednoznacznością między naprężeniami i odkształceniami (oraz funkcją odwrotną).

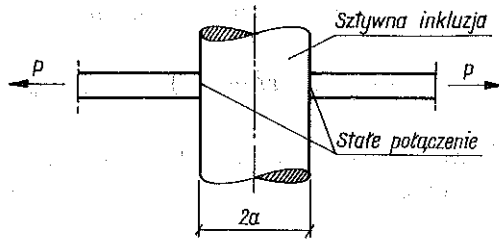
Zawężymy nasze rozważania do praw fizycznych  $\sigma = f(\epsilon)$  o nieograniczonej dziedzinie, gdyż w przeciwnym przypadku już obrany model zawierałby ograniczenie rozwiązania.

Badać będziemy istotny problem, dla jakich praw fizycznych proces odkształceń plastycznych będzie się mógł rozwijać nieograniczenie (do wyczerpania nośności granicznej), a kiedy rozwiązanie uda się zbudować tylko do pewnej, skończonej wartości odkształceń.

Na wstępie obecnej pracy zostaną wyprowadzone ogólne równania, określające rozkład naprężeń i odkształceń dla płaskiej tarczy, wykonanej z dowolnego materiału plastycznego. Opierając się na tych ogólnych zależnościach, w dalszej części pracy będą zbadane szczegółowo tarcze wykonane z materiałów asymptotycznie idealnie plastycznych, jedynych, przy których może wystąpić zjawisko dekohezji. Aby zbadać dla których spośród praw asymptotycznie idealnej plastyczności pojawi się kres rozwiązania ciągłego, zastosowane będą zarówno obliczenia numeryczne jak i rozwinięcia w szeregi. Na koniec zostanie wyprowadzony ogólny warunek wystąpienia nośności rozdzielczej.

## 2. DOWOLNY MATERIAŁ PLASTYCZNY

Analizować będziemy pracę płaskiej, nieograniczonej tarczy z kołową, sztywną inkluzją, rozciąganej w nieskończoności równomiernym obciążeniem  $p$  (tak samo jak w pracy [1]); rys. 1. Tarcza wykonana jest z dowolnego



Rys. 1

materiału scharakteryzowanego równaniem

$$(2.1) \quad \sigma = f(\varepsilon) \quad \text{lub} \quad \varepsilon = g(\sigma),$$

Przy założeniu płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z \equiv 0$ ), warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego we współrzędnych biegunowych przybiera postać:

$$(2.2) \quad \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma^2,$$

gdzie  $\sigma$  oznacza intensywność naprężeń. Wykorzystamy dalej trygonometryczną parametryzację tego warunku typu Nadai-Sokołowskiego [5]:

$$(2.3) \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma \sin \zeta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma \sin \left( \zeta + \frac{\pi}{3} \right).$$

Parametr  $\zeta$  może wewnątrz tarczy przyjmować wartość z przedziału od  $\frac{1}{3} \pi$  do  $\frac{2}{3} \pi$ .

Przyjmijmy prawo podobieństwa dewiatorów odkształceń i naprężeń (teoria odkształceniowa Hencky'ego-Iliuszina), które przy dodatkowym założeniu nieściśliwości materiału ( $\nu = 1/2$ ) można napisać w postaci

$$(2.4) \quad \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\theta} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}.$$

Składowe stanu odkształcenia można wówczas także wyrazić jako funkcję parametru  $\zeta$ :

$$(2.5) \quad \varepsilon_r = -\varepsilon \cos \left( \zeta + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon \cos \zeta,$$

$$\varepsilon_z = -\varepsilon \cos \left( \zeta - \frac{\pi}{3} \right),$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza intensywność odkształceń zdefiniowaną ogólnie

$$(2.6) \quad \varepsilon = \frac{1}{1+\nu} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_r},$$

przy czym  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona, stałą materiałową. Dla materiału nieściśliwego wzór ten przybiera postać:

$$(2.7) \quad \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta}.$$

Aby można było na podstawie wzoru (2.3) i (2.5) wyznaczyć rozkłady naprężeń i odkształceń w badanej tarczy, należy wcześniej wyznaczyć rozkład intensywności naprężeń i odkształceń jako funkcję promienia  $r$ . Dysponujemy w tym celu dwoma równaniami: warunkiem równowagi wewnętrznej

