

PARAMETRYCZNA OPTIMALIZACJA PRĘTA LEPKOSPŘĘŻYSTEGO ZE WZGLĘDU NA STATECZNOŚĆ DYNAMICZNĄ^(*)

ANDRZEJ F O R Y Ś i ANTONI G A J E W S K I (KRAKÓW)

W pracy rozważono parametryczną optymalizację kształtu pręta wspornikowego ściskanego siłą śledzącą, okresowo zmienną w czasie, wykonanego z materiału lepkospřężystego (typu Kelvina-Voigta). Dokładniej przeanalizowano dwa typy kształtów pręta. Rozważania ograniczono do pierwszego obszaru niestateczności, a jako funkcję celu przyjęto amplitudę oscylującej składowej siły śledzącej. Do przybliżonego rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Galerkina. Podobny problem rozwiązano również dla modelu Zieglera. Wyniki zilustrowano wykresami.

1. UWAGI WSTĘPNE

Literatura poświęcona problemom optymalnego kształtowania prętów ściskanych jest bardzo bogata; najważniejsze prace omówione są w przeglądowej pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [1]. Żadna z nich nie dotyczy jednak optymalizacji kształtu prętów ze względu na stateczność dynamiczną, gdy siła ściskająca jawnie zależy od czasu. W niniejszej pracy podjęto próbę, raczej jakościowego, zbadania zagadnienia parametrycznej optymalizacji kształtu wspornikowego pręta lepkospřężystego, ściskanego okresowo zmienną siłą śledzącą. Optymalizacja jest tu rozumiana jako dobór pewnego parametru (zmiennej optymalizacji), charakteryzującego kształt pręta w klasie prętów o określonym sposobie zmiany przekroju poprzecznego. Funkcją celu jest amplituda oscylującego składnika siły śledzącej; powinna ona być maksymalna na granicy pierwszego obszaru niestateczności, do którego ograniczamy rozważania. W celu przybliżonego rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Galerkina. Rozważono również analogiczne zagadnienie optymalizacji dla modelu Zieglera. Wyniki przedstawiono na odpowiednich wykresach.

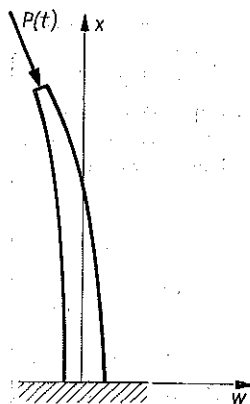
^(*) Praca została wykonana w ramach CPBP. 0201/6.3.

2. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PRĘTA ORAZ MODELU ZIEGLERA

Pręt wspornikowy o przekroju kołowym, wykonany z materiału lepko-sprężystego typu Kelvina–Voigta przedstawiono na rys. 1. Swobodny koniec pręta $x = l$ poddany jest działaniu niekonserwatywnej siły śledzącej postaci

$$(2.1) \quad P(t) = P_0 + P_1 \cos \vartheta t,$$

gdzie t oznacza czas, a P_0 , P_1 i ϑ są dodatnimi stałymi. Zakładamy, że średnia wartość siły śledzącej jest mniejsza od niezależnej od czasu śledzącej siły krytycznej: $P_0 < P_k$ oraz że siła śledząca jest stale siłą ściskającą pręt: $P_1 < P_0$. Obok tłumienia wewnętrznego, wynikającego z przyjętego modelu materiału, na pręt podczas ruchu działa wiskotyczny opór zewnętrzny. Siła tarcia zewnętrznego jest proporcjonalna do prędkości oraz do promienia przekroju pręta.



Ry. 1

W celu zbadania stateczności pręta obciążonego siłą (2.1) wykorzystamy równanie różniczkowe ruchu:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right] + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma r(x) \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $w(x, t)$ oznacza ugięcie przekroju x w chwili t , $I(x)$, $A(x)$ i $r(x)$ oznaczają odpowiednio moment bezwładności, pole powierzchni i promień przekroju; E jest modułem Younga, λ i γ są współczynnikami tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego, ρ jest gęstością materiału.

