

OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA UKŁADU PRĘTÓW Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWOŚCI

ANNA FORYŚ i ANDRZEJ FORYŚ (KRAKÓW)*

Tematem pracy jest analiza wpływu kształtu prętów płaskiego układu drgającego na amplitudy drgań w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego. Masa całkowita układu jest ustalona. W opisie uwzględniono nieliniowe tłumienie i nieliniową bezwładność. Badano wpływ mas skupionych, umieszczonych w połączeniach przegubowych na amplitudę optymalną przy rezonansie wewnętrznym. Pokazano, że można odpowiednio dobrać wartości mas w przegubach oraz wartości współczynników tłumienia tak, aby zmniejszyć wartość optymalnej amplitudy oraz zawęzić obszar częstości, w którym występuje rezonans wewnętrzny. Przez zmianę rozmieszczenia mas w układzie można niepożądane efekty przesunąć do innych obszarów częstości. Wyniki pracy mają charakter jakościowy i obrazują istotne zjawiska o charakterze autoparametrycznym. Można mieć nadzieję, że uzyskane rezultaty znajdą zastosowanie praktyczne, ponieważ układy prętowe są elementami wielu konstrukcji i urządzeń.

1. WSTĘP

Rozważania niniejszej pracy są kontynuacją zagadnień podjętych w pracach [1, 2 i 3] i dotyczących zjawisk rezonansowych w układach prętowych. W wymienionych pracach poszukiwano amplitud w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego, występującego w układach o wielu stopniach swobody. W opisie uwzględniano sprzężenie elementów układu poprzez wewnętrzne siły podłużne, które są siłami poprzecznymi na końcach sąsiednich prętów. Jeżeli niektóre pręty są obciążone siłami harmonicznymi oraz jeśli zachodzą odpowiednie związki pomiędzy częstościami własnymi prętów, to w rozważanym układzie występuje zarówno rezonans główny, jak i rezonans o charakterze autoparametrycznym, którego istotne cechy są identyczne z cechami rezonansu parametrycznego. Aby otrzymać ograniczone wartości amplitudy drgań w przypadku rezonansu parametrycznego, konieczne jest uwzględnienie wyrazów nieliniowych [4 i 5].

Praca [3] dotyczy optymalizacji parametrycznej przy rezonansie wewnętrznym, w układzie trzech prętów o zmiennych przekrojach połączonych przegubowo. Obecna praca jest jej kontynuacją. Przedmiotem naszych rozważań

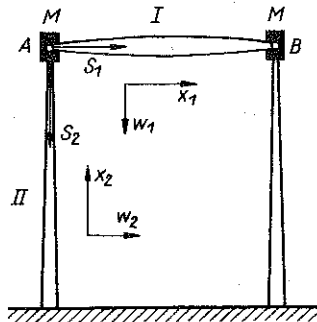
* Praca została wykonana w ramach CPBP02,01 temat 6.3.

jest podobny układ prętów z tym zastrzeżeniem, że w połączeniach przegubowych umieszczone są dodatkowe masy skupione M . W równaniach ruchu występują dwa rodzaje nieliniowości natury geometrycznej: nieliniowe tłumienie i nieliniowa bezwładność [2]. W pracy przeprowadzamy analizę wpływu kształtu prętów na amplitudy, w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego przy stałej masie układu. Poszukujemy optymalnych wartości współczynników (zmiennne optymalizacji) określających kształt prętów w danej klasie funkcji, tj. takich wartości współczynników, przy których amplitudy drgań (funkcje celu) elementów wymuszanych parametrycznie mają wartość minimalną. Głównym problemem jest rozłożenie mas elementów układu w ten sposób, aby funkcja celu osiągała minimum.

Omawiany problem może mieć zastosowanie praktyczne; elementy konstrukcyjne to często układy prętowe lub układy belek połączonych przegubowo albo w sposób sztywny. Przy odpowiednich dostrojeniach może wystąpić rezonans wewnętrzny o charakterze parametrycznym. Zmieniając rozmieszczenie mas układu można niepożądane efekty przesunąć w inne obszary częstości lub znacznie zmniejszyć.

2. RÓWNANIA RUCHU

Przyjmujemy następujące oznaczenia ($i = 1, 2$ numeruje pręty): l_i są długościami prętów, E_i modułami Younga, I_i są momentami bezwładności pola przekroju, A_i polami przekrojów prętów, ρ_i oznaczają gęstości materiału, $m_i = \rho_i A_i$, M_i masy prętów, M masę skupioną, w_i ugięcia prętów, u_i przemieszczenia podłużne, a S_i siły podłużne. Rozważany układ składa się z trzech prętów o zmiennych przekrojach, połączonych przegubowo (rys. 1). W przegubach znajdują się masy skupione M . Sprężenie elementów układu uwzględniamy za pomocą wewnętrznych sił podłużnych działających na pręty; siły te są siłami poprzecznymi na końcach sąsiednich prętów. Rozważamy jedynie poprzeczne drgania symetryczne układu. Węzły układu przemieszczają się tylko o małe przemieszczenia podłużne $u_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i$, wynikające



Rys. 1. Układ prętowy

z ugięć. W pracy [2] podano układ równań ruchu rozważanego układu prętów, lecz elementy I i II były prętami pryzmatycznymi. Równania otrzymano na podstawie równań Lagrange'a. W ten sam sposób można uzyskać równania ruchu dla prętów o zmiennych przekrojach. Tak więc obecnie ruch układu opisują równania

$$(2.1) \quad \begin{aligned} A\ddot{T}_1 + BT_1 - CT_1T_2 + D\dot{T}_1 + (F + F_M)(T_1\dot{T}_1^2 + T_1^2\ddot{T}_1) + E\dot{T}_1T_1^2 &= \\ &= \Gamma_1 \sin \omega t, \\ \bar{A}\ddot{T}_2 + \bar{B}T_2 + \bar{C}T_1T_2 + \bar{D}\dot{T}_2 + (\bar{F} + \bar{F}_M)(T_2\dot{T}_2^2 + T_2^2\ddot{T}_2) + \bar{E}\dot{T}_2T_2^2 &= \\ &= \Gamma_2 \sin \omega t, \end{aligned}$$

gdzie na podstawie [2] oraz [3]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A &= \int_0^{l_1} m_1(x_1) Y_1^2(x_1) dx_1, & \bar{A} &= \int_0^{l_2} m_2(x_2) Y_2^2(x_2) dx_2, \\ B &= E_1 \int_0^{l_1} I_1(x_1) [Y_1''(x_1)]^2 dx_1, & \bar{B} &= E_2 \int_0^{l_2} I_2(x_2) [Y_2''(x_2)]^2 dx_2, \\ C &= \frac{\partial}{\partial x_2} [E_2 I_2(x_2) Y_2''(x_2)] \Big|_{x_2=l_2} \int_0^{l_1} [Y_1'(x_1)]^2 dx_1, \\ \bar{C} &= \frac{\partial}{\partial x_1} [E_1 I_1(x_1) Y_1''(x_1)] \Big|_{x_1=0} \int_0^{l_2} [Y_2'(x_2)]^2 dx_2, \\ D &= \eta_1 \int_0^{l_1} I_1(x_1) [Y_1''(x_1)]^2 dx_1, & \bar{D} &= \eta_2 \int_0^{l_2} I_2(x_2) [Y_2''(x_2)]^2 dx_2, \\ E &= k \left\{ \int_0^{l_1} [Y_1'(x_1)]^2 dx_1 \right\}^2, & \bar{E} &= k \left\{ \int_0^{l_2} [Y_2'(x_2)]^2 dx_2 \right\}^2, \\ F &= \int_0^{l_1} m_1(x_1) \left[\int_{x_1}^{l_1/2} (Y_1')^2 d\xi \right]^2 dx_1, & \bar{F} &= \int_0^{l_2} m_2(x_2) \left[\int_0^{x_2} (Y_2')^2 d\xi \right]^2 dx_2, \\ F_M &= M \left[\int_0^{l_1} (Y_1')^2 dx_1 \right]^2, & \bar{F}_M &= M \left[\int_0^{l_2} (Y_2')^2 dx_2 \right]^2, \\ \Gamma_i &= \int_0^{l_i} \gamma_i Y_i(x_i) dx_i, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach η i k są współczynnikami tłumienia oraz γ oznacza amplitudę zewnętrznego obciążenia.