$$(2.8) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

oraz warunkiem nierozdzielności

$$(2.9) \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0.$$

Po wykonaniu podstawień (2.3) i (2.5) otrzymamy układ dwóch równań, w którym oprócz intensywności naprężeń  $\sigma$  i odkształceń  $\varepsilon$  pojawi się trzecia niewiadoma funkcja — parametr  $\zeta(r)$ . Dodatkowym trzecim równaniem będzie prawo fizyczne (2.1) pozwalające wyeliminować jedną z funkcji intensywności.

W dalszych obliczeniach okazuje się dogodne zastosowanie bezwymiarowego promienia logarytmicznego

$$(2.10) \quad \xi = \ln \frac{r}{a},$$

gdzie przez  $a$  oznaczono promień sztywnej inkluzji.

Układ równań otrzymany z (2.8) i (2.9) po wykorzystaniu parametryzacji (2.3) i (2.5) i po wyeliminowaniu intensywności odkształceń, przez podstawienie  $\varepsilon = g(\sigma)$ , można rozwiązać ze względu na pochodne  $d\sigma/d\xi$  i  $d\xi/d\xi$

$$(2.11) \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = - \frac{\sigma g(\sigma) (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \zeta)^2}{2 [g(\sigma) \operatorname{tg}^2 \zeta + \sigma g'(\sigma)]},$$

$$\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{[\sigma g'(\sigma) + \sqrt{3} g(\sigma) \operatorname{tg} \zeta] (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \zeta)}{2 [g(\sigma) \operatorname{tg}^2 \zeta + \sigma g'(\sigma)]}.$$

Symbol  $g'(\sigma)$  oznacza pochodną funkcji  $g(\sigma)$  względem intensywności naprężeń  $\sigma$ . Równania (2.11) nie dają się ogólnie scałkować, lecz ich forma

jest bardzo dogodna do obliczeń numerycznych. Rozwiązania muszą spełniać następujące warunki początkowe na brzegu inkluzji:

$$(2.12) \quad \text{dla } \xi = 0, \quad u = 0 \quad (\varepsilon_\theta = 0), \quad \sigma = \sigma(0).$$

Wynika stąd, że zawsze na brzegu inkluzji dla  $\xi = 0$  parametr  $\zeta$  przyjmuje wartość  $\pi/2$ , a w konsekwencji  $\sigma_r = 2\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma(0)$ . Intensywność naprężeń w tym miejscu  $\sigma(0)$  można traktować w obliczeniach jako parametr swobodny, a odpowiadające mu obciążenie zewnętrzne należy wyznaczyć z warunku na drugim brzegu tarczy:

$$(2.13) \quad \text{dla } \zeta = \infty, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = p,$$

Jak widać parametr  $\zeta$  w nieskończoności jest zawsze równy  $\pi/3$ , przy czym  $\zeta$  jest monotonicznie malejącą funkcją promienia, gdyż  $d\zeta/d\xi < 0$ .

Przez podzielenie stronami równań (2.11) można z nich wyeliminować promień:

$$(2.14) \quad \frac{d\sigma}{d\zeta} = - \frac{\sigma g(\sigma) (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \zeta)}{\sigma g'(\sigma) + \sqrt{3} g(\sigma) \operatorname{tg} \zeta}$$

W razie potrzeby można zamiast intensywności odkształceń wyeliminować intensywność naprężeń przez podstawienie  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

### 3. PRAWO WZMOCNIENIA PLASTYCZNEGO

Rozważmy teraz, dla jakiego prawa fizycznego będzie możliwy do osiągnięcia efekt dekohezji analogiczny jak dla idealnej plastyczności [1].

Do oddzielenia się tarczy od inkluzji może dojść, gdy na promieniu  $a$  ( $\xi = 0$ ) odkształcenia promieniowe  $\varepsilon_r$ , które są pochodną funkcji przemieszczenia promieniowego  $u$ , będą zmierzały do nieskończoności. Dalszy wzrost obciążenia musi wtedy prowadzić do skoku przemieszczenia, czyli oddzielenia tarczy od inkluzji.