Do równania (2.2) należy dołączyć warunki brzegowe, które w przypadku siły śledzącej są szczególnie proste:

$$(2.3) \quad w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] (l, t) = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right] \right\} (l, t) = 0.$$

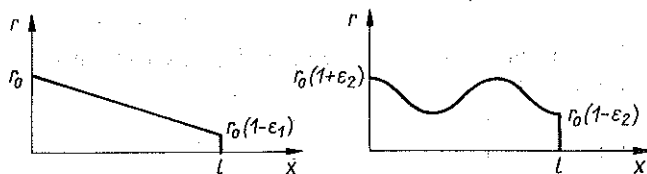
W niniejszej pracy rozpatrujemy pręty o zmiennej sztywności, lecz ustalonej objętości V i długości l , dla których promień przekroju kołowego można opisać równaniem

$$(2.4) \quad r(x) = r_0 \varphi(x; \varepsilon),$$

w którym dana bezwymiarowa funkcja $\varphi(x; \varepsilon)$ określa kształt pręta z dokładnością do pewnej stałej ε . Stała ta będzie parametrem optymalizacji. Stała r_0 może być wyrażona przez objętość pręta; zależy ona również od typu funkcji φ :

$$(2.5) \quad r_0 = \sqrt{\frac{V}{\pi l \langle \varphi^2 \rangle}},$$

gdzie $\langle f \rangle$ oznacza średnią wartość funkcji $f(x)$.



Rys. 2

W dalszym ciągu zbadamy dwa typy prętów o przekroju kołowym (rys. 2), dla których przyjmujemy odpowiednio

$$(2.6) \quad \varphi_1(x; \varepsilon_1) = 1 - \varepsilon_1 \frac{x}{l}, \quad \varepsilon_1 \in (-\infty, 1], \quad \langle \varphi_1^2 \rangle = 1 - \varepsilon_1 + \frac{1}{3} \varepsilon_1^2,$$

$$\varphi_2(x; \varepsilon_2) = 1 + \varepsilon_2 \cos \frac{3\pi x}{l}, \quad \varepsilon_2 \in [0, 1), \quad \langle \varphi_2^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2.$$

W obu przypadkach założenie $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ odpowiada prętom pryzmatycznym.

W celu uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące zmienne i parametry bezwymiarowe:

$$(2.7) \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{w}{l}, \quad \beta = \frac{4\pi l^4}{EV^2} P, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \theta = t_0 \vartheta, \quad A = \frac{\lambda}{Et_0},$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{l}{\pi V}} \frac{t_0}{\rho} \gamma, \quad \text{gdzie} \quad t_0 = 2l^2 \sqrt{\frac{\pi \rho l}{EV}},$$

jest wielkością o wymiarze czasu i może być traktowana jako jednostka czasu. Na podstawie (2.7) siłę śledzącą (1.1) napiszemy w następującej postaci:

$$(2.8) \quad \beta(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \cos \theta\tau, \quad \beta_0 = \frac{4\pi l^4}{EV^2} P_0, \quad \beta_1 = \frac{4\pi l^4}{EV^2} P_1.$$

Wyrażając pole powierzchni i moment bezwładności przekroju za pomocą funkcji $\varphi(x; \varepsilon)$ oraz uwzględniając podstawienia (2.7), równania (2.2) i (2.3) napiszemy następująco:

$$(2.9) \quad \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\varphi^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + A \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \tau} \right) \right] + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle} \varphi^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \Gamma \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}} \varphi \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0,$$

$$v(0, \tau) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \tau) = 0, \quad \left(\varphi^4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)(1, \tau) = 0,$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\varphi^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + A \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \tau} \right) \right] \right\} (1, \tau) = 0.$$