Wyrazy nieliniowe w równaniach (2.1) są związane z siłami nieliniowymi natury geometrycznej [1, 2, 3]. Siły te wynikają z przemieszczeń podłużnych

$u_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i$ węzłów A, B układu oraz z przemieszczeń podłużnych

$u_i(x_i, t) = \frac{1}{2} \int_0^{x_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 d\xi_i$ dowolnych przekrojów elementów I i II. Założono również, że oprócz tłumienia wewnętrznego występują siły tłumienia P_i związane z przemieszczeniem przegubów:

$$(2.3) \quad P_i = -k\dot{u}_i.$$

Bierzemy również pod uwagę siły bezwładności ΔS_i związane z małymi przemieszczeniami podłużnymi węzłów A i B:

$$(2.4) \quad \Delta S_i = -M\ddot{u}_i.$$

Małe siły bezwładności, które dają ciągłe obciążenie prętów wynikają z przemieszczeń podłużnych $u_i(x_i, t)$ i mają postać

$$(2.5) \quad n_i(x_i, t) = -m_i \frac{\partial^2 u_i(x_i, t)}{\partial t^2}.$$

Wymienione tutaj nieliniowości uwzględniono opierając się na monografii W. W. BOLOTINA [4].

Obecność mas skupionych M przejawia się jedynie za pośrednictwem siły ΔS_i , ponieważ rozważamy drgania symetryczne (węzły układu podlegają małym przemieszczeniom podłużnym). Uwzględnienie sił ΔS_i i obciążeń ciągłych $n_i(x_i, t)$ prowadzi w równaniach ruchu do wystąpienia wyrazów nieliniowych o współczynnikach: F_M , $F_{\bar{M}}$, F i \bar{F}_M . Układ równań (2.25) pracy [3] jest szczególnym przypadkiem układu równań (2.1). Nawet gdy przyjmiemy $M = 0$, w równaniach ruchu pozostaną wyrazy o współczynnikach F i \bar{F} , czyli dwa rodzaje nieliniowości: nieliniowe tłumienie i nieliniowa bezwładność.

W pracy [2] rozwiązano układ równań (2.1) w stanie ustalonym rezonansu wewnętrznego. Metoda rozwiązania została zaczerpnięta z monografii A. TONDLA [6]. Metodę można zastosować także w przypadku prętów o zmiennych przekrojach. Określmy zatem nowe zmienne W_s i V_s w sposób następujący:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} 2W_s &= \frac{\dot{T}_s}{i\omega_{0s}} + T_s, \\ 2V_s &= -\frac{\dot{T}_s}{i\omega_{0s}} + T_s, \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Uzyskujemy wówczas układ równań (32) pracy [2]:

$$\dot{W}_s - i\omega_{0s} W_s = \frac{1}{2i\omega_{0s}} F_s(W_k, V_k),$$

$$(2.7) \quad \dot{V}_s + i\omega_{0s} V_s = -\frac{1}{2i\omega_{0s}} F_s(W_k, V_k), \quad s, k = 1, 2.$$

gdzie $\omega_{01}^2 = \frac{B}{A}$, $\omega_{02}^2 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$ oraz

$$(2.8) \quad F_1(W_k, V_k) = \frac{C}{A} (W_1 + V_1)(W_2 + V_2) - [(F + F_M)/A] \times \\ \times [-\omega_{01}^2 (W_1 - V_1)^2 (W_1 + V_1) + i\omega_{01} (W_1 + V_1)^2 (\dot{W}_1 - \dot{V}_1)] - \\ - \frac{D}{A} i\omega_{01} (W_1 - V_1) \left[1 + \frac{E}{D} (W_1 + V_1)^2 \right] + \frac{F_1}{A} \sin \omega t, \\ F_2(W_k, V_k) = -\frac{\bar{C}}{\bar{A}} (W_1 + V_1)(W_2 + V_2) - [(\bar{F} + \bar{F}_M)/\bar{A}] \times \\ \times [-\omega_{02}^2 (W_2 - V_2)^2 (W_2 + V_2) + i\omega_{02} (W_2 + V_2)^2 (\dot{W}_2 - \dot{V}_2)] - \\ - \frac{\bar{D}}{\bar{A}} i\omega_{02} (W_2 - V_2) \left[1 + \frac{\bar{E}}{\bar{D}} (W_2 + V_2)^2 \right].$$

Zakładamy, że spełnione są równości przybliżone

$$(2.9) \quad \omega \approx \omega_{01}, \\ \omega_{01} \approx 2\omega_{02}.$$

Ponadto przyjmujemy, że wymuszenie zewnętrzne działa na element I układu.

Poszukujemy rozwiązania w stanie ustalonym układu równań (2.7) w postaci

$$(2.10) \quad W_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad V_1 = A_1^* e^{-i\omega t}, \\ W_2 = A_2 e^{i\frac{\omega}{2}t}, \quad V_2 = A_2^* e^{-i\frac{\omega}{2}t}.$$

Rozwiązania powyższe są poprawne w pobliżu częstości rezonansowej ω_{01} . Gdy rozważamy zależność amplitud od częstości, to drugi z warunków (2.9) jest spełniony ściśle, natomiast ω zmieniamy w otoczeniu ω_{01} , pozostając w pobliżu rezonansu wewnętrznego.

Na wielkość $x_1 = A_1 A_1^*$, proporcjonalną do kwadratu amplitudy drgań elementu I, otrzymujemy równanie trzeciego stopnia:

$$(2.11) \quad ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0,$$

gdzie

$$a = \frac{(F + F_M)^2}{A^2} (\omega_{01} - 3\omega)^2 + \frac{E^2}{A^2},$$

$$(2.12) \quad b = \frac{2DE}{A^2} - 4 \frac{F + F_M}{A} (\omega - \omega_{01}) (\omega_{01} - 3\omega),$$

$$c = 4(\omega - \omega_{01})^2 + \frac{D^2}{A^2}, \quad d = -\Gamma_1^2 / 4A^2 \omega_{01}^2.$$

Amplituda drgań R_1 elementu I jest określona wzorem $R_1 = 2\sqrt{x_1}$.