Ponieważ dla  $\xi = 0$  parametr  $\zeta$  przyjmuje zawsze wartość  $\pi/2$  przeto z (2.5) wynika, że  $\varepsilon_r$  może zmierzać do nieskończoności tylko w przypadku, gdy intensywność odkształceń w tym miejscu zmierza do nieskończoności.

Przy przyjęciu jakiegokolwiek prawa nieograniczonego wzmocnienia intensywność odkształceń zmierza do nieskończoności tylko wtedy, gdy intensywność naprężeń również zmierza do nieskończoności. Oznaczałoby to, że na promieniu utwierdzenia tarczy zarówno naprężenie promieniowe jak i obwodowe dążą do nieskończoności.

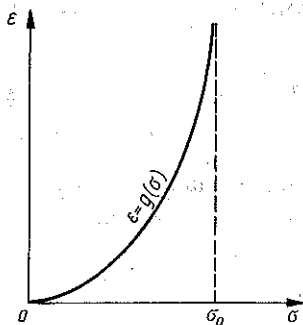
Z drugiej strony wiadomo, że w otoczeniu tego miejsca naprężenia promieniowe są dwa razy większe od obwodowych, gdyż parametr  $\zeta$  jest

równy  $\pi/2$ . Po wykorzystaniu tej zależności w warunku równowagi wewnętrznej (2.8) otrzymamy równanie określające rozkład naprężeń w pewnym otoczeniu inkluzji:

$$(3.1) \quad \sigma_r = \frac{c}{\sqrt{r}},$$

gdzie  $c$  jest stałą całkowania. Widać zatem, że dla  $r = a$  (każdego  $r$  różnego od zera) naprężenie  $\sigma_r$  będzie osiągało wartość skończoną. Wyklucza to możliwość, aby  $\sigma \rightarrow \infty$  i  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , wyklucza więc możliwość wystąpienia dekohezji przy prawie nieograniczonego wzmocnienia plastycznego.

Pojawienie się dekohezji będzie możliwe w przypadku, gdy intensywność odkształceń  $\varepsilon$  będzie zmierzała do nieskończoności przy określonej, skończonej wartości intensywności naprężeń. Ma to miejsce w przypadku idealnej lub asymptotycznie idealnej plastyczności (rys. 2).



Rys. 2

Prawo asymptotyczne stwarza możliwość wystąpienia dekohezji, natomiast to czy do niej dojdzie, zależne jest od faktu, czy intensywność naprężenia osiągnie wartość  $\sigma_0$  tylko na brzegu inkluzji, czy też w całej tarczy równocześnie.

W drugim przypadku otrzymujemy mechanizm swobodnego plastycznego płynięcia odpowiadający nośności granicznej.

#### 4. PRAWO ASYMPTOTYCZNIE IDEALNEJ PLASTYCZNOŚCI

Zajmiemy się teraz analizą, dla jakich praw asymptotycznie idealnej plastyczności omówionych dokładniej w pracy [1], badana przez nas tarcza będzie mogła osiągnąć mechanizm plastycznego zniszczenia, a dla jakich wystąpi efekt dekohezji. Do obliczeń numerycznych, jak również dla celów dalszej analizy, wygodnym będzie takie przyjęcie parametru w spara-

metryzowanym warunkowi plastyczności, aby rósł on w miarę przesuwania się od środka tarczy na zewnątrz oraz aby na brzegu inkluzji był on równy zero. Przyjmijemy

$$(4.1) \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \xi.$$

Parametr  $\varphi$  przebiega w obrębie tarczy wartości od zera dla  $\xi = 0$ , do  $\frac{\pi}{6}$  dla  $\xi \rightarrow \infty$ . Równania (2.11) przyjmują teraz postać

$$(4.2) \quad \frac{d\sigma}{d\xi} = - \frac{\sigma g(\sigma) (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)^2}{2 [g(\sigma) + \sigma g'(\sigma) \operatorname{tg}^2 \varphi]},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = - \frac{[\sigma g'(\sigma) \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3} g(\sigma)] (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{2 [g(\sigma) + \sigma g'(\sigma) \operatorname{tg}^2 \varphi]},$$

a po wyrugowaniu  $\xi$  zamiast (2.14) otrzymamy

$$(4.3) \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\sigma g(\sigma) (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{\sigma g'(\sigma) \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3} g(\sigma)}.$$