Przybliżonego rozwiązania zagadnienia (2.9) poszukujemy w postaci

$$(2.10) \quad v(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n q_i(\tau) v_i(\xi),$$

gdzie $v_i(\xi)$ są danymi funkcjami, spełniającymi warunki brzegowe (2.9)₂, natomiast $q_i(\tau)$ są funkcjami szukanymi. Stosując metodę Galerkiną podstawiamy (2.10) do równania (2.9)₁, mnożymy kolejno przez $v_j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots, n$, a następnie każde z otrzymanych równań całkujemy względem ξ w granicach od 0 do 1. W wyniku otrzymujemy następujący układ n równań różniczkowych zwyczajnych na funkcje $q_i(\tau)$:

$$(2.11) \quad \sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{q}_j + B_{ij} \dot{q}_j + C_{ij} q_j + D_{ij} q_j \cos \theta\tau) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(2.12) \quad A_{ij} = A_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle} \int_0^1 v_i(\xi) v_j(\xi) \varphi^2(\xi; \varepsilon) d\xi,$$

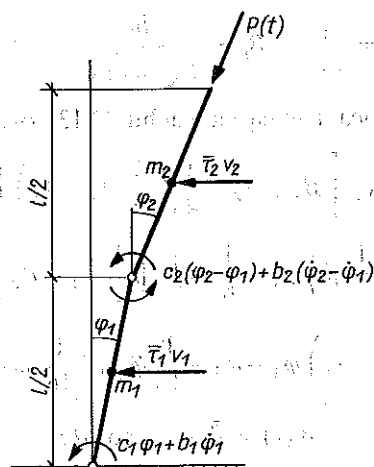
$$B_{ij} = B_{ij}(\varepsilon) = \frac{A}{\langle \varphi^2 \rangle^2} \int_0^1 v_i''(\xi) v_j''(\xi) \varphi^4(\xi; \varepsilon) d\xi +$$

$$(2.12) \quad \text{[cd.]} \quad + \frac{\gamma}{\sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}} \int_0^1 v_i(\xi) v_j(\xi) \varphi(\xi; \varepsilon) d\xi,$$

$$C_{ij} = C_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{\langle \varphi^2 \rangle^2} \int_0^1 v_i''(\xi) v_j''(\xi) \varphi^4(\xi; \varepsilon) d\xi + \beta_0 \int_0^1 v_i(\xi) v_j''(\xi) d\xi,$$

$$D_{ij} = \beta_1 \int_0^1 v_i(\xi) v_j''(\xi) d\xi.$$

We wzorach (2.11) i (2.12) kropka oznacza różniczkowanie względem τ , a przecinek różniczkowanie względem ξ .



Rys. 3

W podobny sposób możemy opisać model Zieglera [5] (rys. 3). Na swobodny koniec modelu działa siła śledząca (2.1), która spełnia takie same warunki, jak dla pręta. Równania ruchu modelu przyjmujemy w postaci

$$(2.13) \quad \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} m_1 + m_2 \right) l^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \left[b_1 + b_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \tau_1 + \tau_2 \right) \right] \frac{d\varphi_1}{dt} + \left[c_1 + c_2 - \frac{1}{2} P(t) l \right] \varphi_1 + \frac{1}{8} m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{8} \tau_1 - b_2 \right) \frac{d\varphi_2}{dt} + \left[\frac{1}{2} P(t) l - c_2 \right] \varphi_2 = 0,$$

$$(2.13) \quad \frac{1}{8} m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{8} \tau_2 - b_2 \right) \frac{d\varphi_1}{dt} - c_2 \varphi_1 + \\ + \frac{1}{16} m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{16} \tau_2 + b_2 \right) \frac{d\varphi_2}{dt} + c_2 \varphi_2 = 0,$$

gdzie $\tau_i = l^2 \bar{\tau}_i$, $i = 1, 2$, a pozostałe parametry są objaśnione na rysunku 3.

Po zdefiniowaniu wielkości bezwymiarowych:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} t, \quad \bar{\theta} = l \sqrt{\frac{m_2}{c_2}} \vartheta, \quad \bar{\beta}_0 = \frac{l}{c_2} P_0, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{l}{c_2} P_1, \\ \bar{\beta} = \frac{l}{c_2} P,$$

(2.14)