Element II układu drgającego jest wzbudzany parametrycznie przez wewnętrzne siły sprzęgające S_2 . Na wielkość $x_2 = A_2 A_2^{\frac{1}{2}}$ uzyskujemy równanie

$$(2.13) \quad a' x_2^2 + b' x_2 + c' = 0,$$

gdzie

$$(2.14) \quad \begin{aligned} a' &= \left(\frac{\bar{F} + \bar{F}_M}{\bar{A}} \right)^2 \left(\omega_{02} - \frac{3}{2} \omega \right)^2 + \left(\frac{\bar{E}}{\bar{A}} \right)^2, \\ b' &= 4 \frac{\bar{F} + \bar{F}_M}{\bar{A}} \left(\omega_{02} - \frac{\omega}{2} \right) \left(\omega_{02} - \frac{3}{2} \omega \right) + 2 \frac{\bar{D}\bar{E}}{\bar{A}^2}, \\ c' &= 4 \left(\omega_{02} - \frac{\omega}{2} \right)^2 + \left(\frac{\bar{D}}{\bar{A}} \right)^2 - \left(\frac{\bar{C}}{\bar{A}} \right)^2 \frac{x_1}{\omega_{02}^2}. \end{aligned}$$

Amplituda drgań elementu II jest równa $R_2 = 2\sqrt{x_2}$.

3. OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA

Funkcją celu w rozważanym zagadnieniu optymalizacji parametrycznej jest amplituda drgań elementu II, wymuszanego parametrycznie siłami podłużnymi S_2 . Zmiennymi optymalizacji są parametry, które określają kształt prętów w przyjętej klasie funkcji. Będziemy poszukiwać takich parametrów kształtu, aby w stanie rezonansu wewnętrznego, tzn. przy spełnieniu warunków (2.9), amplituda elementu II przyjmowała wartość minimalną, przy ustalonej masie układu drgającego: $2M + M_1 + 2M_2 = \text{const}$.

Zakładamy, że pręty posiadają przekrój kwadratowy, że bok a_1 pręta I zmienia się według paraboli drugiego stopnia; natomiast bok a_2 pręta II zmienia się liniowo. Wówczas mamy [3]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} a_1(\alpha_1, \kappa_1) &= \alpha_1 \left\{ 4\kappa_1 \left(\frac{x_1^2}{l_1^2} - \frac{x_1}{l_1} \right) + 1 \right\} = \alpha_1 \bar{a}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1}, \\ a_1(0) &= \alpha_1, \quad a_1\left(\frac{l_1}{2}\right) = \beta_1, \quad \kappa_1 \in (-\infty, 1), \end{aligned}$$

$$a_2(\alpha_2, \kappa_2) = \alpha_2 \left\{ 1 - \kappa_2 \frac{x_2}{l_2} \right\} = \alpha_2 \bar{a}_2, \quad \kappa_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2},$$

$$a_2(0) = \alpha_2, \quad a_2(l_2) = \beta_2, \quad \kappa_2 \in (-\infty, 1).$$

Na podstawie wzorów (3.1) obliczono według (2.2) współczynniki równania (2.1) jako funkcje parametrów kształtu: $\kappa_1, \kappa_2, \alpha_1, \alpha_2$. Przytaczamy najpierw współczynniki, które były podane w pracy [3]

$$A(\alpha_1, \kappa_1) = \varrho_1 l_1 \alpha_1^2 \int_0^1 \bar{a}_1^2 Y_1^2 dx = \varrho_1 l_1 \alpha_1^2 f_A(\kappa_1),$$

$$B(\alpha_1, \kappa_1) = \frac{E_1 \alpha_1^4}{12l_1^3} \int_0^1 \bar{a}_1^4 Y_1''^2 dx = \frac{E_1 \alpha_1^4}{l_1^3} f_B(\kappa_1),$$

$$D(\alpha_1, \kappa_1) = \frac{\eta_1 \alpha_1^4}{12l_1^3} \int_0^1 \bar{a}_1^4 Y_1''^2 dx = \frac{\eta_1 \alpha_1^4}{l_1^3} f_B(\kappa_1),$$

$$E = \frac{k}{l_1^2} \left\{ \int_0^1 Y_1^2 dx \right\}^2 = \frac{k}{l_1^2} f_E,$$

$$\bar{E} = \frac{k}{l_2^2} \left\{ \int_0^1 Y_2^2 dx \right\}^2 = \frac{k}{l_2^2} f_{\bar{E}},$$

$$(3.2) \quad \Gamma_1 = \gamma_1 l_1 \int_0^1 Y_1 dx,$$

$$\bar{A}(\alpha_2, \kappa_2) = \varrho_2 l_2 \alpha_2^2 \int_0^1 \bar{a}_2^2 Y_2^2 dx = \varrho_2 l_2 \alpha_2^2 f_{\bar{A}}(\kappa_2),$$

$$\bar{B}(\alpha_2, \kappa_2) = \frac{E_2 \alpha_2^4}{12l_2^3} \int_0^1 \bar{a}_2^4 Y_2''^2 dx = \frac{E_2 \alpha_2^4}{l_2^3} f_{\bar{B}}(\kappa_2),$$

$$\bar{D}(\alpha_2, \kappa_2) = \frac{\eta_2 \alpha_2^4}{12l_2^3} \int_0^1 \bar{a}_2^4 Y_2''^2 dx = \frac{\eta_2 \alpha_2^4}{l_2^3} f_{\bar{B}}(\kappa_2),$$

$$\bar{C} = E \left[\frac{dJ(x_1)}{dx_1} Y_1''(x_1) + J(x_1) Y_1'''(x_1) \right]_{x_1=0} \frac{1}{l_2} \int_0^1 [Y_2]^2 dx.$$

Należy jeszcze obliczyć współczynniki F , \bar{F} , F_M i \bar{F}_M , jako funkcje parametrów kształtu. Współczynniki te są związane z wyrazami nieliniowymi, które w literaturze [7] noszą nazwę nieliniowej bezwładności.

Ponieważ

$$(3.3) \quad m_1 = \varrho_1 A_1 = \varrho_1 \alpha_1^2 \left[1 + 4\kappa_1 \left(\frac{x_1^2}{l_1^2} - \frac{x_1}{l_1} \right) \right]^2,$$

oraz

$$(3.4) \quad \int_{x_1}^{\frac{l_1}{2}} (Y_1')^2 d\xi = \frac{\pi^2}{2l_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{l_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{l_1} \right),$$

gdzie [1] $Y_1(x_1) = \sin \frac{\pi x_1}{l_1}$ jest formą drgań elementu I, przeto otrzymujemy

$$(3.5) \quad F = \varrho_1 \alpha_1^2 \int_0^{l_1} \left[1 + 8\kappa_1 \left(\frac{x_1^2}{l_1^2} - \frac{x_1}{l_1} \right) + 16\kappa_1^2 \left(\frac{x_1^4}{l_1^4} - 2 \frac{x_1^3}{l_1^3} + \frac{x_1^2}{l_1^2} \right) \right] \frac{\pi^4}{4l_1^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{l_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{l_1} \right)^2 dx_1.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.6) \quad x = \frac{x_1}{l_1},$$

$$g(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x,$$

możemy napisać (3.5) w postaci

$$(3.7) \quad F = \frac{\pi^4 \varrho_1 \alpha_1^2}{4l_1} \left[\int_0^1 g^2(x) dx + 8\kappa_1 \int_0^1 x(x-1) g^2(x) dx + 16\kappa_1^2 \int_0^1 x^2(x^2-2x+1) g^2(x) dx \right] =$$

$$= \frac{\pi^4 \varrho_1 \alpha_1^2}{4l_1} [(4,534 \cdot 10^{-2}) - 2,324 \cdot 10^{-2} \kappa_1 + 4,652 \cdot 10^{-3} \kappa_1^2].$$