Zanim przejdziemy do wyprowadzenia ogólnego kryterium pojawienia się dekohezji rozpatrzmy przykłady. Weźmy pod uwagę prawo asymptotycznie idealnej plastyczności zaproponowane przez A. YLINENA [6]:

$$(4.4) \quad \varepsilon = g(\sigma) = \frac{1}{E} \left[ c\sigma - (1-c)\sigma_0 \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right],$$

gdzie  $c$  oznacza bezwymiarowy współczynnik przyjmujący wartości od 0 do 1, określający stopień odejścia od idealnej plastyczności, dla której jest on równy jedności. Wykorzystanie tego prawa w równaniu (4.3) przy wprowadzeniu bezwymiarowej intensywności naprężeń

$$(4.5) \quad s = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

prorowadzi do wzoru

$$(4.6) \quad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s(1-s) [cs - (1-c) \ln(1-s)] (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{s(1-cs) \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3} (1-s) [cs - (1-c) \ln(1-s)]}.$$

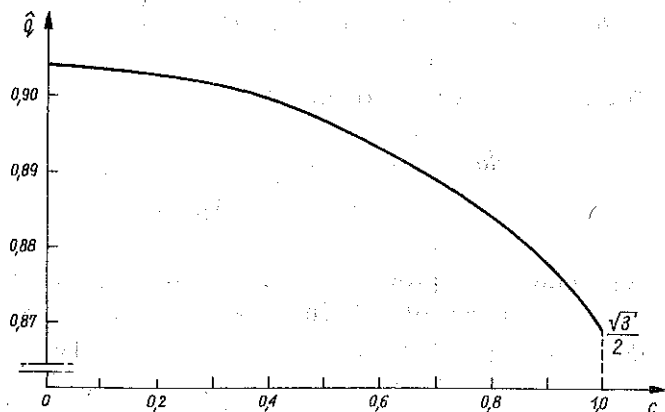
Równanie to było całkowane numerycznie w przedziale  $0 \leq \varphi \leq \pi/6$  przy warunku początkowym

$$(4.7) \quad \text{dla } \varphi = 0 \quad s = 1,$$

co odpowiada założeniu, że na brzegu inkluzji intensywność odkształceń zmierza do nieskończoności. Wartość  $s$ , otrzymana na drugim końcu przedziału dla  $\varphi = \pi/6$  odpowiada bezwymiarowemu obciążeniu zewnętrznemu przyłożonemu w nieskończoności  $q = p/\sigma_0$ .

Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości współczynnika  $c$ . Okazało się, że zawsze  $ds/d\varphi < 0$ , czyli że intensywność naprężeń ze wzrostem  $\varphi$  (promienia) maleje i tylko w miejscu połączenia tarczy z inkluzją jest równa 1.

Wynika stąd, że tylko w tym miejscu odkształcenia będą wzrastały do nieskończoności, poza tym w każdym punkcie tarczy będą one skończone. Można zatem wyciągnąć wniosek, że w tarczy wykonanej z materiału stosującego się do prawa Ylینena (4.4) zawsze dojdzie do dekohezji w miejscu zetknięcia tarczy i sztywnej inkluzji. Na rys. 3 przedstawiono zależność



Rys. 3

nośności rozdzielczej tarczy od współczynnika  $c$ . Dla  $c = 1$  uzyskujemy przejście graniczne do materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Nośność rozdzielcza jest wtedy równa  $\hat{q} = 0,8661$ , co odpowiada wartości nośności wyznaczonej w pracy [1] dla idealnie sprężysto-plastycznego materiału nieściśliwego. Nawet dla prawa najbardziej odbiegającego od idealnej plastyczności dla  $c = 0$ , dojdzie do dekohezji przy obciążeniu  $\hat{q} = 0,9044$ .