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \psi = \frac{c_1}{c_2}, \quad B_i = \frac{b_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad T_i = \frac{\tau_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad i = 1, 2,$$

wyrazimy za ich pomocą równania ruchu (2.13) oraz siłę (2.1):

$$(2.15) \quad \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \mu + 1 \right) \ddot{\varphi}_1 + \left[B_1 + B_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} T_1 + T_2 \right) \right] \dot{\varphi}_1 + \\ + \left(\psi + 1 - \frac{1}{2} \bar{\beta} \right) \varphi_1 + \frac{1}{8} \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{8} T_1 - B_2 \right) \dot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{2} \bar{\beta} - 1 \right) \varphi_2 = 0, \\ \frac{1}{8} \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{1}{8} T_2 - B_2 \right) \dot{\varphi}_1 - \varphi_1 + \frac{1}{16} \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{16} T_2 + B_2 \right) \dot{\varphi}_2 + \varphi_2 = 0, \\ \bar{\beta}(\bar{\tau}) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 \cos \bar{\theta} \bar{\tau}.$$

Kropka nad literą oznacza różniczkowanie względem $\bar{\tau}$.

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\bar{q}_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad \bar{A}_{11} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \mu + 1 \right), \quad \bar{A}_{12} = \frac{1}{8}, \\ \bar{A}_{21} = \frac{1}{8}, \quad \bar{A}_{22} = \frac{1}{16},$$

$$\bar{B}_{11} = B_1 + B_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} T_1 + T_2 \right), \quad \bar{B}_{12} = \frac{1}{8} T_1 - B_2,$$

$$\bar{B}_{21} = \frac{1}{8} T_2 - B_2,$$

(2.16)

$$\bar{B}_{22} = \frac{1}{16} T_2 + B_2, \quad \bar{C}_{11} = \psi + 1 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_0, \quad \bar{C}_{12} = \frac{1}{2} \bar{\beta}_0 - 1,$$

$$\bar{C}_{21} = -1,$$

$$\bar{C}_{22} = 1, \quad \bar{D}_{11} = -\frac{1}{2} \bar{\beta}_1, \quad \bar{D}_{12} = \frac{1}{2} \bar{\beta}_1, \quad \bar{D}_{21} = \bar{D}_{22} = 0,$$

to układ równań różniczkowych (2.15) możemy przedstawić w identycznej postaci z układem równań (2.11) dla $n = 2$:

$$(2.17) \quad \sum_{j=1}^2 (\bar{A}_{ij} \ddot{q}_j + \bar{B}_{ij} \dot{q}_j + \bar{C}_{ij} q_j + \bar{D}_{ij} q_j \cos \bar{\theta} \bar{\tau}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Wobec tego w dalszych rozważaniach dotyczących pręta, w rozwiązaniu (2.10) ograniczymy się do dwóch wyrazów ($n = 2$) i analizę dynamicznej stateczności pręta lepkospłężystego i modelu Zieglera będziemy prowadzić równocześnie.

Na podstawie układu równań (2.11) można wyznaczyć obszary niestateczności pręta lub modelu Zieglera. Dalsze rozważania ograniczymy do pierwszego obszaru niestateczności, który występuje w otoczeniu podwojonej najniższej częstości drgań własnych rozpatrywanego układu [2]. Częstości własne wyznaczmy za pomocą uproszczonego układu równań, który otrzymamy przyjmując w (2.11) i (2.17): $B_{ij} = D_{ij} = \bar{B}_{ij} = \bar{D}_{ij} = 0$.

Granice obszaru niestateczności, czyli zależność β_1 lub $\bar{\beta}_1$ od bezwymiarowej częstości wymuszającej θ lub $\bar{\theta}$ wyznaczmy w sposób standardowy [2], poszukując rozwiązań układu równań (2.11) lub (2.17) w postaci

$$(2.18) \quad q_i(\tau) = E_i \sin \frac{\theta \tau}{2} + F_i \cos \frac{\theta \tau}{2}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie E_i oraz F_i są pewnymi stałymi. Podstawienie rozwiązania (2.18) do równań (2.11) prowadzi do układu czterech liniowych, jednorodnych równań algebraicznych na stałe E_i, F_i . Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest zerowanie się wyznacznika głównego (czwartego stopnia) tego układu równań. Warunek ten, określający położenie pierwszego obszaru niestateczności, ma postać

(2.19)