Przyjmując natomiast [1]

$$(3.8) \quad Y_2(x_2) = -\cos \lambda_1 \left[\sin \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} - \text{sh} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \right]$$

$$-\operatorname{tg} \lambda_1 \left(\cos \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} - \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \right) \Big],$$

gdzie $\lambda_1 = 3,9266$, obliczamy współczynnik \bar{F} :

$$(3.9) \quad \bar{F} = \int_0^{l_2} m_2(x_2) \left[\int_0^{x_2} (Y_2')^2 d\xi \right]^2 dx_2 = \\ = \varrho_2 \alpha_2^2 \int_0^{l_2} \left(1 - 2 \frac{\kappa_2 x_2}{l_2} + \frac{\kappa_2^2 x_2^2}{l_2^2} \right) \varphi^2(x_2) dx_2,$$

ponieważ $m_2(x_2) = \varrho_2 A_2 = \varrho_2 \alpha_2^2 \left(1 - \frac{\kappa_2 x_2}{l_2} \right)^2$ oraz wprowadzono oznaczenie

$$(3.10) \quad \varphi(x_2) = \int_0^{x_2} (Y_2')^2 d\xi = \frac{Z_4}{l_2} \left(\frac{x_2}{l_2} - 2Z_2 + \frac{Z_1}{4} \sin \frac{2\lambda_1 x_2}{l_2} + \right. \\ \left. + Z_2 \sin^2 \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} + \frac{Z_3}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} - Z_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} - \right. \\ \left. - Z_1 \sin \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} - Z_3 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \cos \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} + \right. \\ \left. + 2Z_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \cos \frac{\lambda_1 x_2}{l_2} \right),$$

gdzie

$$(3.11) \quad Z_1 = \frac{1}{\lambda_1} (1 - \operatorname{tg}^2 \lambda_1), \quad Z_2 = \frac{\operatorname{tg} \lambda_1}{\lambda_1}, \quad Z_3 = \frac{1}{\lambda_1} (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda_1), \\ Z_4 = \lambda_1^2 \cos^2 \lambda_1.$$

Stąd

$$(3.12) \quad \bar{F} = \frac{\varrho_2 \alpha_2^2 Z_4^2}{l_2} \left[\int_0^1 \varphi^2(x l_2) dx - 2\kappa_2 \int_0^1 x \varphi^2(x l_2) dx + \right. \\ \left. + \kappa_2^2 \int_0^1 x^2 \varphi^2(x l_2) dx \right] = \\ = \frac{\varrho_2 \alpha_2^2 Z_4^2}{l_2} (0,11089 - 0,17116 \kappa_2 + 0,070627 \kappa_2^2).$$

Pozostałe współczynniki F_M i \bar{F}_M zostały podane w pracy [2] i są następujące:

$$(3.13) \quad F_M = 24,3523 \frac{M}{l_1^2}, \quad \bar{F}_M = 33,087 \frac{M}{l_2^2}.$$

W ten sposób zostały podane współczynniki (2.12) równania (2.11) oraz współczynniki (2.14) równania kwadratowego (2.13), jako funkcje parametrów kształtu κ_1 , κ_2 , α_1 i α_2 .

Obecnie zajmiemy się warunkami rezonansowymi (2.9) oraz warunkiem, który wynika ze stałości masy układu drgającego. Warunki (2.9) mają postać

$$(3.14) \quad \omega \approx \omega_{01} = \sqrt{\frac{B(\alpha_1, \kappa_1)}{A(\alpha_1, \kappa_1)}},$$

$$\omega_{01} = 2\omega_{02} = 2 \sqrt{\frac{\bar{B}(\alpha_2, \kappa_2)}{\bar{A}(\alpha_2, \kappa_2)}}.$$

Na podstawie wzorów (3.2) drugi z powyższych warunków można przedstawić następująco:

$$(3.15) \quad \frac{f_{\bar{A}}}{f_{\bar{B}}} - 4\mu \frac{f_A}{f_B} = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.16) \quad \mu = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^4,$$

oraz obliczyliśmy na podstawie (3.1) i (3.2):

$$(3.17) \quad \begin{aligned} f_A(\kappa_1) &= 0,391\kappa_1^2 - 0,896\kappa_1 + 0,500, \\ f_B(\kappa_1) &= 2,701\kappa_1^4 - 11,64\kappa_1^3 + 19,01\kappa_1^2 - 14,12\kappa_1 + 4,058, \\ f_{\bar{A}}(\kappa_2) &= 0,1747\kappa_2^2 - 0,5680\kappa_2 + 0,4999, \\ f_{\bar{B}}(\kappa_2) &= 1,253\kappa_2^4 - 7,153\kappa_2^3 + 15,94\kappa_2^2 - 17,06\kappa_2 + 9,890. \end{aligned}$$

Jeśli masę układu drgającego oznaczmy przez M_c , to

$$(3.18) \quad M_c = 2M + M_1 + 2M_2 = \text{const.}$$

Zgodnie ze wzorami (3.1) określającymi kształt prętów, obliczymy objętości prętów i powyższą równość napiszemy w postaci

$$(3.19) \quad M_c = 2M + \varrho_1 l_1 \alpha_1^2 f_1 + 2\varrho_2 l_2 \alpha_2^2 f_2,$$

gdzie

$$(3.20) \quad f_1 = 1 - \frac{4}{3} \kappa_1 + \frac{8}{15} \kappa_1^2, \quad f_2 = 1 - \kappa_2 + \frac{1}{3} \kappa_2^2.$$

Na podstawie (3.19)

$$(3.21) \quad \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{f_2} \left(\frac{M_c - 2M}{\varrho_1 l_1 \alpha_1^2} - f_1 \right).$$

Stąd korzystając z (3.16), otrzymujemy następującą postać warunku rezonansowego (3.15):

$$(3.22) \quad \frac{f_A}{f_B} - 2 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)^2 \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^5 \frac{1}{f_2} \left(\frac{M_c - 2M}{\varrho_1 l_1 \alpha_1^2} - f_1 \right) \frac{f_A}{f_B} = 0.$$

Określając wartość parametru κ_2 , który jest związany z kształtem pręta pionowego, tak dobieramy wartość parametru κ_1 , aby powyższy warunek był spełniony; pozostałe wielkości występujące w tym warunku są ustalone. Równanie (3.22) jest algebraicznym równaniem czwartego stopnia ze względu na κ_1 i rozwiązywaliśmy je metodą Ferrariego [8]. Spełniając równanie (3.22) zachowujemy stan ustalony rezonansu wewnętrznego.

Obliczając współczynniki liczbowe, które występują w (3.17) przyjęliśmy formę drgań pręta I w postaci:

$$(3.23) \quad Y_1(x_1) = \sin \frac{\pi x_1}{l_1},$$

natomiast formę drgań pręta II określoną wzorem (3.8), ponieważ założyliśmy, że sprzężenie poprzez siły podłużne jest na tyle małe, że nie wywołuje dużych zmian w formach. Formy drgań (3.23) i (3.8) wynikają z rozwiązań odpowiednich problemów brzegowych, oddzielnie dla każdego pręta.

W obecnych rozważaniach zaniedbujemy również wpływ współczynników kształtu na formy drgań.