W podobny sposób zbadamy zachowanie tarczy wykonanej z materiału stosującego się do „potęgowego” prawa asymptotycznie idealnej plastyczności zaproponowanego w pracy [1]:

$$(4.8) \quad g(\sigma) = \frac{\sigma}{E \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n}$$

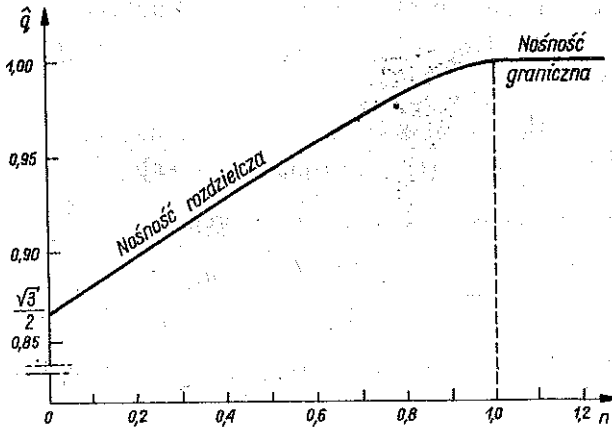


Podstawienie tego prawa do (4.3) prowadzi do równania

$$(4.9) \quad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s(1-s)(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{(1-s+ns) \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3}(1-s)},$$

które również było całkowane numerycznie w przedziale  $0 \leq \varphi \leq \pi/6$  przy warunku początkowym (4.7). Dla różnych wartości wykładnika potęgowego  $n$  obliczono obciążenie na brzegu zewnętrznym tarczy. Wyniki obliczeń przedstawia rys. 4.

Okazuje się, że dla  $n \geq 1$ , w całej tarczy intensywność naprężeń jest równa jedności, czyli że w całej tarczy intensywność odkształceń zmierza do nieskończoności. Osiągnięty zostanie w ten sposób schemat zniszczenia plastycznego, odpowiadający nieograniczonemu płynięciu materiału. Dla  $n < 1$  obciążenie na brzegu zewnętrznym jest mniejsze od jedności, co oznacza,



Rys. 4

że wtedy dojdzie do dekohezji. Dla  $n=0$  otrzymujemy przejście do materiału idealnie sprężysto-plastycznego, dla którego nośność rozdzielcza zgodnie z wynikami pracy [1] i uzyskanymi powyżej  $\hat{q} = \sqrt{3}/2 = 0,8661$ .

## 5. ROZWIĄZANIA W FORMIE SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Najciekawsze wyniki obliczeń numerycznych otrzymano dla „potęgowego” prawa asymptotycznie idealnej plastyczności (4.8), które w zależności od wykładnika  $n$  może prowadzić do dekohezji lub do wystąpienia mechanizmu zniszczenia plastycznego. Ponieważ wyniki te uzyskano w pobliżu osobliwości ( $g(\sigma) \rightarrow \infty$ ), zweryfikujemy je obecnie wykorzystując rozwinięcia rozwiązań w szeregi potęgowe. W pobliżu miejsca połączenia tarczy z inkluzją

funkcja bezwymiarowej intensywności naprężeń  $s$  może być rozwijana zarówno względem parametru  $\varphi$  jak i promienia  $\xi$ .

Zapisując rozwiązanie równania (4.9) w postaci zwyczajnego szeregu potęgowego otrzymujemy

$$(5.1) \quad s(\varphi) = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\sqrt{3}} \varphi + \left[ \frac{5}{6} \alpha_0 + \frac{n\alpha_0^2}{6(1-\alpha_0)} \right] \varphi^2 + \\ + \left[ -\frac{7}{6\sqrt{3}} \alpha_0 - \frac{2n\alpha_0^2}{3\sqrt{3}(1-\alpha_0)} + \right. \\ \left. + \frac{n\alpha_0^2}{18\sqrt{3}(1-\alpha_0)^2} (\alpha_0 - 2n\alpha_0 - 3) \right] \varphi^3 + \dots$$

gdzie symbol  $\alpha_0$  oznacza intensywność naprężeń na brzegu inkluzji, która może być traktowana jako parametr swobodny. Funkcja określająca rozkład parametru  $\varphi$  jest rozwiązaniem drugiego z równań (4.2) po podstawieniu prawa fizycznego (4.8):

$$(5.2) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{[(1-s+ns) \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3}(1-s)] (\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{2 [(1-s+ns) \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - s]}$$

Rozwiązanie to można napisać w formie szeregu

$$(5.3) \quad \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \xi - \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ 1 - \frac{n\alpha_0}{2(1-\alpha_0)} \right] \xi^2 + \dots$$

nie zawierającego wyrazu wolnego, gdyż dla  $\xi = 0$  parametr  $\varphi$  także jest równy zeru.