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4} A_{11} + C_{11} + \frac{D_{11}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{12} + C_{12} + \frac{D_{12}}{2}, & \frac{\theta}{2} B_{11}, & \frac{\theta}{2} B_{12} \\ -\frac{\theta^2}{4} A_{21} + C_{21} + \frac{D_{21}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{22} + C_{22} + \frac{D_{22}}{2}, & \frac{\theta}{2} B_{21}, & \frac{\theta}{2} B_{22} \\ -\frac{\theta}{2} B_{11}, & -\frac{\theta}{2} B_{12}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{11} + C_{11} - \frac{D_{11}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{12} + C_{12} - \frac{D_{12}}{2} \\ -\frac{\theta}{2} B_{21}, & -\frac{\theta}{2} B_{22}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{21} + C_{21} - \frac{D_{21}}{2}, & -\frac{\theta^2}{4} A_{22} + C_{22} - \frac{D_{22}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to algebraiczne równanie ósmego stopnia ze względu na częstość θ siły wymuszającej (na granicy obszaru stateczności). Rozwiązanie zależy od wielkości β_0 , β_1 , ε lub $\bar{\beta}_0$, $\bar{\beta}_1$, ψ oraz parametrów pręta lub modelu i jest poprawne w otoczeniu podwójonej najniższej częstości własnej rozpatrywanego układu.

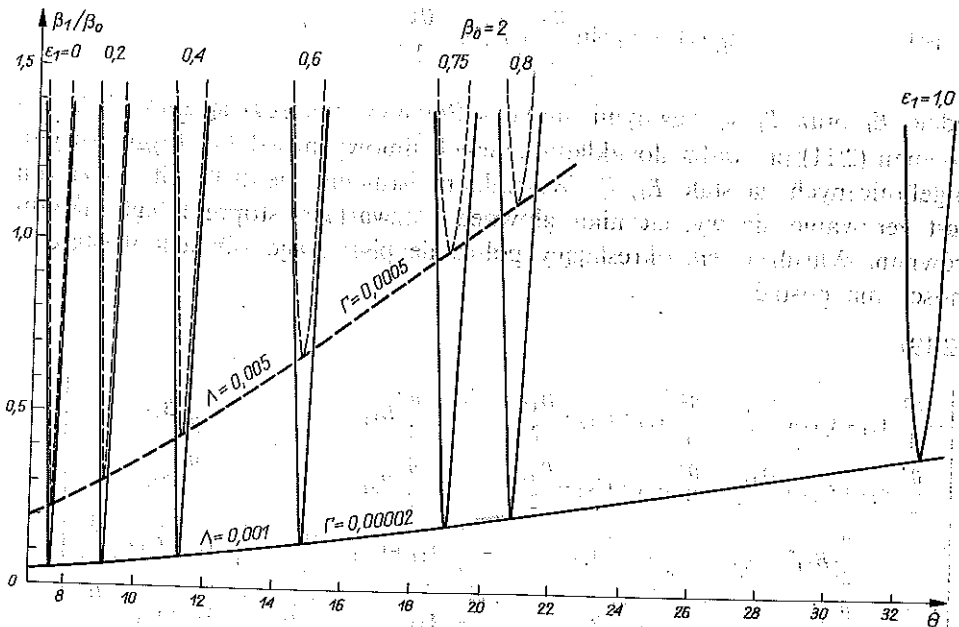
3. PARAMETRYCZNA OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA

W niniejszej pracy poszukujemy optymalnego kształtu w klasie prętów opisanych równaniami (2.6), przy ustalonej objętości i długości. Optymalizacja polega na wyborze takiej wartości parametru optymalizacji ε (tzn. ε_1 lub ε_2), dla której wartość krytycznej amplitudy β_1 oscylującego składnika siły śledzącej (2.8) jest największa.