Na podstawie (3.8) oraz (3.23) otrzymujemy, podobnie jak w [3]:

$$(3.24) \quad \bar{C}(\alpha_1) = E_1 I_1(0) Y_1'''(0) \frac{1}{l_2} \int_0^1 (Y_2)^2 dx = \frac{E_1 \alpha_1^4}{l_1^3 l_2} f_{\bar{C}},$$

gdzie $f_{\bar{C}} = -14,40$. Przyjmujemy również [3]:

$$(3.25) \quad \Gamma_1 = 1,813 \cdot 10^3 N \quad (\text{dla } \alpha_1 = 0,06 m).$$

Stąd, korzystając ze wzorów (3.1) i (3.2), otrzymujemy

$$(3.26) \quad \begin{aligned} f_D &= f_B, & f_E &= 24,35, \\ f_{\bar{D}} &= f_{\bar{B}}, & f_{\bar{E}} &= 33,09. \end{aligned}$$

Z kolei przystępujemy do zagadnienia optymalizacji. Przy danych parametrach κ_2 i α_1 poszukujemy na podstawie (3.22) i (3.21) takich wartości parametrów κ_1 i α_2 , aby amplituda $R_2 = 2 \sqrt{x_2}$ elementu II wymuszanego parametrycznie przyjmowała wartość minimalną. Parametry κ_1 , κ_2 , α_1 i α_2 , przy których spełniony jest ten warunek, określają optymalny kształt układu drgającego. Optymalne kształty drgających prętów określają roz-

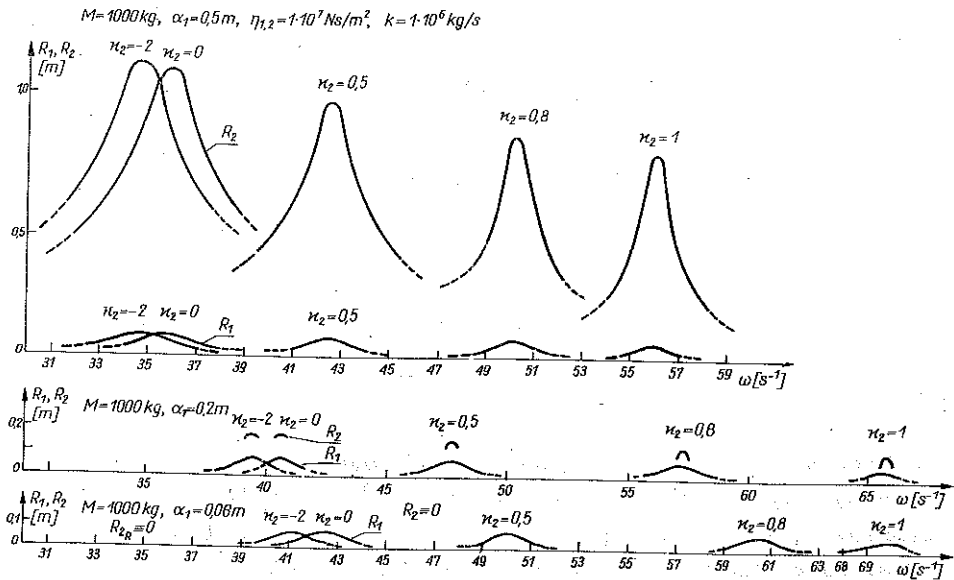
mieszczenie całkowitej masy układu. Zmieniając masy umieszczone w przegubach przeanalizujemy ich wpływ na amplitudy w pobliżu rezonansu, w szczególności na amplitudę optymalną. Zbadamy również wpływ tłumienia na uzyskane rezultaty.

4. OBLICZENIA NUMERYCZNE I ANALIZA WYNIKÓW

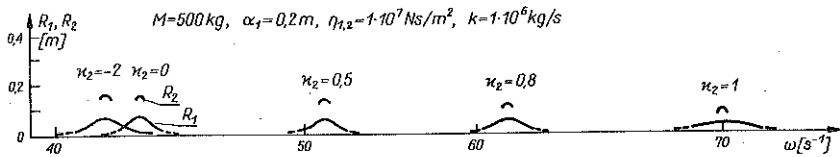
Obliczenia przeprowadziliśmy dla prętów stalowych. Przyjeliśmy $E_1 = E_2 = 2,2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho_1 = \rho_2 = 7,7 \cdot 10^3$ kg m⁻³. Przyjeliśmy dwa zestawy współczynników tłumienia [3]: w pierwszym przypadku $\eta_1 = \eta_2 = 1 \cdot 10^7$ Nsm⁻², $k = 1 \cdot 10^6$ kg s⁻¹, w drugim przypadku $\eta_1 = \eta_2 = 1 \cdot 10^5$ Nsm⁻², $k = 1 \cdot 10^4$ kg s⁻¹. Długości prętów są odpowiednio $l_1 = 8$ m, $l_2 = 14$ m. Wymiar poprzeczny pręta I przybiera wartości $\alpha_1 \in [0,06$ m, 0,2 m, 0,5 m] natomiast α_2 obliczaliśmy na podstawie (3.21) przy ustalonym κ_2 , κ_1 zaś obliczonym według (3.22).

Obliczenia powtórzyliśmy dla kilku różnych wartości mas umieszczonych w połączeniach przegubowych: $M \in [200$ kg, 500 kg, 1000 kg, 2000 kg]. Masę całkowitą układu przyjęliśmy równą $M_c = 10000$ kg.

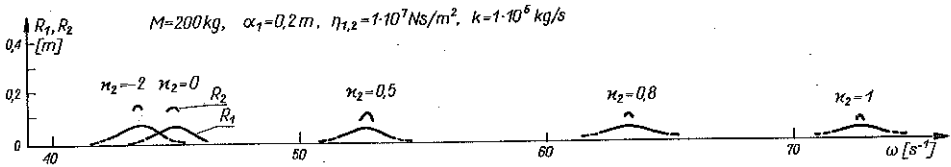
Dla ustalonych w powyższy sposób parametrów sporządzamy wykresy amplitud R_1 i R_2 w zależności od częstości ω , którą zmieniamy w pobliżu ω_{01} , dla różnych wartości parametrów kształtu. Uzyskujemy dwa rodzaje krzywych rezonansowych w zależności od wartości mas oraz współczynników tłumienia. Przy większych współczynnikach tłumienia i mniejszych masach



Rys. 2. Krzywe rezonansowe dla różnych wartości κ_2 ; $M = 1000$ kg, $\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^7$ Ns m⁻², $k = 1 \cdot 10^6$ kg s⁻¹ oraz $\alpha_1 = 0,5$ m, 0,2 m lub 0,06 m



Rys. 2a. Krzywe rezonansowe dla różnych wartości κ_2 ; $M = 500$ kg, $\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^7$ Ns m⁻², $k = 1 \cdot 10^6$ kg s⁻¹, $\alpha_1 = 0,2$ m