Do dekohezji może dojść ewentualnie tylko w chwili, gdy bezwymiarowa intensywność naprężeń na brzegu inkluzji będzie równa jedności. Jak łatwo się przekonać przy podstawieniu  $\alpha_0 = 1$  szeregi (5.1) i (5.3) stają się rozbieżne. W celu analizy procesu w chwili dekohezji należy zatem w szeregu (5.1) z góry założyć, że wyraz wolny jest równy 1.

Po wyznaczeniu dwóch następnych otrzymamy

$$(5.4) \quad s(\varphi) = 1 + \frac{n-1}{\sqrt{3}} \varphi + \left[ \frac{(n-1)^2}{3} + \frac{n-1}{n-2} \right] \varphi^2 + \dots$$

Z kolei wyznaczmy zależność parametru  $\varphi$  od promienia logarytmicznego  $\xi$ . W tym celu podstawimy do równania (5.2)  $s = 1$  i zapisując rozwiązanie w formie szeregu, otrzymujemy

$$(5.5) \quad \varphi(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{2(n-1)} \xi + \frac{\sqrt{3}(-n^3 + n^2 + n - 4)}{8(n-1)^3(n-2)} \xi^2 + \dots$$

Ponieważ pochodna  $d\varphi/d\xi$  (5.2) jest dodatnia, przeto funkcja (5.5) musi być funkcją rosnącą. Jest to możliwe tylko dla  $n < 1$  i tylko wtedy powyższe rozwinięcie jest poprawne. Również szereg (5.4) może być wykorzystywany wyłącznie pod warunkiem, że  $n < 1$ . W przeciwnym przypadku intensywność naprężeń wzrosłaby powyżej  $\sigma_0$ , co jest sprzeczne z przyjętym modelem ciała asymptotycznie idealnie plastycznego.

Dla  $n \geq 1$  rozwiązaniem równania (4.9) nie jest szereg (5.4) lecz funkcja  $s \equiv 1$ . Funkcja ta spełnia także tożsamościowo pierwsze z równań (4.2) po podstawieniu prawa fizycznego (4.8). Wówczas intensywność odkształceń w całej tarczy będzie mogła wzrastać do nieskończoności. Pojawi się mechanizm plastycznego płynięcia, a zatem dojdzie do wyczerpania nośności granicznej układu.

## 6. KRYTERIUM DEKOHEZJI DLA ASYMPTOTYCZNIE IDEALNEJ PLASTYCZNOŚCI

W punkcie 3 wykazano, że do dekohezji w układzie tarczowym może dojść tylko w przypadku wykonania tarczy z materiału podlegającego prawu idealnej, bądź asymptotycznie idealnej plastyczności. Wyniki obliczeń numerycznych, jak również przeprowadzona uprzednio analiza na podstawie rozwinięcia w szeregi potęgowe wskazują na to, że nie każde prawo asymptotycznie idealnej plastyczności prowadzić będzie do dekohezji.

Ustalimy teraz kryterium, które to prawo musi spełniać, aby niemożliwy był schemat płynięcia plastycznego materiału.

Weźmy pod uwagę równanie (4.3), które napiszemy w postaci

$$(6.1) \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\sigma(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi - 1)}{\sigma \frac{g'(\sigma)}{g(\sigma)} \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{3}}$$

Rozwiązanie tego równania, funkcja  $\sigma(\varphi)$  nie może dla żadnego  $\varphi$  przekroczyć wartości  $\sigma_0$ . Jeżeli ma dojść do dekohezji, to na brzegu inkluzji dla  $\varphi = 0$  intensywność naprężeń jest równa  $\sigma_0$ , natomiast w każdym innym miejscu tarczy dla  $\varphi > 0$  musi ona być mniejsza. Sformułujemy zatem warunek dekohezji następująco:

$$(6.2) \quad \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \sigma_0 \\ \varphi \rightarrow 0 \\ g(\sigma) \rightarrow \infty}} d\sigma/d\varphi < 0.$$