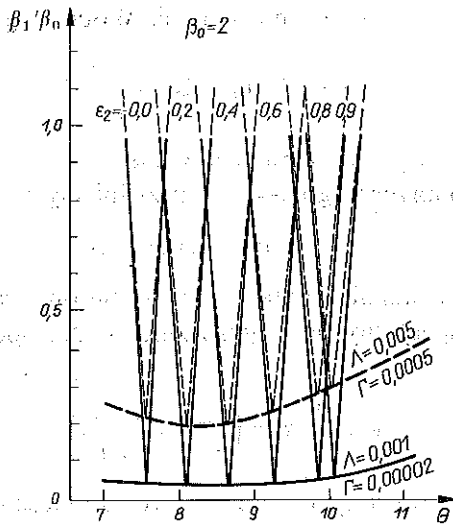
Obliczenia przeprowadzono przyjmując w (2.10) następujące funkcje $v_1(\xi)$ i $v_2(\xi)$ [4], które spełniają warunki brzegowe (2.9):

$$(3.1) \quad v_1(\xi) = \xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2, \quad v_2(\xi) = -\xi^5 + 5\xi^4 - 10\xi^3 + 10\xi^2.$$

Równanie algebraiczne (2.19) rozwiązywano numerycznie dla częstości bliskich podwójonej wartości najniższej częstości drgań własnych pręta. Przyjmowano różne wartości β_0 (mniejsze od stałej siły krytycznej obliczonej na podstawie kryterium kinetycznego z uwzględnieniem efektu destabilizacji [5]), a następnie



Rys. 4



Rys. 5

zmieniano wartości współczynników tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego Λ i Γ . Przykładowe wyniki zamieszczono na rysunkach 4 i 5. Wartości współczynników tłumienia podane są przy odpowiednich wykresach. Wykresy ilustrują znaczny wpływ kształtu pręta na jego stateczność, szczególnie w klasie prętów stożkowych (przypadek opisany wzorem (2.6)₁). Optymalną wartością zmiennej optymalizacji jest $\epsilon_1 = 1$, co odpowiada prętowi stożkowemu o zerowym przekroju na końcu swobodnym. Wynik ten jest niespodziewanie różny od przypadku optymalnego kształtu pręta ściskanego stałą siłą śledzącą, przedstawionego w pracach J. L. CLAUDONA [3] i J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [1]. Próba optymalizacji w klasie prętów opisanych równaniem (2.6)₂ nie podwyższa tu krytycznej wartości β_1 przy tych samych wartościach β_0 , Λ i Γ .

4. PARAMETRYCZNA OPTIMALIZACJA MODELU ZIEGLERA

Przypiszmy umownie objętość rozważanemu modelowi Zieglera [4]. Pole przekroju poprzecznego $A(x)$ pręta rzeczywistego, opisywanego modelem, przyjmujemy następujące:

$$(4.1) \quad A(x) = A_0 + 2(A_1 - A_0) \frac{x}{l}, \quad x \in \left(0, \frac{l}{2}\right),$$

$$A(x) = A_1 \left[1 - \left(\frac{2x-l}{l} \right)^n \right], \quad x \in \left(\frac{l}{2}, l\right),$$

gdzie A_0 , A_1 oraz n są dodatnimi stałymi. Wobec tego objętość

$$(4.2) \quad V = \frac{1}{4} l \left(A_0 + A_1 \frac{3n+1}{n+1} \right).$$

Związki pomiędzy sztywnościami przegubów c_1 , c_2 oraz odpowiednimi polami przekroju poprzecznego A_0 , A_1 przyjmujemy w postaci [4]

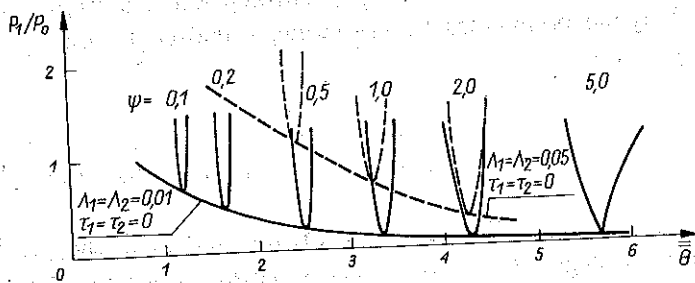
$$(4.3) \quad A_0 = kc_1^x, \quad A_1 = kc_2^x,$$

gdzie k jest stałą, a współczynnik x jest określony za pomocą wzoru na przekrój poprzeczny zależny od współrzędnej x . Na podstawie (4.3) objętość wyraża się wzorem

$$(4.4) \quad V = \frac{1}{4} klc_2^x \left(\psi^x + \frac{3n+1}{n+1} \right).$$

W niniejszej pracy rozważamy jedynie pręty równomiernie zbieżne, dla których $x = 1/2$, $n = 3$.