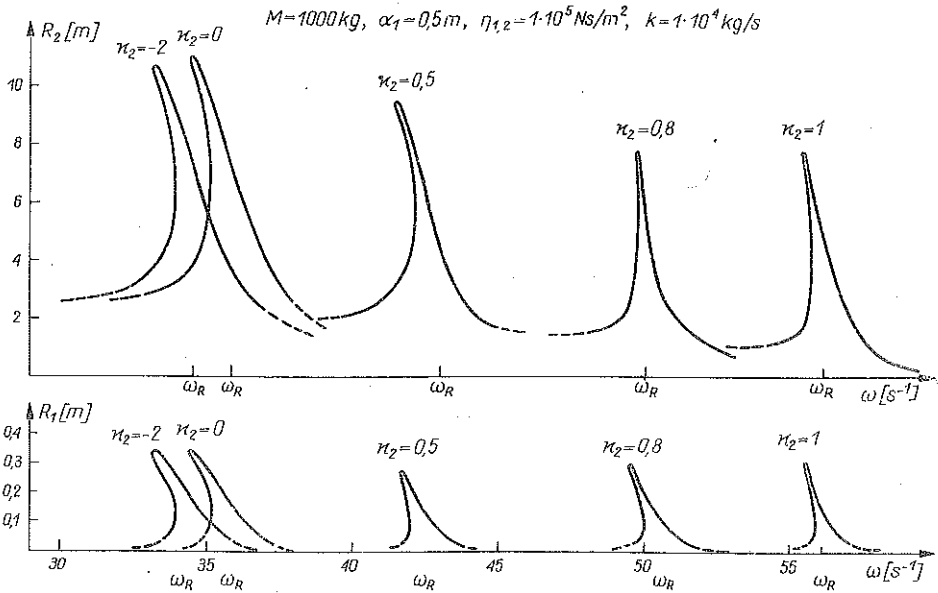
Rys. 2b. Krzywe rezonansowe dla różnych wartości κ_2 ; $M = 200$ kg, $\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^7$ Ns m⁻², $k = 1 \cdot 10^6$ kg s⁻¹, $\alpha_1 = 0,2$ m

umieszczonych w przegubach, krzywe rezonansowe są symetryczne, a rozwiązania niezerowe na R_2 występują w bliskim otoczeniu częstości ω_{01} . Gdy masy umieszczone w przegubach są większe, natomiast współczynniki tłumienia przyjmują mniejsze wartości, charakter krzywych jest zupełnie inny, przeważa nieliniowa bezwładność [4].

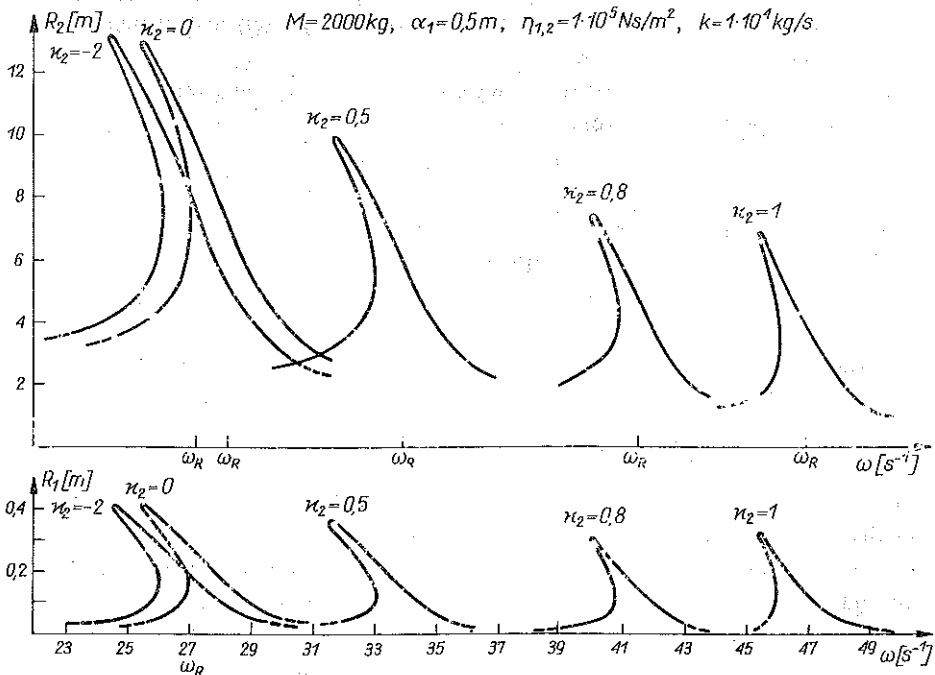
Uzyskane rezultaty przedstawiają wykresy podane na rysunkach od 2 do 7. Na rysunku 2 podano wykresy amplitud R_1 i R_2 w zależności od częstości (krzywe rezonansowe), dla kilku współczynników κ_2 : -2,0, 0,5, 0,8, 1 (por. wzór (3.1)). Masy umieszczone w przegubach wynoszą $M = 1000$ kg, natomiast współczynniki tłumienia $\eta_{1,2} = 10^7$ Nsm⁻², $k = 1 \cdot 10^6$ kg s⁻¹. Widzimy, że minimalna wartość amplitudy R_2 występuje dla $\kappa_2 = 1$, co jest zgodne z wynikami pracy [3]. Wykres 2 przedstawia również wpływ parametru α_1 na amplitudę optymalną, co również pokazano w pracy [3]. Przy malejącej masie pręta poziomego (α_1 maleje), masa pręta pionowego rośnie ze względu na warunek (3.18) i rezonans wewnętrzny występuje z mniejszą amplitudą, w końcu zupełnie zanika; np. $R_2 \equiv 0$ dla $M = 1000$ kg, $\alpha_1 = 0,06$ m.

Na rys. 3 przedstawiono także amplitudy R_1 i R_2 w zależności od częstości, lecz dla innych współczynników tłumienia. Widzimy, że zmienił się charakter krzywych, które straciły swą symetrię. Duże amplitudy występują dla częstości mniejszych od częstości rezonansowej. Optymalna amplituda R_2 występuje również dla $\kappa_2 = 1$.

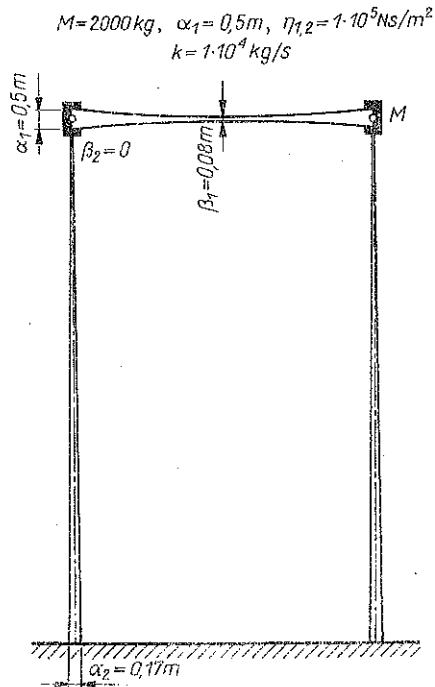
Na kolejnym rys. 4 tłumienie pozostaje niezmienione, natomiast wartości mas umieszczonych w przegubach zwiększyliśmy do $M = 2000$ kg. W pewnych obszarach częstości otrzymaliśmy trzy wartości amplitud. Nie wszystkie rozwiązania są stabilne. Wartość amplitudy rezonansowej R_2 zależy od tego, czy zbliżamy się do rezonansu od strony wyższych, czy niższych częstości.