Po wykorzystaniu (6.1) otrzymamy

$$(6.3) \quad \frac{-\sigma_0}{\sigma_0 \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \sigma_0 \\ \varphi \rightarrow 0 \\ g(\sigma) \rightarrow \infty}} \left[ \frac{g'(\sigma)}{g(\sigma)} \operatorname{tg} \varphi \right] + \sqrt{3}} < 0,$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie graniastym jest w granicy wyrażeniem typu  $\frac{\infty}{\infty} \cdot 0$ , przeto musimy zastosować regułę de L'Hospitala otrzymując warunek

$$(6.4) \quad \frac{2 - \frac{g(\sigma_0)g''(\sigma_0)}{[g'(\sigma_0)]^2}}{1 - \frac{g(\sigma_0)g''(\sigma_0)}{[g'(\sigma_0)]^2}} > 0,$$

gdzie kreskami u góry oznaczono różniczkowanie względem  $\sigma$ . Ponieważ mianownik tego wyrażenia, który jest równy pochodnej ułamka  $(g(\sigma_0))/(g'(\sigma_0))$  jest dla wklęsłych charakterystyk materiałowych (rys. 2) zawsze ujemny, więc warunek aby doszło do dekohezji przyjmie postać

$$(6.5) \quad \frac{g(\sigma_0)g''(\sigma_0)}{[g'(\sigma_0)]^2} > 2.$$

Spośród wszystkich praw asymptotycznie idealnej plastyczności, tylko spełniające warunek

$$(6.6) \quad \frac{g(\sigma_0)g''(\sigma_0)}{[g'(\sigma_0)]^2} \leq 2,$$

stwarzają możliwość otrzymania schematu płynięcia plastycznego. Pozostałe (6.5) będą prowadziły do wystąpienia dekohezji.

Zbadamy według tego kryterium prawa podane w pracy [1]. Zaczynamy od prawa Ylлина (4.4) i otrzymujemy

$$(6.7) \quad \frac{g(s)g''(s)}{[g'(s)]^2} = \frac{[cs - (1-c)\ln(1+s)](1-c)}{(1-cs)^2}$$

Granica tej funkcji przy  $s \rightarrow 1$  jest nieskończenie wielka, zatem bez względu na to, jaką wartość przyjmuje parametr  $c$ , zawsze jest spełniony warunek (6.5), czyli zawsze dojdzie do dekohezji. Potwierdzają to wyniki obliczeń numerycznych przytoczone w punkcie 4.

Jeżeli przyjmiemy prawo zaproponowane przez W. PRAGERA [7]:

$$(6.8) \quad g(\sigma) = \frac{\sigma_0}{E} \operatorname{Ar} \operatorname{tg} h\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \frac{\sigma_0}{2E} \ln \frac{1+s}{1-s},$$

to funkcja występująca w kryterium dekohezji będzie miała postać

$$(6.9) \quad \frac{g(s)g''(s)}{[g'(s)]^2} = s \ln \frac{1+s}{1-s},$$

a jego granica przy  $s$  zmierzającym do 1 będzie równa nieskończoności.

Dla tarcz wykonanych z takiego materiału również zawsze dojdzie do dekohezji.

Nieco inaczej wygląda sprawa w przypadku prawa „potęgowego” (4.8). Otrzymujemy

$$(6.10) \quad \frac{g(s)g''(s)}{[g'(s)]^2} = \frac{s(n-1)(1-s) + s(n+1)(1-s+ns)}{(1-s+ns)^2},$$

a w granicy

$$(6.11) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{g(s)g''(s)}{[g'(s)]^2} = \frac{n+1}{n}.$$

Aby warunek dekohezji (6.5) został spełniony:

$$(6.12) \quad \frac{n+1}{n} > 2,$$

wykładnik potęgowy musi być mniejszy od 1. W przypadku  $n \geq 1$  spełniony jest warunek (6.6), czyli możliwe jest zniszczenie tarczy wskutek utworzenia się mechanizmu zniszczenia plastycznego. Jak widać pokrywa się to z wynikami obliczeń numerycznych w punkcie 4 oraz z wnioskami z analizy opartej o rozwinięcia rozwiązań w szeregi potęgowe w punkcie 5.