Optymalizacja modelu Zieglera będzie polegać na takim wyborze wartości parametru ψ , dla której wartość krytycznej amplitudy P_1 oscylującego składnika siły śledzącej (2.1) jest największa, przy ustalonych wartościach P_0 , l oraz V . Podobnie jak dla pręta, równanie (2.19) rozwiązywaliśmy numerycznie dla częstości bliskich podwójonej najniższej częstości własnej modelu. Przyjmowaliśmy różne wartości P_0 (mniejsze od stałej siły krytycznej, obliczonej na podstawie kryterium kinetycznego z uwzględnieniem efektu destabilizacji [5]) oraz różne wartości współczynników tłumienia. Przykładowe wyniki przedstawiono na rysunku 6. Na osi poziomej odłożono $\bar{\theta} = kl^2 \sqrt{\frac{\rho}{V}} \varrho_c$.



Rys. 6

ponieważ wielkość $\bar{\theta}$ zależy od parametru $\psi = c_1/c_2$. Przyjęto $(k^2 l^3/V^2) P_0 = 2$, a wartości współczynników tłumienia podano na rysunku. Wpływ wartości parametru ψ na położenie obszarów niestateczności modelu Zieglera jest znaczny, a optymalną wartością graniczną tego parametru jest zero.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione wyniki pracy mają bez wątpienia charakter wstępny, stanowią jednak pewne zwrócenie uwagi na problemy, które dotychczas nie były badane. Wydaje się, że optymalizacja kształtu prętów narażonych na utratę stateczności dynamicznej prowadzi do wyników różnych od dotychczas otrzymanych w przypadku działania sił konserwatywnych, a nawet niekonserwatywnej siły śledzącej. W niniejszej pracy przyjęto śledzący charakter siły ściskającej ze względu na prostotę warunków brzegowych (2.3); w przypadku siły o stałym kierunku w przestrzeni rozważania komplikują się, ponieważ nie jest możliwe rozdzielenie zmiennych: czasowej i przestrzennej.

Celowe wydają się dalsze badania we wskazanym w pracy kierunku oraz ich rozszerzenie na inne elementy konstrukcyjne (np. płyty).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *A unified approach to optimal design of columns*, SM Archives, 5, 4, 363–413, 1980.
2. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Изд. Теор. Лит., Москва 1956.
3. J. L. CLAUDON, *Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads*, J. de Mecanique, 14, 3, 531–543, 1975.
4. B. DRĄG, A. GAJEWSKI, *Optymalizacja kształtu pręta smukłego umieszczonego w strumieniu płynu*, Rozpr. Inż. 22, 1, 55–68, 1974.
5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych*, Mech. Teor. Stos., 10, 1, 127–142, 1972.

РЕЗЮМЕ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ИЗ-ЗА ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В работе рассмотрена параметрическая оптимизация формы кронштейнового стержня, сжимаемого следящей силой периодически изменяющейся во времени, изготовленного из вязкоупругого материала (типа Кельвина–Фойгта). Точнее проанализированы два типа форм стержня. Рассуждения ограничены первой областью неустойчивости, а как функция цели принята амплитуда осциллирующей составляющей следящей силы. Для приближенного решения задачи применен метод Галеркина. Аналогичная проблема решена тоже для модели Зиглера. Результаты иллюстрированы диаграммами.

SUMMARY

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF A VISCOELASTIC ROD WITH
RESPECT TO ITS DYNAMIC STABILITY

Parametric optimization of the shape of a cantilever rod is considered; the rod is compressed by a time-dependent follower force and is made of a Kelvin-Voigt viscoelastic material. Two types of rod shapes are analyzed in detail. The considerations are confined to the first instability domain, the objective function being assumed to be the amplitude of the oscillating component of the force. An approximate solution is obtained by means of the Galerkin method. A similar problem is solved also for the case of a Ziegler model. The results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lutego 1986 r.