Rys. 3. Krzywe rezonansowe dla różnych κ_2 ; $M=1000\text{ kg}, \eta_{1,2}=1\cdot 10^5\text{ Ns m}^{-2}, k=1\cdot 10^4\text{ kg s}^{-1}, \alpha_1=0,5\text{ m}$



Rys. 4. Krzywe rezonansowe dla różnych κ_2 ; $M=2000\text{ kg}, \eta_{1,2}=1\cdot 10^5\text{ Ns m}^{-2}, k=1\cdot 10^4\text{ kg s}^{-1}, \alpha_1=0,5\text{ m}$



Rys. 5. Optymalny układ prętowy

Tablica 1. Wpływ mas M na kształt optymalny układu prętowego przy ustalonym sprzężeniu ($\alpha_1 = \text{const}$)

M [kg]	x_1	x_2 [m]	β_1 [m]	β_2 [m]
$x_2 = 1, \quad \alpha_1 = 0,5 \text{ m}$				
2000	0,8291	0,1659	0,08547	0
1000	0,6857	0,1980	0,1572	0
500	0,6275	0,2128	0,1863	0
200	0,5957	0,2212	0,2022	0
$x_2 = 1, \quad \alpha_1 = 0,2 \text{ m}$				
2000	-0,2019	0,1980	0,2404	0
1000	-0,4299	0,2323	0,2860	0
500	-0,5329	0,2479	0,3066	0
200	-0,5906	0,2567	0,3181	0
$x_2 = 1, \quad \alpha_1 = 0,06 \text{ m}$				
2000	-3,529	0,2130	0,2717	0
1000	-4,256	0,2468	0,3153	0
500	-4,585	0,2621	0,3351	0
200	-4,773	0,2708	0,3464	0

W przypadku, gdy $M = 2000$ kg wartość amplitudy optymalnej R_2 w rezonansie ($\omega \approx \omega_{01}$) jest mniejsza niż dla $M = 1000$ kg.

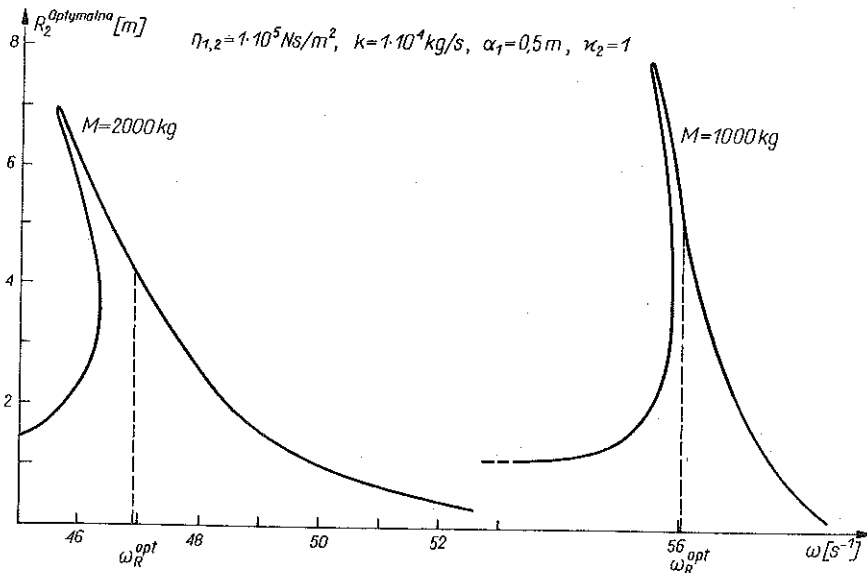
Na podstawie wykresów zamieszczonych na rys. 2, 2a i 2b wnoskujemy, że przy ustalonej masie M_1 pręta poziomego ($\alpha_1 = 0,2$ m) wartość optymalnej amplitudy R_2 jest najmniejsza dla $M = 200$ kg.

Na rys. 5 przedstawiono optymalny kształt układu drgającego ($\kappa_2 = 1$) dla $M = 2000$ kg oraz przy ustalonym sprzężeniu między elementami układu ($\alpha_1 = 0,5$ m) i współczynnikach tłumienia $\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^5$ Ns m⁻², $k = 1 \cdot 10^4$ kg s⁻¹.

Przyjęcie warunku organiczającego w postaci (3.18) powoduje, że w warunku rezonansowym pojawia się masa skupiona M . Ustalając κ_2 (czyli kształt elementu II) liczyliśmy κ_1 z warunku (3.22). Zmieniając M uzyskujemy inne wartości κ_1 przy ustalonym κ_2 . Zatem przez zmianę masy skupionej umieszczonej w przegubach można zmieniać optymalny kształt układu, jeśli sprzężenie elementów układu (wartość siły sprzęgającej podłużnej) oraz inne parametry (np. l_1 , l_2) czy stałe materiałowe są ustalone (por. tablica 1).

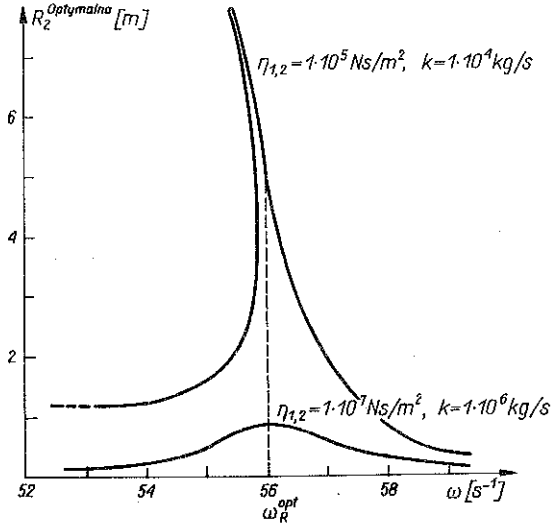
Rysunki 6 i 7 oraz tablica 2 odnoszą się do analizy wpływu M i η jedynie na amplitudę optymalną. Ponieważ układ zawiera masy skupione umieszczone w przegubach, więc analizując ich wpływ na amplitudy należy uwzględnić również wpływ tłumienia.

Na rys. 6 przedstawiono amplitudę $R_2^{\text{opt}}(\omega)$ elementu II ($\kappa_2 = 1$) przy ustalonych współczynnikach $\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^5$ Ns m⁻², $k = 1 \cdot 10^4$ kg s⁻¹ oraz ustalonym sprzężeniu dla dwu różnych mas skupionych: $M = 2000$ kg, $M = 1000$ kg. Rezonans wewnętrzny uległ przesunięciu z otoczenia częstości $\omega_R^{\text{opt}} = 46,95$ s⁻¹ dla $M = 2000$ kg do $\omega_R^{\text{opt}} = 56,04$ s⁻¹ dla $M = 1000$ kg. Gdy M rośnie, war-



Rys. 6. Optymalna amplituda R_2^{opt} dla różnych mas M oraz ustalonych współczynnikach η , k

$$M=1000 \text{ kg}, \alpha_1=0,5 \text{ m}, \kappa=1$$



Rys. 7. Optymalna amplituda R_2^{opt} dla różnych współczynników η, k przy ustalonej masie M

Tablica 2. Wpływ współczynników tłumienia oraz wpływ mas M na amplitudę optymalną w rezonansie elementu II oraz na częstotliwość rezonansową

M [kg]	ω_R^{opt} [s^{-1}]	R_{2R}^{opt} [m]	M [kg]	ω_R^{opt} [s^{-1}]	R_{2R}^{opt} [m]
$\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^7 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}, k = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$		$\eta_{1,2} = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}, k = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$			
$\kappa_2 = 1, \alpha_1 = 0,5 \text{ m}$					
2000	46,95	0,9904	2000	46,95	4,165
1000	56,04	0,8362	1000	56,04	4,914
500	60,19	0,7671	500	60,19	6,366
200	62,60	0,7255	200	62,60	8,784
$\kappa_2 = 1, \alpha_1 = 0,2 \text{ m}$					
2000	56,05	0,1292	2000	56,05	0,5363
1000	65,76	0,1014	1000	65,76	0,6564
500	70,15	$8,766 \cdot 10^{-2}$	500	70,15	0,8751
200	72,66	$7,950 \cdot 10^{-2}$	200	72,66	1,285
$\kappa_2 = 1, \alpha_1 = 0,06 \text{ m}$					
2000	60,29	0	2000	60,29	$4,392 \cdot 10^{-2}$
1000	69,85	0	1000	69,85	$5,480 \cdot 10^{-2}$
500	74,18	0	500	74,18	$7,379 \cdot 10^{-2}$
200	76,66	0	200	76,66	0,1055

tości R_{2k}^{opt} (optymalnej amplitudy elementu II w rezonansie) maleją. Zachodzi to dla mniejszych z dwu rozważanych wartości η i k (tablica 2).