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Przyjęcie prawa fizycznego w postaci równania dopuszczającego możliwość nieograniczonego wzrostu odkształcenia przy pewnej skończonej wartości naprężenia, jak to ma miejsce w przypadku idealnej lub asymptotycznie idealnej plastyczności, nie zawsze stwarza możliwość powstania mechanizmu zniszczenia plastycznego układu. W przypadku tarczy z kołową sztywną inkluzją z materiału idealnie sprężysto-plastycznego zawsze występują niedopuszczalne nieciągłości przemieszczeń na brzegu inkluzji prowadzące do dekohezji — zanim jeszcze cała tarcza zdąży się uplastyczyć [1].

Nie każde prawo asymptotycznie idealnej plastyczności daje ten sam efekt. Będzie to miało miejsce tylko dla praw spełniających warunek sformułowany w punkcie 6, co potwierdzają obliczenia numeryczne i analiza z pomocą szeregów potęgowych. Warto zwrócić uwagę na fakt, że wyniki dla praw Ylinena, Pragera i „potęgowego” otrzymane dla tarczy w niniejszej pracy, pokrywają się z wynikami dla układów jednoosiowych w pracy [1].

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*, Int. J. Solids Structures, 9, 1973.

2. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *On the termination of the process of finite plastic deformation*, Conf. Finite Deformations in Plasticity, Euromech 54, 1974.
3. M. ŻYCZKOWSKI, K. SZUWALSKI, *Decohesive carrying capacity in thermal stress problems*, Trans. 3rd Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. 5, part. L, Paper L2/4, London 1975.
4. W. PRAGER, *Discontinuous fields of plastic stress and flow*, Proc. Sec. U.S. Congr. Appl. Mech., 1955.
5. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
6. A. YLINEN, *A method of determining the buckling stress and required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range*. Mem. Ass. Int. Ponts Charp., 16, 1956.
7. W. PRAGER, *On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state*, Proc. V-th Int. Congr. Appl. Mech., 1938.

## РЕЗЮМЕ

## ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ РАСЦЕПЛЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ДИСКА С КРУГОВОЙ ЖЕСТКОЙ ИНКЛЮЗИЕЙ

В работе занимаются неограниченным кольцевым диском с жесткой инклюзией, подвергнутым равномерному растяжению в бесконечности. Учитывая, что диск выполнен из асимптотически идеально-пластичного материала, рассматривается возможность получения для принятых зависимостей  $\sigma = g(\epsilon)$  решения проблемы несущей способности, соединенное с выступлением некоторой схемы пластической текучести. Когда это оказалось невозможным определена несущая способность расщепления диска, т.е. нагрузка при которой выступит предел непрерывного решения. Проанализированы чаще всего применяемые законы асимптотически идеальной пластичности Прагера и Илинена, а также предлагаемый Шувальским и Жичковским [1] степенный закон. Применены численные расчеты, а также анализ опирающийся на степенные ряды. В конечном счете сформулировано общее условие, которое должно быть выполнено законом асимптотически идеальной пластичности чтобы в диске не выступил механизм пластического разрушения.

## SUMMARY

INFLUENCE OF MATERIAL CHARACTERISTICS  
ON DECOHESIVE CARRYING CAPACITY OF AN INFINITE PLATE  
WITH A CIRCULAR RIGID INCLUSION

Infinite plate with a circular rigid inclusion subject to uniform tension at infinity is considered. Assuming the plate to be made of an asymptotically perfectly plastic material, the possibility is considered of solving carrying capacity problem (connected with a certain mechanism of plastic collapse) for various characteristics  $\sigma = g(\epsilon)$ . When it turns out to be impossible, the decohesive carrying capacity (the loading at which continuous solution ceases to exist) is evaluated. The most commonly used laws of asymptotically perfect plasticity

given by W. Prager and A. Ylinen, as well as a power law proposed by K. SZUWALSKI and M. ŻYCKOWSKI [1], are investigated. Numerical calculations and power series are used. Finally, a general condition is formulated which must be satisfied by the law of asymptotically perfect plasticity, in order to avoid the mechanism of plastic collapse and to reduce the problem to the decohesive carrying capacity of the plate.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1984 r.*

---