Na rys. 7 przedstawiono krzywe rezonansowe $R_2^{\text{opt}}(\omega)$ przy ustalonej wartości $M = 1000$ kg i ustalonym sprzężeniu dla dwu różnych wartości współczynników η i k . Zmiana η nie wpływa na ω_R^{opt} lecz na kształt krzywych i wartość amplitud w rezonansie (por. tablica 2).

Amplitudy R_1 obliczaliśmy na podstawie równania stopnia trzeciego. Rzeczywiste, niezerowe rozwiązania uzyskaliśmy w szerokim przedziale częstości. Jednak ze względu na fakt, że poprawne są jedynie rozwiązania z małego otoczenia ω_{01} (stan ustalony) zamieszczono część krzywych rezonansowych, zaznaczając to linią przerywaną. Amplitudy R_2 obliczaliśmy na podstawie równania kwadratowego. Rzeczywiste, niezerowe rozwiązania występują najczęściej w małym otoczeniu ω_{01} . Stąd rozwiązania te są równocześnie rozwiązaniami dopuszczalnymi.

5. ZAKOŃCZENIE

Tematyka niniejszej pracy jest kontynuacją zagadnień podjętych w pracy [3]. Dotyczy optymalizacji układu prętowego z masami skupionymi, umieszczonymi w przegubach. Wprowadzenie tych mas do rozważań niniejszej pracy powoduje dopisanie do równań ruchu dodatkowych wyrazów o współczynnikach F_M i \bar{F}_M ; natomiast uwzględnienie ciągłego rozkładu mas prętów i małych przemieszczeń ich przekrojów powoduje pojawienie się wyrazów o współczynnikach F i \bar{F} . Podstawienie $M = 0$ w równaniach ruchu (układ prętowy identyczny z układem rozważanym w [3]) pozostawia jeszcze dwa rodzaje nieliniowości: nieliniowe tłumienie i nieliniową bezwładność.

Zagadnienie optymalizacji parametrycznej polegało na znalezieniu takich parametrów kształtu, przy których amplituda elementu II przyjmowała wartość minimalną przy warunku ograniczającym (3.18). Optymalizowany układ pozostawał w warunkach rezonansu wewnętrznego. Minimum amplitudy R_2 występuje dla $\kappa_2 = 1$. Szczegółowej analizie wymagała amplituda elementu II — R_2^{opt} . Istotny wpływ na kształt krzywej amplitudowej i wartość optymalnej amplitudy mają parametry M , η i k . Od wzajemnej relacji między tymi wielkościami zależy bowiem kształt optymalnej krzywej amplitudowej oraz obszar częstości, w którym zachodzi zjawisko rezonansu. Również wartość amplitudy optymalnej w pobliżu ω_{01} zależy od tych parametrów. Przy znacznych M optymalne krzywe rezonansowe mają charakter wybitnie nieliniowy. Dla optymalnej amplitudy otrzymujemy trzy rozwiązania; nie wszystkie są stabilne i realizowane przez układ fizyczny. Amplituda w pobliżu ω_{01} zależy od tego, z której strony zbliżamy się do rezonansu. Z rozważań dotyczących układów nieliniowych znane jest zjawisko

„przeciągania amplitud”. Maksymalna wartość amplitud optymalnych występuje dla częstości odległych od ω_{01} .

W pracy nie uwzględniono zależności formy drgań od kształtu pręta. Można oczekiwać, że uwzględnienie tej zależności spowoduje wystąpienie amplitudy optymalnej dla $\kappa_2 \neq 1$, czyli dla pręta pionowego w kształcie stożka ściętego. Wymaga to jednak dodatkowych obliczeń.

Wyniki pracy mają raczej charakter jakościowy i sygnalizują pewne zjawiska. Można mieć nadzieję, że rezultaty znajdą zastosowanie praktyczne, ponieważ układy prętowe są nieraz istotnym elementem konstrukcji i urządzeń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. FORYŚ, *Vibrations and dynamical stability of some system of rods in nonlinear approach*, Zagad. Drgań Nieliniowych, **22**, 1984.
2. A. FORYŚ and J. NIZIOL, *Internal resonance in a plane system of rods*, J. Sound Vibr., **95**, 3, 1984.
3. A. FORYŚ, A. GAJEWSKI, *Analiza i optymalizacja układu prętowego o zmiennych przekrojach w warunkach rezonansu wewnętrznego*, Rozpr. Inżyn., **32**, 4, 1984.
4. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Москва 1956.
5. G. SCHMIDT, *Parameterregte Schwingungen*, Berlin 1975 (istnieje przekład rosyjski).
6. A. TONDL, *Some problems of rotor dynamics*, Czech. Academy of Sciences, Prague 1965.
7. R. M. EVAN-IWANOWSKI, *Resonance oscillations in mechanical systems*, Amsterdam — Oxford — New York 1976.
8. G. A. KORN, T. M. KORN, *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, Część I, Warszawa 1983 [przekład z angielskiego].

РЕЗЮМЕ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ СТВЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Темой работы является анализ влияния формы стержней плоской колеблющейся системы на амплитуду колебаний и установившемся состоянии внутреннего резонанса. Полная масса системы дана. В описании учтены нелинейное затухание и нелинейная инерция. Исследовано влияние сосредоточенных масс, помещенных в шарнирных соединениях, на оптимальную амплитуду при внутреннем резонансе. Показано, что можно соответственно подобрать значения масс в шарнирах и значения коэффициентов затухания так, чтобы уменьшить значение оптимальной амплитуды и сузить область частот, в которой выступает внутренний резонанс. Путем изменения распределения масс в системе можно нежелательные эффекты перенести к другим областям частот. Результаты работы имеют качественный характер и отображают существенные явления автопараметрического характера. Можно надеется, что полученные результаты найдут практические применения, т.к. стержневые системы являются элементами многих конструкций и устройств.

SUMMARY

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF BAR STRUCTURES
ACCOUNT BEING TAKEN OF NONLINEAR PHENOMENA

The paper deals with the analysis of the influence of the shape of bars constituting a plane vibrating system upon the vibration amplitudes in the state of stationary internal resonance. Nonlinear damping and inertia effects are taken into account. The effects of masses concentrated at the hinge joints on the optimum amplitudes at internal resonance are investigated. It is shown that the suitable choice of concentrated masses at the joints and of the damping coefficients reduces the vibration amplitude and narrows the range of frequencies for which the internal resonance takes place. Redistribution of the masses may shift the undesirable effects to other frequency ranges. The results obtained are of a qualitative character and reflect important autoparametric phenomena; they may be expected to find practical applications due to the fact that the bar systems are elements of numerous structures and machines.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lipca 1985 r.
